VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

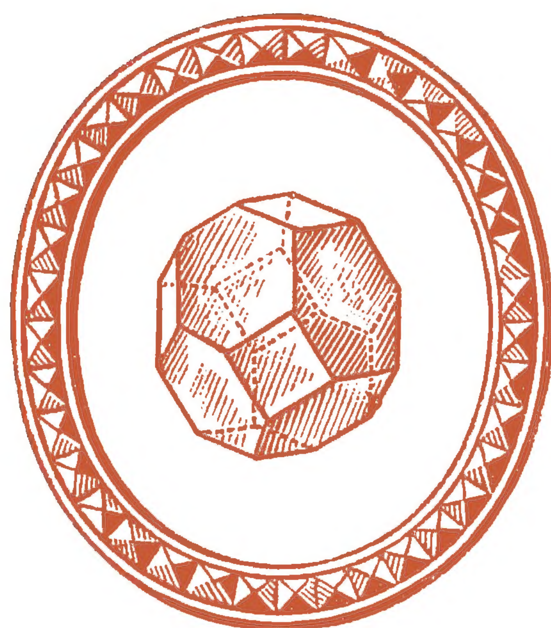


Е. С. ФЕДОРОВ

СИММЕТРИЯ И СТРУКТУРА КРИСТАЛЛОВ

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ

РЕДАКЦИЯ
ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА АН СССР
А. В. ШУБНИКОВА
И ПРОФЕССОРА
И. И. ШАФРАНОВСКОГО

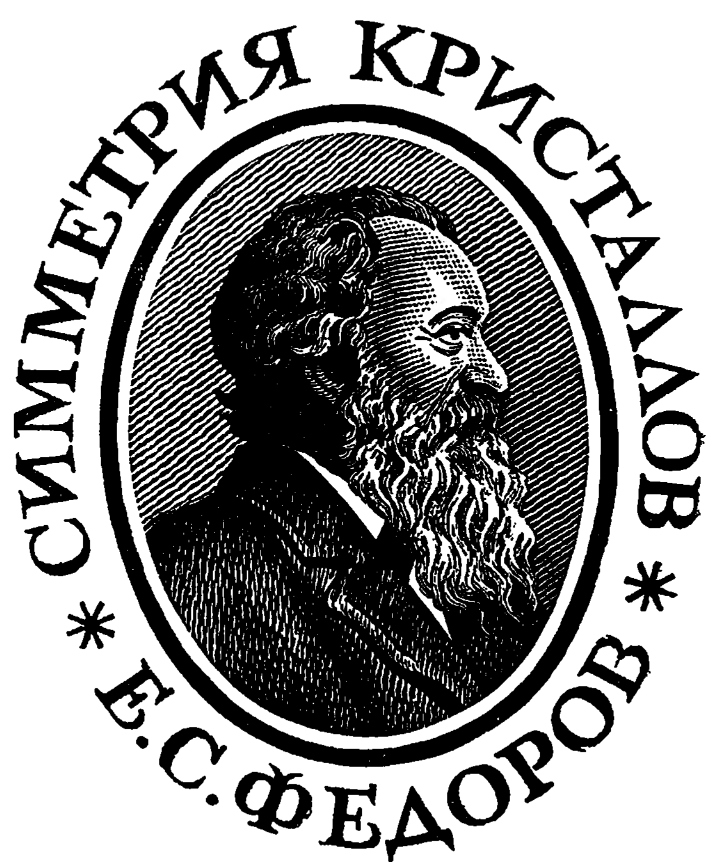


ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1949

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы

Председатель Комиссии президент Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*

Зам. председателя член-корреспондент Академии Наук СССР
П. Ф. ЮДИН


СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛОВ
* Е.С.ФЕДОРОВ *

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В УЛУЧШЕННОМ ВИДЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ [1]

Научные знания в настоящее время никоим образом не представляют отдельных независимых учений, лишенных связи одно с другим. Напротив того, различные отделы знаний связаны друг с другом весьма многочисленными и запутанными нитями, и почти всегда успех одной области знаний существенно зависит от успехов в некоторых других. Ближе всего в различиях отдельных отраслей знания или так называемых наук бросается в глаза большая или меньшая степень их отвлеченности. Менее отвлеченные науки пользуются результатами, достигнутыми науками более отвлеченными, и в этом отношении находятся в зависимости от последних, а представители этих наук всегда нуждаются в более или менее обширных сведениях, почерпнутых из наук более отвлеченных (но не обратно). В истории науки самым обыденным фактом является тот, что представители наук менее отвлеченных по необходимости берутся за исследования в области наук более отвлеченных, чтобы обеспечить дальнейший успех разрабатываемой ими самими области знаний. Достаточно вспомнить громадные услуги, оказанные физике и химии физиологами и минералогами. Но особенно часты обращения специалистов по наукам менее отвлеченным к наиболее отвлеченной из наук — математике. Математикою в большей или меньшей степени

пользуются все науки, и чем совершеннее и выработаннее какая-нибудь отрасль знаний, тем больше в ней математики.

Та роль, которую в последнее время математика начала играть в области минералогии, ясно свидетельствует о значительных успехах последней. Но если минералоги черпали из клада, внесенного в науку чистыми математиками, то в свою очередь и их деятельность не оставалась бесследною в области математики: чистые математики, оставаясь на своей, в высокой степени отвлеченной, точке зрения, не могут предугадать тех направлений математической мысли, которые по необходимости вырабатываются у представителей менее отвлеченных наук. В первых попытках (немецкого минералога Наумана) более обширных приложений математики к минералогии выводы и формулы чистых математиков почти без изменения переносились в новую научную область. Но в скором времени минералоги почувствовали недостаточность того, что было дано математиками; появился ряд чисто математических работ, направленных для ответа на задачи, ставимые минералогией, и в результате получилась выработка математической системы, до сих пор почти не знакомой чистым математикам. Кто знаком с современным состоянием кристаллографии (одной области минералогии), тот знает, что целые отделы элементарной математики в том виде, как они выработаны чистыми математиками и как по сие время преподаются в средних учебных заведениях, можно считать устаревшими: сюда относятся как одна область элементарной геометрии (учение о фигурах), так и сферическая тригонометрия и отчасти геометрия аналитическая. Вот почему и теперь мне, обращающемуся к публике с кратким изложением начал аналитической геометрии и с поправкою в них, сущность которой объяснена ниже, по необходимости ради простоты, краткости и точности изложения приходится ссылаться на результаты, изложенные в минералогической литературе. Не имея права предполагать

их известными ни чистым математикам, ни образованной публике вообще, я должен был предпослать к настоящему предмету изложения еще и краткое изложение формул сферической тригонометрии в том виде, как они излагаются теперь в научных сочинениях по кристаллографии. Кристаллографы вообще не имеют ни достаточного времени, ни достаточной в глазах публики компетентности выступать пред нею с популяризацией новых направлений математической мысли, выработанных ими самими и их коллегами по специальности, и если я решаюсь на это, то, не рассчитывая на успех в ближайшее время,— так как такой успех находился бы в противоречии с косностью, свойственной общественной организации вообще,— решаюсь из чувства безусловной необходимости: я не потому предлагаю внести в изложение современной аналитической геометрии поправку, что такую поправку можно сделать, но потому, что без этой поправки нельзя приступать к решению вопросов, поставленных современною кристаллографией на очередь,— я имею в виду аналитическое изучение симметрии как конечных фигур, так и бесконечных систем.

Несмотря на то, что вопросы симметрии как чисто геометрические входят в область математики вообще и аналитической геометрии в частности, чистые математики почти не коснулись этой области, и громадный успех ее почти целиком есть результат труда минералогов и физиков. Но и последние до сего времени не пытались пользоваться для решения вопросов симметрии аналитическим методом, а мне, решившемуся на это, пришлось натолкнуться на ошибку в самых основах современной аналитической геометрии, состоящую в том, что геометрическое построение, определяющее величину одной из *независимых* косоугольных координат, производится в *зависимости* от положения двух других осей этой системы координат. Для решения задач, которыми до сих пор занимается общая теория аналитической геометрии,

ошибка эта имеет не столько практический, сколько философский характер; она состоит в сущности лишь в усложнении понятия о независимой координате, так как независимая переменная заменяется функцией от нее же самой и двух других независимых переменных. Ниже в моем изложении выведен и вид этой функции. Таким образом существовавшая до сих пор в изложении начал аналитической геометрии ошибка (ошибка только по отношению к самым началам; для специальных целей зависимое построение координат может быть даже полезным, как это указано ниже) не могла быть причиною каких-либо ошибочных выводов, но является задержкою при решении вопросов, не предвиденных чистыми математиками. Наглядным доказательством может служить работа о „симметрии конечных фигур", которую я публикую вслед за настоящею. Впоследствии возникнут, может быть, и другие вопросы, кроме симметрии, решение которых несовместимо с оставлением этой ошибки.

I. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ФОРМУЛ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ПОНИМАНИЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО[1])

§ 1. Если x_0 и x_1 две прямоугольные оси координат на плоскости, а 1 и 2 две какие-нибудь прямые, то:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(12) &= \operatorname{sn}(1x_1 - 2x_1) = \operatorname{sn}(1x_1)\operatorname{cs}(2x_1) - \\ &- \operatorname{cs}(1x_1)\operatorname{sn}(2x_1) = \operatorname{cs}(1x_0)\operatorname{cs}(2x_1) - \\ &- \operatorname{cs}(1x_1)\operatorname{cs}(2x_0) = \begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_0) & \operatorname{cs}(1x_1) \\ \operatorname{cs}(2x_0) & \operatorname{cs}(2x_1) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Но по известному свойству детерминантов:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_0) & \operatorname{cs}(1x_1) \\ \operatorname{cs}(2x_0) & \operatorname{cs}(2x_1) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_1) & \operatorname{cs}(1x_0) \\ \operatorname{cs}(2x_1) & \operatorname{cs}(2x_0) \end{vmatrix}$$

Так как второй детерминант равен, согласно формуле (1), $\operatorname{sn}(21)$, то отсюда заключаем, что $\operatorname{sn}(12) = -\operatorname{sn}(21)$; поэтому при измерении угловых величин необходимо наперед условиться в направлении положительных углов, т. е. принять за положительное направление углов или соответствующее направлению часовой стрелки, или обратное.

---

[1]) Извлечение из этюда второго по аналитической кристаллографии, помещенного в „Горном журнале“ (1886, № 3).

Чтобы получить выражение, независимо от прямоугольных координат, мы можем поступить двояким образом:

1) если желаем за оси координат принять произвольные прямые 3 и 4, то, согласно (1), получим:

$$\operatorname{sn}(34)=\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(3x_0) & \operatorname{cs}(3x_1) \\ \operatorname{cs}(4x_0) & \operatorname{cs}(4x_1) \end{vmatrix}$$

а потому, приняв во внимание равенства

$$\operatorname{cs}(ab)=\operatorname{cs}(ax_1-bx_1)=\operatorname{cs}(ax_1)\operatorname{cs}(bx_1)+\operatorname{sn}(ax_1)\operatorname{sn}(bx_1)= \\ =\operatorname{cs}(ax_1)\operatorname{cs}(bx_1)+\operatorname{cs}(ax_0)\operatorname{cs}(bx_0)$$

и

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1'b_1' \\ a_2'b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1a_1'+b_1b_1' & a_1a_2'+b_1b_2' \\ a_2a_1'+b_2b_1' & a_2a_2'+b_2b_2' \end{vmatrix}$$

найдем:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(12)\operatorname{sn}(34)&=\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_0) & \operatorname{cs}(1x_1) \\ \operatorname{cs}(2x_0) & \operatorname{cs}(2x_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \operatorname{cs}(3x_0) & \operatorname{cs}(3x_1) \\ \operatorname{cs}(4x_0) & \operatorname{cs}(4x_1) \end{vmatrix}= \\ &=\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(13) & \operatorname{cs}(14) \\ \operatorname{cs}(23) & \operatorname{cs}(24) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

или же (2) возвысим sn(12) в квадрат, т. е.

$$\operatorname{sn}^2(12)=\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_0) & \operatorname{cs}(1x_1) \\ \operatorname{cs}(2x_0) & \operatorname{cs}(2x_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_0) & \operatorname{cs}(1x_1) \\ \operatorname{cs}(2x_0) & \operatorname{cs}(2x_1) \end{vmatrix}= \\ =\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cs}(12) \\ \operatorname{cs}(21) & 1 \end{vmatrix}=1-\operatorname{cs}^2(12)$$

и значит

$$\operatorname{sn}(12)=\pm\sqrt{1-\operatorname{cs}^2(12)} \qquad (3)$$

Смысл знака перед корнем теперь ясен из замечаний, сделанных выше.

§ 2. Сказанное относится к углам на плоскости. Совершенно аналогичные формулы мы можем составить и для телесных углов в пространстве.

Подобно тому как $\begin{vmatrix} cs(1x_0) & cs(1x_1) \\ cs(2x_0) & cs(2x_1) \end{vmatrix}$ есть простая функция плоского угла между двумя прямыми 1 и 2, мы можем принять функцию

$$\begin{vmatrix} cs(1x_0) & cs(1x_1) & cs(1x_2) \\ cs(2x_0) & cs(2x_1) & cs(2x_2) \\ cs(3x_0) & cs(3x_1) & cs(3x_2) \end{vmatrix}$$

в которой x_0, x_1 и x_2 — прямоугольные оси координат, за функцию телесного угла между тремя прямыми 1, 2 и 3, т. е. тригоноэдра.[1]) Ради аналогии мы будем называть ее синусовой функцией[2]) и означать буквами Sn, т. е.

$$\mathrm{Sn}\,(123) = \begin{vmatrix} cs(1x_0) & cs(1x_1) & cs(1x_2) \\ cs(2x_0) & cs(2x_1) & cs(2x_2) \\ cs(3x_0) & cs(3x_1) & cs(3x_2) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Из этого определения мы выводим, что синусовая функ-

---

[1]) Трехгранного угла. Термин „гоноэдр“ предложен мною в „Началах учения о фигурах“ (Зап. Мин. общ., т. XXI, стр. 9) вместо термина „многогранный угол“.

[2]) Штаудт (Staudt) (Crelle J., t. 24, S. 255) назвал эту функцию „Sinus, dreiseitiger Raumecke“; его примеру последовали математики и кристаллографы-аналитики. Однако я не могу согласиться с таким термином. Так как всякий гоноэдр имеет определенную величину, которую можно выразить в градусах (см., например: „Начала учения о фигурах“, §§ 8 и 10), и так как синус есть совершенно определенная функция, так что каждой данной величине гоноэдра соответствует его определенный синус, то условно подразумевать под тем же выражением другую функцию, по моему мнению, неправильно, и это ведет к двусмыслию. Нетрудно даже вывести простое соотношение между „синусом“ Штаудта и действительным синусом тригоноэдра, дополнительного данному. Далее (формула 12) доказывается, что $\mathrm{Sn}^2(abc) = 4\,\mathrm{sn}\frac{a+b+c}{2}\cdot\mathrm{sn}\frac{a+b-c}{2},\ \mathrm{sn}\frac{a-b+c}{2}\cdot\mathrm{sn}\frac{-a+b+c}{2}$; величины же тригоноэдра, дополнительного данному,

ция также имеет двоякий знак, а именно, сообразуясь с известными свойствами детерминантов, можем написать

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Sn}(123)=\mathrm{Sn}(231)=\mathrm{Sn}(312)=-\mathrm{Sn}(213)= \\ =-\mathrm{Sn}(321)=-\mathrm{Sn}(132) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Эти равенства показывают, что знак синусовой функции обусловливается последовательностью ребер (123), а именно если, представив себя поместившимися внутри тригоноэдра (123) так, чтобы ноги находились на его вершине, мы увидим, что последовательность ребер соответствует движению часовой стрелки, и примем синусовую функцию за положительную, то при обратной последовательности она будет отрицательною.

Подобно предыдущему мы можем выразить синусовую функцию независимо от прямоугольных осей координат двояким образом, а именно:

1) приняв за оси координат произвольные прямые (456), мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Sn}(123)\,\mathrm{Sn}(456)=\begin{vmatrix} \mathrm{cs}(1x_0) & \mathrm{cs}(1x_1) & \mathrm{cs}(1x_2) \\ \mathrm{cs}(2x_0) & \mathrm{cs}(2x_1) & \mathrm{cs}(2x_2) \\ \mathrm{cs}(3x_0) & \mathrm{cs}(3x_1) & \mathrm{cs}(3x_2) \end{vmatrix}\times \\ \times\begin{vmatrix} \mathrm{cs}(4x_0) & \mathrm{cs}(4x_1) & \mathrm{cs}(4x_2) \\ \mathrm{cs}(5x_0) & \mathrm{cs}(5x_1) & \mathrm{cs}(5x_3) \\ \mathrm{cs}(6x_0) & \mathrm{cs}(6x_1) & \mathrm{cs}(6x_2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathrm{cs}(14) & \mathrm{cs}(15) & \mathrm{cs}(16) \\ \mathrm{cs}(24) & \mathrm{cs}(25) & \mathrm{cs}(26) \\ \mathrm{cs}(34) & \mathrm{cs}(35) & \mathrm{cs}(36) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

или же (2), возвысив синусовую функцию в квадрат, написать

и трех других смежных с последним по грани (см.: Нач. уч. о фиг. § 10, теор. 18 и § 6, опр. 8) будут $180^\circ - \frac{a+b+c}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a-b+c}{2}$ и $-\frac{a+b+c}{2}$, а потому, если означим эти четыре тригоноэдра чрез O, A, B и C, то $\mathrm{Sn}^2(abc)=4\,\mathrm{sn}\,O\;\mathrm{sn}\,A\;\mathrm{sn}\,B\;\mathrm{sn}\,C$.

Таким образом, хотя и неправильно называть эту функцию синусом, но едва ли можно отрицать, что название „синусовая функция" для нее весьма характерно.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sn}^2(123)=\begin{vmatrix} \mathrm{cs}(1x_0) & \mathrm{cs}(1x_1) & \mathrm{cs}(1x_2) \\ \mathrm{cs}(2x_0) & \mathrm{cs}(2x_1) & \mathrm{cs}(2x_2) \\ \mathrm{cs}(3x_0) & \mathrm{cs}(3x_1) & \mathrm{cs}(3x_2) \end{vmatrix}\times \\ \times\begin{vmatrix} \mathrm{cs}(1x_0) & \mathrm{cs}(1x_1) & \mathrm{cs}(1x_2) \\ \mathrm{cs}(2x_0) & \mathrm{cs}(2x_1) & \mathrm{cs}(2x_2) \\ \mathrm{cs}(3x_0) & \mathrm{cs}(3x_1) & \mathrm{cs}(3x_2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{cs}(12) & \mathrm{cs}(13) \\ \mathrm{cs}(21) & 1 & \mathrm{cs}(23) \\ \mathrm{cs}(31) & \mathrm{cs}(32) & 1 \end{vmatrix} \end{array}\right\} \quad (7)$$

и это соотношение представляет лишь частный случай соотношения (6).

Выразив из последнего выражения Sn(123) как корень, мы получим для него два знака, значение которых было определено раньше. Развернув детерминант, мы найдем:

$$\mathrm{Sn}(123)= \qquad (7a)$$
$$=\pm\sqrt{1-\mathrm{cs}^2(23)-\mathrm{cs}^2(31)-\mathrm{cs}^2(12)+2\,\mathrm{cs}(23)\,\mathrm{cs}(31)\,\mathrm{cs}(12)}$$

§ 3. Теперь перейдем к изучению субдетерминантов синусовой функции и на время снова возвратимся к геометрии на плоскости.

Если при прямоугольных осях координат x_0 и x_1 на плоскости даны две точки (x_0x_1) и $(x_0'x_1')$, то нетрудно вывести, что площадь трехугольника, образуемого этими двумя точками и началом координат, выразится

$$P=\frac{1}{2}(x_0x_1'-x_1x_0')=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_0' & x_1' \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Если перенесем трехугольник в параллельном положении, и притом бывшее начало определится координатами (a_0, a_1), то та же площадь выразится:

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0-a_0, & x_1-a_1 \\ x_0'-a_0, & x_1'-a_1 \end{vmatrix}= \\ =\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ 1-1, & x_0-a_0, & x_1-a_1 \\ 1-1, & x_0'-a_0, & x_1'-a_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ 1 & x_0 & x_1 \\ 1 & x_0' & x_1' \end{vmatrix} \end{array}\right\} \quad (8a)$$

Аналогичные выражения мы получим для проекций трехугольника, произвольно помещенного в пространстве, на плоскости прямоугольных координат, а именно:

для проекции на плоскости

$$x_1x_2 - P\,\mathrm{cs}\,(x_0n) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - a_1, & x_2 - a_2 \\ x_1' - a_1, & x_2' - a_2 \end{vmatrix}$$

для проекции на плоскости

$$x_2x_0 - P\,\mathrm{cs}\,(x_1n) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - a_2, & x_0 - a_0 \\ x_2' - a_2, & x_0' - a_0 \end{vmatrix}$$

для проекции на плоскости

$$x_0x_1 - P\,\mathrm{cs}\,(x_2n) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 - a_0, & x_1 - a_1 \\ x_0' - a_0, & x_1' - a_1 \end{vmatrix}$$

Здесь n означает нормаль к площади трехугольника. Такие же выражения мы можем составить и для проекций некоторого другого трехугольника, площадь которого означим через P', а соответственные координаты и нормаль будем писать большими буквами. Перемножив величины соответственных проекций и сложив, получаем

$$PP'\,[\mathrm{cs}\,(x_0n)\,\mathrm{cs}\,(X_0N) + \mathrm{cs}\,(x_1n)\,\mathrm{cs}\,(X_1N) + \mathrm{cs}\,(x_2n)\,\mathrm{cs}\,(X_2N)] =$$

$$= PP'\,\mathrm{cs}\,(nN) = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_0 - a_0 & x_1 - a_1 & x_2 - a_2 \\ x_0' - a_0 & x_1' - a_1 & x_2' - a_2 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} X_0 - A_0 & X_1 - A_1 & X_2 - A_2 \\ X_0' - A_0 & X_1' - A_1 & X_2' - A_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} (x_0 - a_0)(X_0 - A_0) + (x_1 - a_1)(X_1 - A_1) + (x_2 - a_2)(X_2 - A_2) \\ (x_0' - a_0)(X_0 - A_0) + (x_1' - a_1)(X_1 - A_1) + (x_2' - a_2)(X_2 - A_2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (x_0 - a_0)(X_0' - A_0) + (x_1 - a_1)(X_1' - A_1) + (x_2 - a_2)(X_2' - A_2) \\ (x_0' - a_0)(X_0' - A_0) + (x_1' - a_1)(X_1' - A_1) + (x_2' - a_2)(X_2' - A_2) \end{vmatrix}$$

Если сделаем в обоих трехугольниках стороны, пересекающиеся при вершинах, имеющих координаты (a_0, a_1, a_2) и (A_0, A_1, A_2), равными единице, то площади этих трехугольников по величине станут равными половине синуса углов

между упомянутыми сторонами, а координаты $(x_0-a_0)\ldots$ и $(X_0-A_0)\ldots$ станут равными косинусам углов, образуемых соответственными сторонами с осями координат, а потому из только что полученного равенства выведем новое:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Sn}(12)\operatorname{Sn}(34)\operatorname{cs}(nN)=\\&=\begin{vmatrix}\operatorname{cs}(1x_0)\operatorname{cs}(3x_0)+\operatorname{cs}(1x_1)\operatorname{cs}(3x_1)+\operatorname{cs}(1x_2)\operatorname{cs}(3x_2)\\ \operatorname{cs}(2x_0)\operatorname{cs}(3x_0)+\operatorname{cs}(2x_1)\operatorname{cs}(3x_1)+\operatorname{cs}(2x_2)\operatorname{cs}(3x_2)\end{vmatrix}\\&\begin{vmatrix}\operatorname{cs}(1x_0)\operatorname{cs}(4x_0)+\operatorname{cs}(1x_1)\operatorname{cs}(4x_1)+\operatorname{cs}(1x_2)\operatorname{cs}(4x_2)\\ \operatorname{cs}(2x_0)\operatorname{cs}(4x_0)+\operatorname{cs}(2x_1)\operatorname{cs}(4x_1)+\operatorname{cs}(2x_2)\operatorname{cs}(4x_2)\end{vmatrix}=\\&=\begin{vmatrix}\operatorname{cs}(13)\operatorname{cs}(14)\\ \operatorname{cs}(23)\operatorname{cs}(24)\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Из хода вывода видно, что для направления нормалей n и N мы должны принять такие, чтобы, став на плоскости трехугольника по этим направлениям (считая от ног к голове), мы видели последовательность сторон (12) и (34) обеих по движению часовой стрелки или обеих по обратному.

§ 4. Этим соотношением определяется искомое значение субдетерминантов синусовой функции. Пользуясь им, мы можем вывести новые соотношения и выражения синусовой функции. Так, зная, что величина детерминанта равна сумме произведений членов одного ряда на дополнительный этому члену субдетерминант, можем написать [означив нормаль к плоскости (23) через I... и не упуская из виду, что нормаль к плоскости (x_1x_2) есть $x_0\ldots$]

$$\operatorname{Sn}(123)=\operatorname{cs}(1x_0)\begin{vmatrix}\operatorname{cs}(2x_1)(\operatorname{cs}2x_2)\\ \operatorname{cs}(3x_1)(\operatorname{cs}3x_2)\end{vmatrix}+\operatorname{cs}(1x_1)\begin{vmatrix}\operatorname{cs}(2x_2)\operatorname{cs}(2x_0)\\ \operatorname{cs}(3x_2)\operatorname{cs}(3x_0)\end{vmatrix}+$$

$$+\operatorname{cs}(1x_2)\begin{vmatrix}\operatorname{cs}(2x_0)\operatorname{cs}(2x_1)\\ \operatorname{cs}(3x_0)\operatorname{cs}(3x_1)\end{vmatrix}=$$

$$=\operatorname{cs}(1x_0)\operatorname{sn}(23)\operatorname{sn}(x_1x_2)\operatorname{cs}(x_0\mathrm{I})+$$
$$+\operatorname{cs}(1x_1)\operatorname{sn}(23)\operatorname{sn}(x_2x_0)\operatorname{cs}(x_1\mathrm{I})+$$
$$+\operatorname{cs}(1x_2)\operatorname{sn}(23)\operatorname{sn}(x_0x_1)\operatorname{cs}(x_2\mathrm{I}),$$

а приняв во внимание прямоугольность координат $(x_0 x_1 x_2)$, влекущую за собою равенства

$$\operatorname{sn}(x_1 x_2) = \operatorname{sn}(x_2 x_0) = \operatorname{sn}(x_0 x_1) = 1$$

найдем:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Sn}(123) = \operatorname{sn}(23)\,[\operatorname{cs}(1x_0)\operatorname{cs}(x_0\mathrm{I}) + \operatorname{cs}(1x_1)\operatorname{cs}(x_1\mathrm{I}) + \\ \quad + \operatorname{cs}(1x_2)\operatorname{cs}(x_2\mathrm{I})] = \operatorname{sn}(23)\operatorname{cs}(\mathrm{I}1)\end{array}\right\} \quad (10)$$

Также найдем вообще

$$\begin{array}{l}\operatorname{Sn}(123) = \operatorname{sn}(23)\operatorname{cs}(\mathrm{I}\,1) = \operatorname{sn}(31)\operatorname{cs}(\mathrm{II}\,2) = \\ \quad = \operatorname{sn}(12)\operatorname{cs}(\mathrm{III}\,3)\ldots\end{array} \quad (10a)$$

Для тригоноэдра, образованного нормалями I, II и III к плоскостям (23), (31) и (12) тригоноэдра (123), т. е. для тригоноэдра, дополнительного последнему, найдем также

$$\begin{array}{l}\operatorname{Sn}(\mathrm{I\,II\,III}) = \operatorname{sn}(\mathrm{II\,III})\operatorname{cs}(1\,\mathrm{I}) = \operatorname{sn}(\mathrm{III\,I})\operatorname{cs}(2\,\mathrm{II}) = \\ \quad = \operatorname{sn}(\mathrm{I\,II})\operatorname{cs}(3\,\mathrm{III})\end{array} \quad (10b)$$

а из (10a) и (10b) выведем

$$\frac{\operatorname{Sn}(123)}{\operatorname{Sn}(\mathrm{I\,II\,III})} = \frac{\operatorname{sn}(23)}{\operatorname{sn}(\mathrm{II\,III})} = \frac{\operatorname{sn}(31)}{\operatorname{sn}(\mathrm{III\,I})} = \frac{\operatorname{sn}(12)}{\operatorname{sn}(\mathrm{I\,II})} = m \quad (11)$$

т. е. отношение величин синусовых функций тригоноэдра данного и ему дополнительного равно отношению синусов плоских и противоположных двугранных углов первого.

Из этой формулы, в свою очередь, нетрудно вывести новое выражение синусовой функции. Означив временно прямую пересечения плоскостей (I 1) и (23) через 1'..., найдем, что в тригоноэдре (1' 12) двугранный угол, имеющий своим ребром прямую 1', прямой, а потому на основании (11) $\operatorname{sn}(12) = \operatorname{sn}(1'1)/\operatorname{sn}(\mathrm{III\,I})$, а так как очевидно, что $\operatorname{sn}(1'1) = \operatorname{cs}(\mathrm{I}\,1)$, то вместо (10a) и (10b) получим:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sn}\,(123) &= \mathrm{sn}\,(12)\,\mathrm{sn}\,(23)\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{III\,I}) = \mathrm{sn}\,(23)\,\mathrm{sn}\,(31)\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{I\,II}) = \\ &= \mathrm{sn}\,(31)\,\mathrm{sn}\,(12)\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{II\,III})\end{aligned}\right\}\quad (11a)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sn}\,(\mathrm{I\,II\,III}) &= \mathrm{sn}\,(\mathrm{I\,II})\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{II\,III})\,\mathrm{sn}\,(31) = \mathrm{sn}\,(\mathrm{II\,III})\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{III\,I}) \\ \mathrm{sn}\,(12) &= \mathrm{sn}\,(\mathrm{III\,I})\,\mathrm{sn}\,(\mathrm{I\,II})\,\mathrm{sn}\,(23)\end{aligned}\right\}\quad (11b)$$

Кроме того, принимая во внимание равенства

$$1 - \mathrm{cs}^2 a - \mathrm{cs}^2 b - \mathrm{cs}^2 c + 2\mathrm{cs}\, a\, \mathrm{cs}\, b\, \mathrm{cs}\, c = (1 - \mathrm{cs}^2 a)(1 - \mathrm{cs}^2 b) -$$
$$- \mathrm{cs}^2 a\, \mathrm{cs}^2 b - \mathrm{cs}^2 c + 2\mathrm{cs}\, a\, \mathrm{cs}\, b\, \mathrm{cs}\, c = \mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{sn}^2 b - (\mathrm{cs}\, a\, \mathrm{cs}\, b -$$
$$- \mathrm{cs}\, c)^2 = (\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{sn}\, b + \mathrm{cs}\, a\, \mathrm{cs}\, b - \mathrm{cs}\, c)(\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{sn}\, b - \mathrm{cs}\, a\, \mathrm{cs}\, b + \mathrm{cs}\, c) =$$
$$= [\mathrm{cs}\,(a - b) - \mathrm{cs}\, c][\mathrm{cs}\, c - \mathrm{cs}\,(a + b)] =$$
$$= 4\mathrm{sn}\,\frac{a + b + c}{2}\,\mathrm{sn}\,\frac{a + b - c}{2}\,\mathrm{sn}\,\frac{a - b + c}{2},\quad \mathrm{sn}\,\frac{-a + b + c}{2}$$

из (7а) найдем $\left(\text{означив } \dfrac{(23) + (31) + (12)}{2} = s \text{ и } 180^\circ - s = e\right)$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Sn}\,(123) = \pm 2\sqrt{\mathrm{sn}\, s \cdot \mathrm{sn}\,[s - (23)] \cdot \mathrm{sn}\,[s' - (31) \cdot \mathrm{sn}\,(s - (12))]} \\ &\text{и} \\ &\mathrm{Sn}\,(123) = \pm 2\sqrt{\mathrm{sn}\, e \cdot \mathrm{sn}\,[e + (23)] \cdot \mathrm{sn}\,[e + (31)] \cdot \mathrm{sn}\,(e + (12))]}\end{aligned}\right\}\quad (12)$$

Из выведенных выражений нетрудно видеть, что синусовая функция прямого тригоноэдра равна ± 1, и притом эта величина есть наибольшая абсолютная величина этой функции. Наоборот, Sn (123) равна нулю, если хоть один из плоских или двугранных углов равен нулю или 180°, если же ни один из этих углов не имеет этих величин, то не равна нулю и Sn (123). Отсюда следует, что Sn (123) равна нулю лишь тогда, если все эти прямые 1, 2 и 3 находятся в одной плоскости, и, в частном случае, совпадают две из них или все три.

В случае, если тригоноэдр вертикальный, т. е. если в нем только один из плоских углов, например (12), и равный ему по величине противолежащий двугранный угол не прямые, то, так как для такого тригоноэдра нормаль III совпадает с

его ребром 3, по (10a) и (10b) найдем, что Sn (123) = sn (12) и Sn (I II III) = sn (I II).

§ 5. В учении о детерминантах[1] доказывается, что детерминант Δ сложной системы, выражающейся таким образом,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots\dots & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots\dots & b_{1n} \\ b_{m1} & \dots\dots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

в которой одним из членов будет

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn}$$

в случае $m > n$ равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

Основываясь на этом, мы получим для пяти прямых (1, 2, 3, 4, 5), означая через x_0, x_1 и x_2 три прямоугольные оси координат, следующее соотношение:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(1\,x_0) & \mathrm{cs}\,(1\,x_1) & \mathrm{cs}\,(1\,x_2) \\ \mathrm{cs}\,(2\,x_0) & \mathrm{cs}\,(2\,x_1) & \mathrm{cs}\,(2\,x_2) \\ \mathrm{cs}\,(3\,x_0) & \mathrm{cs}\,(3\,x_1) & \mathrm{cs}\,(3\,x_2) \\ \mathrm{cs}\,(4\,x_0) & \mathrm{cs}\,(4\,x_1) & \mathrm{cs}\,(4\,x_2) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(5\,x_0) & \mathrm{cs}\,(5\,x_1) & \mathrm{cs}\,(5\,x_2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(15) & \mathrm{cs}\,(1\,x_0) & \mathrm{cs}\,(1\,x_1) & \mathrm{cs}\,(1\,x_2) \\ \mathrm{cs}\,(25) & \mathrm{cs}\,(2\,x_0) & \mathrm{cs}\,(2\,x_1) & \mathrm{cs}\,(2\,x_2) \\ \mathrm{cs}\,(35) & \mathrm{cs}\,(3\,x_0) & \mathrm{cs}\,(3\,x_1) & \mathrm{cs}\,(3\,x_2) \\ \mathrm{cs}\,(45) & \mathrm{cs}\,(4\,x_0) & \mathrm{cs}\,(4\,x_1) & \mathrm{cs}\,(4\,x_2) \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \quad (13)$$

Это равенство мы можем представить в виде

$$\mathrm{cs}\,(15)\,\mathrm{Sn}\,(234) - \mathrm{cs}\,(25)\,\mathrm{Sn}\,(341) + \\ + \mathrm{cs}\,(35)\,\mathrm{Sn}\,(412) - \mathrm{cs}\,(45)\,\mathrm{Sn}\,(123) = 0$$

или, наконец, написать, ради симметрии выражения

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sn}\,(123)\,\mathrm{cs}\,(45) = \mathrm{Sn}\,(423)\,\mathrm{cs}\,(15) + \mathrm{Sn}\,(143)\,\mathrm{cs}\,(25) + \\ \qquad + \mathrm{Sn}\,(124)\,\mathrm{cs}\,(35) \\ \text{или} \\ \mathrm{Sn}\,(123)\,\mathrm{cs}\,(45) = \mathrm{Sn}\,(523)\,\mathrm{cs}\,(41) + \mathrm{Sn}\,(153)\,\mathrm{cs}\,(42) + \\ \qquad + \mathrm{Sn}\,(125)\,\mathrm{cs}\,(43) \end{array}\right\} \quad (13a)$$

[1] См., например: Baltzer. Determinanten, 4 Aufl., § 6, S. 46.

Если совместим прямую 5 с прямою 4, то получим

$$\begin{aligned}\mathrm{Sn}\,(123) &= \mathrm{Sn}\,(423)\,\mathrm{cs}\,(14) + \\ &+ \mathrm{Sn}\,(143)\,\mathrm{cs}\,(24) + \mathrm{Sn}\,(124)\,\mathrm{cs}\,(34)\end{aligned} \qquad (13b)$$

Если же прямую 5 совместим последовательно с прямыми 1, 2, 3, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sn}\,(123)\,\mathrm{cs}\,(41) &= \mathrm{Sn}\,(423) + \mathrm{Sn}\,(143)\,\mathrm{cs}\,(21) + \mathrm{Sn}\,(124)\,\mathrm{cs}\,(31)\\ \mathrm{Sn}\,(123)\,\mathrm{cs}\,(42) &= \mathrm{Sn}\,(423)\,\mathrm{cs}\,(12) + \mathrm{Sn}\,(143) + \mathrm{Sn}\,(124)\,\mathrm{cs}\,(32)\\ \mathrm{Sn}\,(123)\,\mathrm{cs}\,(43) &= \mathrm{Sn}\,(423)\,\mathrm{cs}\,(13) + \mathrm{Sn}\,(143)\,\mathrm{cs}\,(23) + \mathrm{Sn}\,(124)\end{aligned}\right\} (13c)$$

Умножив первое из этих уравнений на Sn (423), второе на Sn (143) и третье на Sn (124) и сложив, получим [принимая во внимание (13b)]

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sn}^2\,(123) &= \mathrm{Sn}^2(423) + \mathrm{Sn}^2\,(143) + \mathrm{Sn}^2\,(124) + \\ &+ 2\,\mathrm{Sn}\,(423)\,\mathrm{Sn}\,(143)\,\mathrm{cs}\,(12) + 2\,\mathrm{Sn}\,(143)\,\mathrm{Sn}\,(124)\,\mathrm{cs}\,(23) + \\ &+ 2\,\mathrm{Sn}\,(124)\,\mathrm{Sn}\,(423)\,\mathrm{cs}\,(31)\end{aligned}\right\} (14)$$

Наконец из первого равенства (13a) и равенств (13c) выводим

$$\begin{vmatrix}\mathrm{cs}\,(45) & \mathrm{cs}\,(15) & \mathrm{cs}\,(25) & \mathrm{cs}\,(35)\\ \mathrm{cs}\,(41) & 1 & \mathrm{cs}\,(21) & \mathrm{cs}\,(31)\\ \mathrm{cs}\,(42) & \mathrm{cs}\,(12) & 1 & \mathrm{cs}\,(32)\\ \mathrm{cs}\,(43) & \mathrm{cs}\,(13) & \mathrm{cs}\,(23) & 1\end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

Это чрезвычайно важное соотношение, необходимо существующее между 5 произвольными прямыми в пространстве, в случае 4 прямых (т. е. если совместим прямые 4 и 5) переходит в следующее:

$$\begin{vmatrix}1 & \mathrm{cs}\,(14) & \mathrm{cs}\,(24) & \mathrm{cs}\,(34)\\ \mathrm{cs}\,(41) & 1 & \mathrm{cs}\,(21) & \mathrm{cs}\,(31)\\ \mathrm{cs}\,(42) & \mathrm{cs}\,(12) & 1 & \mathrm{cs}\,(32)\\ \mathrm{cs}\,(43) & \mathrm{cs}\,(13) & \mathrm{cs}\,(23) & 1\end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

§ 6. Приведу в заключение некоторые выражения детерминантов синусовых функций.

На основании формул (13a) и (13b) можем написать:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(423) & \mathrm{Sn}(143) & \mathrm{Sn}(124) \\ \mathrm{Sn}(523) & \mathrm{Sn}(153) & \mathrm{Sn}(125) \\ \mathrm{Sn}(623) & \mathrm{Sn}(163) & \mathrm{Sn}(126) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{cs}(14) & \mathrm{cs}(24) & \mathrm{cs}(34) \\ \mathrm{cs}(15) & \mathrm{cs}(25) & \mathrm{cs}(35) \\ \mathrm{cs}(16) & \mathrm{cs}(26) & \mathrm{cs}(36) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(123) & \mathrm{Sn}(123)\mathrm{cs}(45)\mathrm{Sn}(123) & \mathrm{cs}(46) \\ \mathrm{Sn}(123)\mathrm{cs}(54)\mathrm{Sn}(123) & & \mathrm{Sn}(123)\,\mathrm{cs}(56) \\ \mathrm{Sn}(123)\mathrm{cs}(64)\mathrm{Sn}(123)\mathrm{cs}(65)\mathrm{Sn}(123) & & \end{vmatrix} = \mathrm{Sn}^3(123)^3\mathrm{Sn}^2(456)$$

а отсюда, принимая во внимание формулу (6), найдем

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(423) & \mathrm{Sn}(143) & \mathrm{Sn}(124) \\ \mathrm{Sn}(523) & \mathrm{Sn}(153) & \mathrm{Sn}(125) \\ \mathrm{Sn}(623) & \mathrm{Sn}(163) & \mathrm{Sn}(126) \end{vmatrix} = \mathrm{Sn}^2(123)\,\mathrm{Sn}(456) \tag{17}$$

Из этого равенства, совмещая последовательно прямую 4 с прямыми 1, 2 и 3, выведем следующие:

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(153) & \mathrm{Sn}(125) \\ \mathrm{Sn}(163) & \mathrm{Sn}(126) \end{vmatrix} &= \mathrm{Sn}(123)\,\mathrm{Sn}(156) \\ \begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(125) & \mathrm{Sn}(523) \\ \mathrm{Sn}(126) & \mathrm{Sn}(623) \end{vmatrix} &= \mathrm{Sn}(123)\,\mathrm{Sn}(256) \\ \begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(523) & \mathrm{Sn}(153) \\ \mathrm{Sn}(623) & \mathrm{Sn}(163) \end{vmatrix} &= \mathrm{Sn}(123)\,\mathrm{Sn}(356) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 7. Аналитическая геометрия изучает фигуры при помощи вычисления или алгебраического анализа.

На каждую фигуру мы можем смотреть как на совокупность, конечную или бесконечную, геометрических точек, а потому в основе аналитической геометрии находится задача — определить характер тех величин, которыми опреде-

ляется пространственное положение точек и которые называются координатами?

Наше пространственное представление говорит нам о трех измерениях, т. е. о трех независимых точках зрения, с которых мы можем видеть каждую данную точку, а следовательно и их совокупность, т. е. данную фигуру. Поэтому, какой бы характер мы ни придали координатам, для определения положения точки необходимо иметь по крайней мере три определенные значения для их величин. Каждая из этих величин как определяющих пространственное положение данной точки необходимо связана в нашем представлении с определенным геометрическим построением. Но так как таких построений можно представить себе неопределенное множество, то возможно такое же неопределенное множество координат всякой данной точки.

Если из представленных нами многих отдельных построений, обусловливающих величины координат, три вполне определяют положение данной точки, то координаты, выводимые из всех других построений, будут иметь уже величины, связанные с тремя первыми величинами, или, говоря языком алгебраического анализа: приняв три координаты, вполне определяющие положение данной точки, за переменные независимые, в остальных координатах мы будем иметь функции этих переменных. Первые три координаты я буду называть *независимыми*, а остальные — *зависимыми*. Совокупность координат, связанная определенным родом геометрического построения, называется *системой координат*.

При решении вопросов аналитической геометрии существенную роль играет удачный выбор системы координат вообще, а независимых координат в особенности. Те же задачи, которые при одной системе координат решаются весьма просто, оказываются сложными при выборе другой системы координат.

Есть задачи (например относящиеся к симметрии фигур), при которых теоретически немыслимо некоторым координа-

там отдать предпочтение пред некоторыми другими; в общем случае, при решении задач, даже относящихся к одной и той же фигуре, для упрощения решения весьма полезно брать за независимые те или другие координаты, смотря по характеру задачи. Поэтому весьма удобно иметь всегда в распоряжении больше, чем необходимые три координаты, с тем, чтобы из имеющегося числа выбрать в каждом данном случае те, которые в этом случае приведут к простейшему решению задачи.

Так как, в общем случае, за независимые мы можем принять какие-нибудь три из имеющихся в нашем распоряжении n координат, то значит для каждой из последних определяющее координату геометрическое построение должно быть независимо от других координат. Зависимое же друг от друга построение трех координат, принятых за независимые, как это делает современная аналитическая геометрия, может быть допущено лишь в том случае, если мы наперед убедились, что три избранные нами координаты, и только они, а не какие-нибудь другие, и притом только при таком зависимом геометрическом построении дадут простейшее решение предлежащей задачи. Это относится, значит, к задачам особого рода, имеющим специальные цели. В противном случае это означало бы произвольное, ничем не мотивированное, усложнение в приемах для решения данной задачи.

Такие задачи встречаются, например, в кристаллографии и находятся в связи с особым видом проективности, связывающей фигуры, изучаемые этой наукой, — проективности, названной мною кристаллографической. Поэтому косоугольные координаты современной аналитической геометрии я назову *сложными*.

Простейшею для решения большинства вопросов аналитической геометрии вообще, а элементарной геометрии, ограничивающейся изучением линейных соотношений фигур, безусловно, является система *прямолинейных* координат.

Связанное с нею геометрическое построение определяется следующим образом: в пространстве принимается постоянная точка, называемая началом или центром координат этой системы; через нее проводится n прямых, называемых осями координат. Для определения величины координат данной точки через последнюю проводится n плоскостей, перпендикулярных [1]) ко всем осям координат: величины отрезков на этих осях, считаемые от начала и притом в определенном для каждой оси направлении, и будут величины координат данной точки.

Если за *независимые* координаты мы примем те, которые относятся к трем *взаимноперпендикулярным* осям координат, то система таких независимых координат называется системою *прямоугольных* координат; в противном случае координаты будут косоугольными.

§ 8. В дальнейшем изложении три прямоугольные координаты я буду означать (x_0, x_1, x_2), а всякие другие координаты через y_i, где i какое угодно положительное целое число, начиная с 3; y_0, y_1 и y_2 будут означать те из координат y_i, которые в каждом данном случае мы выбираем за независимые.

Нормали к плоскостям $(y_1 y_2)$, $(y_2 y_0)$ и $(y_0 y_1)$ я означаю соответственно через n_0, n_1 и n_2. Относительно направления этих нормалей замечу, что если представим себя поместившимися внутри тригоноэдра $(y_0, y_1\ y_2)$ ногами к его вершине и головою в сторону отверстия и если при этом последовательность положительных направлений осей (y_0, y_1, y_2) будет соответствовать движению часовой стрелки (или обратно), то и за направление какой-нибудь нормали нужно принять то, став по которому на данной плоскости так, чтобы это направление шло от ног до головы, мы увидим на этой плоскости ту же последовательность двух из находящихся на ней осей.

---

[1]) См. заключительную заметку.

Ввиду особенного значения детерминанта (формула 7):

$$\mathrm{Sn}^2(y_0y_1y_2)=\begin{vmatrix}1 & \mathrm{cs}(y_0y_1) & \mathrm{cs}(y_0y_2)\\ \mathrm{cs}(y_1y_0) & 1 & \mathrm{cs}(y_1y_2)\\ \mathrm{cs}(y_2y_0) & \mathrm{cs}(y_2y_1) & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathrm{cs}(y_0y_0) & \mathrm{cs}(y_0y_1) & \mathrm{cs}(y_0y_2)\\ \mathrm{cs}(y_1y_0) & \mathrm{cs}(y_1y_1) & \mathrm{cs}(y_1y_2)\\ \mathrm{cs}(y_2y_0) & \mathrm{cs}(y_2y_1) & \mathrm{cs}(y_2y_2)\end{vmatrix}$$

я буду, ради краткости, означать его через Δ^2; какой-нибудь его член $\mathrm{cs}(y_iy_k)$ — через c_{ik}, а дополнительный этому члену субдетерминант через C_{ik}. Также вместо $\mathrm{sn}(y_iy_k)$ я для краткости буду писать s_{ik}.

На основании формулы (9) имеем:

$$C_{ik}=\begin{vmatrix}c_{i+1,k+1} & c_{i+1,k+1}\\ c_{i+2,k+2} & c_{i+2,k+2}\end{vmatrix}=s_{i+1,i+2}\,s_{k+1,k+2}\,\mathrm{cs}(n_in_k),\qquad (I)$$

Но так как по формуле (10а):

$$s_{i+1,i+2}\,\mathrm{cs}(n_in_k)=\mathrm{Sn}(n_ky_{i+1}y_{i+2})$$

и

$$s_{k+1,k+2}\,\mathrm{cs}(n_in_k)=\mathrm{Sn}(n_iy_{k+1}y_{k+2})$$

то

$$C_{ik}=\mathrm{Sn}(n_ky_{i+1}y_{i+2})\,s_{k+1,k+2}=\mathrm{Sn}(n_iy_{k+1}y_{k\pm2})\,s_{i+1,i+2}\qquad (Ia)$$

При $i=k$ прямая n будет перпендикулярна к обеим осям, и потому

$$C_{ii}=s_{i+1,i+2}\,\mathrm{cs}(n_in_i)\,s_{i+1,i+2}=s^2_{i+1,i+2}\qquad (Ib)$$

При $k=i+1$ прямая n будет перпендикулярна только к одной из осей, и если означим через $n^{(k)}_{k+1}$ нормаль к оси y_{k+1}, проведенную в плоскости $(y_{k+1}y_{k+2})$, то

$$\mathrm{Sn}(n_{i+1}y_{i+1}y_{i+2})=\mathrm{sn}(y_{i+2}n_{i+1})\,\mathrm{cs}(y_{i+1}\,n^{i+1}_{(i+2)})$$

а приняв во внимание, что $(y_{i+2}n_{i+1})=1$, найдем

$$C_{i,i+1}=s_{i+2,i}\,\mathrm{cs}(y_{i+1}n^{(i+1)}_{i+2})=s_{i+1,i+2}\,\mathrm{cs}(y_in^{(i)}_{i+0})\qquad (Ic)$$

На основании этих формул легко определим величины субдетерминантов, а именно:

$$\left.\begin{aligned}
C_{00} &= \mathrm{Sn}\,(n_0 y_1 y_2)\,\mathrm{sn}\,(y_1 y_2) = \mathrm{sn}^2\,(y_1 y_2)\\
C_{11} &= \mathrm{Sn}\,(y_0 n_1 y_2)\,\mathrm{sn}(y_2 y_0) = \mathrm{sn}^2\,(y_2 y_0)\\
C_{22} &= \mathrm{Sn}\,(y_0 y_1 n_2)\,\mathrm{sn}(y_0 y_1) = \mathrm{sn}^2\,(y_0 y_1)\\
C_{01} = C_{10} &= \mathrm{Sn}\,(n_1 y_1 y_2)\,\mathrm{sn}\,(y_2 y_0) = \mathrm{Sn}\,(y_0 n_0 y_2)\,\mathrm{sn}\,(y_1 y_2) =\\
&= \mathrm{sn}\,(y_2 y_0)\,\mathrm{cs}\,(y_1 n_2^{(1)}) = \mathrm{sn}\,(y_1 y_2)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_2^{(0)})\\
C_{12} = C_{21} &= \mathrm{Sn}\,(y_0 n_2 y_2)\,\mathrm{sn}\,(y_0 y_1) = \mathrm{Sn}\,(y_0 y_1 n_1)\,\mathrm{sn}\,(y_2 y_0) =\\
&= \mathrm{sn}\,(y_0 y_2)\,\mathrm{cs}\,(y_2 n_0^{(2)}) = \mathrm{sn}\,(y_2 y_0)\,\mathrm{cs}\,(y_1 n_0^{(1)})\\
C_{20} = C_{02} &= \mathrm{Sn}(y_0 y_1 n_0)\,\mathrm{sn}\,(y_1 y_2) = \mathrm{Sn}\,(n_2 y_1 y_2)\mathrm{sn}(y_0 y_1) =\\
&\ \mathrm{sn}\,(y_1 y_2)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_1^{(0)}) = \mathrm{sn}\,(y_0 y_1)\,\mathrm{cs}\,(y_2 n_1^{(2)})
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{Id})$$

В случае прямоугольности осей $(y_0 y_1 y_2)$ найдем:

$\Delta = 1$, $C_{00} = C_{11} = C_{22} = 1$ и $C_{01} = C_{10} = C_{12} = C_{21} = C_{20} = C_{02} = 0$ (Ie)

Относительно направления нормали $n_{k+1}^{(k)}$ замечу, что оно обусловливается последовательностью (в плоскости осей y_{k+1} и y_{k+2}) положительных направлений $y_{k+2}, y_{k+1}, n_{k+1}^{(k)}$.

Так как $\Delta^2 = \sum\limits_{i=0}^{2} c_{i,k} C_{i,k}$, то подставляя вместо $C_{i,k}$ различные их выражения из формул (I), мы придем к новым выражениям детерминанта Δ^2, например из формул (Id) непосредственно выводим:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^2 = \mathrm{Sn}^2(y_0 y_1 y_2) = \mathrm{sn}^2(y_1 y_2) + \mathrm{cs}(y_0 y_1)\mathrm{sn}(y_1 y_2)\mathrm{cs}(y_0 n_2^{(0)}) +\\
+ \mathrm{cs}(y_2 y_0)\,\mathrm{sn}\,(y_1 y_2)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_1^{(0)} = \mathrm{sn}\,(y_1 y_2)\,[\mathrm{sn}\,(y_1 y_2) + \mathrm{cs}\,(y_0 y_1)\\
\mathrm{cs}\,(y_0 n_2^{(0)}) + \mathrm{cs}\,(y_2 y_0)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_1^{(0)})]
\end{aligned}\right\}(\mathrm{II})$$

Сократив же обе части равенства на множитель $\mathrm{sn}\,(y_1 y_2)$, найдем:

$$\mathrm{Sn}\,(y_0 y_1 y_2)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_0) = \mathrm{sn}\,(y_1 y_2) + \mathrm{cs}\,(y_0 y_1)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_2^{(0)}) + \qquad (\mathrm{IIa})$$
$$+ \mathrm{cs}\,(y_2 y_0)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_1^{(0)})$$

По аналогии со сделанными обозначениями означу также

$$\mathrm{Sn}(n_0 n_1 n_2) = \Delta'; \ \mathrm{cs}(n_1 n_2) = c'_{12} \ldots$$

и вообще $\mathrm{cs}(n_i n_k)$ через c'_{ik} и $\mathrm{sn}(n_i n_k)$ через s'_{ik}. Ясно, что получим аналогичные с формулами (I) — (II) новые формулы, если внесем в первые вместо величин $(y_0 y_1 y_2)$ величины $(n_0 n_1 n_2)$ (и обратно), вместо $\Delta - \Delta'$, вместо $C_{ik} - C'_{ik}$, вместо $c_{ik} - c'_{ik}$ и вместо $s_{ik} - s'_{ik}$.

Для вычисления одних из этих величин, например отмеченных значками, из других, могут служить формулы (11) — (11b).

Уравнения точки

§ 9. Уравнениями точки называются такие, которые удовлетворяются для всех координат данной точки. Но так как величины всех этих координат для каждой данной точки совершенно определенные, то, значит, в случае, если мы возьмем n координат, уравнения точки в числе n составят систему с n неизвестными. Решая эту систему уравнений, найдем искомые величины всех координат данной точки.

В каждом данном случае для полного пространственного определения данной точки необходимо и достаточно иметь три прямолинейные координаты, а потому положение точки вполне определено, если даны три определенные значения каких-нибудь координат, например прямоугольных координат (x_0, x_1, x_2), т. е.

$$x_0 = a_0; \quad x_1 = a_1; \quad x_2 = a_2 \qquad (1)$$

Теперь выведем уравнения, дающие возможность вывести величины всех других координат, например по оси y_i.

Проектируя ломаную, соединяющую начало с данною точкою и состоящую из отрезков прямых, равных и параллельных ее прямоугольным координатам, на ось y_i, непосредственно получаем

$$y_i = x_0 \operatorname{cs}(x_0 y_i) + x_1 \operatorname{cs}(x_1 y_i) + x_2 \operatorname{cs}(x_2 y_i) = \sum_{k=0}^{2} x_k \operatorname{cs}(x_k y_i) \quad (2)$$

Придавая i значение каждого целого положительного числа, начиная от 3, мы получим $i-2$ уравнений той же точки, которые в совокупности с 3 уравнениями (1) составят систему из $i+1$ уравнений с $i+1$ координатами как систему уравнений данной точки.

Так мы можем выразить некоторые координаты или вообще все в трех каких-нибудь произвольно взятых координатах y_i, которые для этой цели мы означим через y_0, y_1 и y_2.

Из (2) находим:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 \operatorname{cs}(x_0 y_0) + x_1 \operatorname{cs}(x_1 y_0) + x_2 \operatorname{cs}(x_2 y_0) \\ y_1 &= x_0 \operatorname{cs}(x_0 y_1) + x_1 \operatorname{cs}(x_1 y_1) + x_2 \operatorname{cs}(x_2 y_1) \\ y_2 &= x_0 \operatorname{cs}(x_0 y_2) + x_1 \operatorname{cs}(x_1 y_2) + x_2 \operatorname{cs}(x_2 y_2) \end{aligned}$$

Решая эти уравнения по отношению к независимым координатам (x_0, x_1, x_2) и замечая, что детерминант этих уравнений есть $\Delta = \operatorname{Sn}(y_0 y_1 y_2)$, найдем

$$x_i \Delta = \begin{vmatrix} y_0 \operatorname{cs}(x_{i+1} y_0) & \operatorname{cs}(x_{i+2} y_0) \\ y_1 \operatorname{cs}(x_{i+1} y_1) & \operatorname{cs}(x_{i+2} y_1) \\ y_2 \operatorname{cs}(x_{i+1} y_2) & \operatorname{cs}(x_{i+2} y_2) \end{vmatrix}$$

Здесь субдетерминант дополнительный члену y_k; который мы временно означим через Y_k, найдется по формуле (9) главы I.

$$Y_k = \begin{vmatrix} \operatorname{cs}(x_{i+1} y_{k+1}) & \operatorname{cs}(x_{i+2} y_{k+1}) \\ \operatorname{cs}(x_{i+1} y_{k+2}) & \operatorname{cs}(x_{i+2} y_{k+2}) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sn}(x_{i+1} x_{i+2}) \operatorname{sn}(y_{k+1} y_{k+2}) \operatorname{cs}(x_i n_k)$$

Но $\operatorname{sn}(x_{i+1} x_{i+2}) = 1$, так как угол $(x_{i+1}\, x_{i+2})$ прямой, а

$$\operatorname{sn}(y_{k+1}\, y_{k+2}) \operatorname{cs}(x_i n_k) = \operatorname{Sn}(x_i y_{k+1} y_{k+2})$$

и следовательно

$$\left.\begin{aligned} x_0\Delta &= y_0 \operatorname{Sn}(x_0y_1y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0x_0y_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0y_1x_0) \\ x_1\Delta &= y_0 \operatorname{Sn}(x_1y_1y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0x_1y_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0y_1x_1) \\ x_2\Delta &= y_0 \operatorname{Sn}(x_2y_1y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0x_2y_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0y_1x_2) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

что можно выразить сокращенно

$$x_i\Delta = \sum_{k=0}^{2} y_k \operatorname{Sn}(x_iy_{k+1}y_{k+2}) \quad (3a)$$

Если взглянуть на уравнения (3) как на уравнения преобразования координат, выражающие замену трех бывших независимых прямоугольных координат (x_0, x_1, x_2) тремя косоугольными независимыми координатами (y_0, y_1, y_2), то ясно, что каждое из этих уравнений в отдельности выразит какую-нибудь зависимую координату x_i той же точки, а потому вместо x_i в этом уравнении мы можем подставить произвольную зависимую координату y_i.

Это, впрочем, нетрудно доказать и непосредственно. Для этого стоит только в общее выражение какой-нибудь координаты (2) внести величины (x_0, x_1, x_2) из уравнений (3).

Находим:

$$y_i\Delta = \sum_{k=0}^{2} y_k \operatorname{Sn}(x_0y_{k+1}y_{k+2}) \operatorname{cs}(x_0y_i) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2} y_k \operatorname{Sn}(x_1y_{k+1}y_{k+2}) \operatorname{cs}(x_1y_i) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2} y_k \operatorname{Sn}(x_2y_{k+1}y_{k+2}) \operatorname{cs}(x_2y_i) =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{2} y_k \operatorname{Sn}(x_ly_{k+1}y_{k+2}) \operatorname{cs}(x_ly_i)$$

Но

$$\operatorname{Sn}(x_ly_{k+1}y_{k+2}) = \operatorname{sn}(y_{k+1}y_{k+2}) \operatorname{cs}(x_ln_k)$$

$$\sum_{l=0}^{2} \operatorname{cs}(x_l n_k) \operatorname{cs}(x_l y_i) = \operatorname{cs}(n_k y_i)$$

и, наконец,

$$\operatorname{sn}(y_{k+1} y_{k+2}) \operatorname{cs}(n_k y_i) = \operatorname{Sn}(y_i y_{k+1} y_{k+2})$$

а потому

$$y_i \Delta = \sum_{k=0}^{2} y_k \operatorname{Sn}(y_i\, y_{k+1}\, y_{k+2}) \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Если бы избранные для выражения некоторых координат зависимые координаты (y_0, y_1, y_2) были бы тоже прямоугольные, то, так как в таком случае $\operatorname{Sn}(y_0 y_1 y_2) = \Delta = 1$ и $\operatorname{Sn}(y_i y_{k+1} y_{k+2}) = \operatorname{sn}(y_{k+1\,k+2}) \operatorname{cs}(y_i n_k) = \operatorname{cs}(y_i n_k)$, формула (4) приняла бы вид, одинаковый с формулой (2).

§ 10. Если величины независимых прямоугольных координат данной точки не известны, то система 3-х уравнений (1) пропадает и для определения положения точки нужны какие-нибудь новые три данные. Пусть, например, точка находится на одной из осей y_l и в расстоянии от начала, равном l. Так как углы между всеми осями координат предполагаются известными, то для решения всей системы уравнений получаем три данные:

$$y_i = l; \quad x_0 = l \operatorname{cs}(y_i x_0); \quad x_1 = l \operatorname{cs}(y_i x_1); \quad x_2 = l \operatorname{cs}(y_i x_2)$$

Здесь первое уравнение только замещает одно из уравнений (2).

Если данная точка не находится ни на одной из осей, но известны ее расстояние от начала и углы, образуемые проведенною через нее центральною прямою с какими-нибудь двумя осями координат y_i и y_k, то, приняв центральную прямую за новую ось координат y_l, найдем:

$$y_l = l; \quad y_i = l \operatorname{cs}(y_l y_i); \quad y_k = l \operatorname{cs}(y_l y_k)$$

Число координат теперь увеличилось на единицу, а потому этих данных недостаточно. Для получения необходимой данной мы должны воспользоваться формулой (16), которая при принятых нами обозначениях принимает вид

$$\Delta^2 - \sum_{ki=1}^{2} C_{ki} \operatorname{cs}(y_k y) \operatorname{cs}(y_i y_l) = 0$$

т. е.

$$\Delta^2 = C_{00} \operatorname{cs}^2(y_0 y_l) + C_{11} \operatorname{cs}^2(y_1 y_l) + C_{22} \operatorname{cs}_2(y_2 y_l) +$$
$$+ 2 C_{01} \operatorname{cs}(y_0 y) y_1 y_l + 2C_{12} \operatorname{cs}(y_1 y_l) \operatorname{cs}(y_2 y_l) +$$
$$+ 2C_{20} \operatorname{cs}(y_2 y_l) \operatorname{cs}(y_0 y_l)$$

Так как это уравнение 2-й степени по отношению к неизвестной cs $(y_2 y_l)$, то и решение двоякое; другими словами, приведенных трех данных недостаточно для полного определения положения точки, и кроме углов прямой y_l с прямыми $y_i y_k$ необходимо еще обусловить, в какой стороне от плоскости $(y_i y_k)$ находится данная точка. Тогда, сообразно с заданным условием, мы выбираем одно из решений cs$(y_l y_2)$, и система уравнений, определяющих положение данной точки, составлена.

Уравнения прямой

§ 11. Уравнениями прямой называются такие, которые удовлетворяются для координат всех точек этой прямой, и притом только для этих координат.

Если данная центральная [1]) прямая представляет одну из осей координат, например y_i, то ясно, что величина y_i становится неопределенной, т. е. одно из уравнений какой-нибудь точки этой прямой теряет определенный смысл. Напротив того, если только придадим этой величине определенное значение, то получаем систему i уравнений с

[1]) Т. е. проходящая через начало координат.

неизвестными, из которой выводим определенные значения для всех i координат некоторой точки, находящейся на этой прямой. Таким образом аналитически прямая определяется системою $i-1$ уравнений между i координатами.

Если данная прямая не есть ось координат, то ее можно принять за таковую, чем увеличим как число уравнений, так и число координат на единицу.

Ограничимся для вывода минимальным числом уравнений и координат.

Пусть координаты какой-нибудь точки данной прямой (d) будут

$$y_0=B_0;\quad y_1=B_1;\quad y_2=B_2 \tag{a}$$

В таком случае координата той же точки на самой прямой, принятой за ось координат, будет d и найдется из формулы (4).

$$\operatorname{Sn} d\,(y_0y_1y_2)=y_0\operatorname{Sn}(dy_1y_2)+y_1\operatorname{Sn}(y_0dy_2)+y_2\operatorname{Sn}(y_0y_1d) \tag{b}$$

Эти четыре уравнения связывают четыре координаты некоторой точки данной прямой; чтобы отсюда перейти к уравнениям самой прямой, нужно принять координату d за неопределенную величину. Уравнение (b) не может удовлетвориться определенными значениями (y_0, y_1, y_2), а если принять во внимание, что по формуле (13b) главы I

$$\operatorname{Sn}(y_0y_1y_2)=\operatorname{Sn}(dy_1y_2)\operatorname{cs}(dy_0)+$$
$$+\operatorname{Sn}(y_0dy_2)\operatorname{cs}(dy_1)+\operatorname{Sn}(y_0y_1d)\operatorname{cs}(dy_2)$$

то ясно, что для того, чтобы величины (y_0, y_1, y_2) удовлетворяли уравнению (b), они должны быть пропорциональны величинам $\operatorname{cs}(dy_0)$, $\operatorname{cs}(dy_1)$ и $\operatorname{cs}(dy_2)$, т. е.

$$\frac{y_0}{\operatorname{cs}(dy_0)}=\frac{y_1}{\operatorname{cs}(dy_1)}=\frac{y_2}{\operatorname{cs}(dy_2)}=\frac{y_i}{\operatorname{cs}(dy_i)} \tag{5}$$

Последнее я пишу потому, что координаты $(y_0, y_1 y_2)$ взяты совершенно произвольно.

Нетрудно убедиться в справедливости этих уравнений и непосредственно, так как каждое из отношений (5) выражает расстояние некоторой точки данной прямой от начала.

Но по формуле (a)

$$\frac{B_0}{cs\,(dy_0)} = \frac{B_1}{cs(dy_1)} = \frac{B_2}{cs\,(dy_2)}$$

и, значит, если B_0, B_1, B_2, B_i означают координаты какой-нибудь определенной в каждом данном случае точки прямой, то также

$$\frac{y_0}{B_0} = \frac{y_1}{B_1} = \frac{y_2}{B_2} = \frac{y_i}{B_i} \qquad (5a)$$

Уравнения (5) не изменяются в случае прямоугольности осей.

Чтобы вывести из них уравнения самих осей, нужно совместить прямую (d) с одною из осей координат, и мы получаем:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для оси } y_0 & y_0 = \dfrac{y_1}{cs\,(y_0 y_1)} = \dfrac{y_2}{cs\,(y_2 y_0)} \\[2ex] \text{для оси } y_1 & \dfrac{y_0}{cs\,(y_0 y_1)} = y_1 = \dfrac{y_2}{cs\,(y_1 y_2)} \\[2ex] \text{для оси } y_2 & \dfrac{y_0}{cs\,(y_2 y_0)} = \dfrac{y_1}{cs\,(y_1 y_2)} = y_2 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Если данная прямая образует прямой угол с одной из осей координат, например с осью y_0, то отношение $\frac{y_0}{cs\,(dy_0)}$ становится бесконечным для всех конечных значений y_0, и потому эту координату нужно принять равною нулю, и в таком случае отношение становится неопределенным и устраняется из системы уравнений (5). Но $y_0 = 0$ выражает все точки, координаты коих на оси y_0 равны нулю, т. е.

плоскость, перпендикулярную к оси y_0. Отсюда найдем, что уравнения

$$y_0 = 0; \quad y_1 = 0 \tag{7}$$

выражают прямую, перпендикулярную к плоскости осей (y_0, y_1).

Уравнения плоскости

§ 12. Уравнениями плоскости называются такие, которые удовлетворяются для координат всех точек этой плоскости и притом только для этих координат.

Если данная плоскость (p) перпендикулярна к некоторой прямой (P), то ясно, что координаты всех ее точек на этой прямой, принятой за ось координат, будут одни и те же, и притом они будут выражать расстояние этой плоскости от начала. Но координаты точек на прямой (P), принятой за ось, выражаются уравнением:

$$P\Delta = y_0 \operatorname{sn}(Py_1y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0Py_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0y_1P) = h \tag{8}$$

которое, следовательно, и будет одним из уравнений плоскости. Вводя последовательно новые координаты y_i, мы вместе вводим столько же новых уравнений той же плоскости, а потому вообще число уравнений, выражающих плоскость, будет двумя меньше, чем число координат.

В случае центральной плоскости $P = 0$, а следовательно и $h = 0$, т. е.

$$y_0 \operatorname{Sn}(Py_1y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0Py_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0y_1P) = 0 \tag{8a}$$

В случае, если координаты y_0, y_1, y_2 прямоугольны,

$$\Delta = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Sn}(Py_ky_{k+1}) = \operatorname{sn}(y_ky_{k+1}) \operatorname{cs}(Py_{k+2}) = \operatorname{cs}(Py_{k+2})$$

и потому уравнение (8) принимает вид

$$P = y_0 \operatorname{cs}(Py_0) + y_1 \operatorname{cs}(Py_1) + y_2 \operatorname{cs}(Py_2) = h \tag{9}$$

Если (p) есть плоскость координат ($y_1 y_2$), то углы (Py_1) и (Py_2) прямые, а потому уравнение (8a) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} & y_0 \operatorname{Sn}(n_0 y_1 y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0 n_0 y_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0 y_1 n_0) = \\ & = y_0 \operatorname{sn}(y_1 y_2) + y_1 \operatorname{cs}(y_0 n_2^{(0)}) + y_2 \operatorname{cs}(y_0 n_1^{(0)}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Так же найдем для плоскости ($y_2 y_0$)

$$y_0 \operatorname{cs}(y_1 n_2^{(1)}) + y_1 \operatorname{sn}(y_2 y_0) + y_2 \operatorname{cs}(y_1 n_0^{(1)}) = 0$$

и для плоскости ($y_0 y_1$)

$$y_0 \operatorname{cs}(y_2 n_1^{(2)}) + y_1 \operatorname{cs}(y_2 n_0^{(2)}) + y_2 \operatorname{sn}(y_0 y_1) = 0 \qquad (10')$$

Уравнения

$$y_0 = 0; \quad y_1 = 0; \quad y_2 = 0 \qquad (11)$$

очевидно выражают плоскости, соответственно перпендикулярные к осям координат y_0, y_1 и y_2.

Коэффициент при одной из переменных, например при y_0, пропадает, если $\operatorname{Sn}(Py_1 y_2) = 0$, а это условие означает, что нормаль (P) к данной плоскости (p) находится в одной плоскости с осями y_1 и y_2, и значит, что сама плоскость (p) перпендикулярна к плоскости осей ($y_1 y_2$), и потому уравнения

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 = 0; \quad A_0 y_0 + A_2 y_2 = 0; \quad A_0 y_0 + A_1 y_1 = 0 \quad (12)$$

выражают плоскости, соответственно перпендикулярные к плоскостям осей ($y_1 y_2$), ($y_2 y_0$) и ($y_0 y_1$).

Если плоскость (p) проходит через точку (b), координаты которой на осях ($y_0 y_1 y_2$) — ($b_0 b_1 b_2$), а на оси (P) величина P, то

$$P\Delta = b_0 \operatorname{Sn}(Py_1 y_2) + b_1 \operatorname{Sn}(y_0 P y_2) + b_2 \operatorname{Sn}(y_0 y_1 P) = h \quad (13)$$

Вычитая это равенство из (8), находим

$$\begin{aligned} & (y_0 - b_0) \operatorname{Sn}(Py_1 y_2) + (y_1 - b_1) \operatorname{Sn}(y_0 P y_2) + \\ & + (y_2 - b_2) \operatorname{Sn}(y_0 y_1 P) = 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

Из (13) легко находится расстояние P данной плоскости (p) от начала, если известны координаты одной из ее точек (b).

Если означим отрезки, отсекаемые данною плоскостью (p) на прямых, перпендикулярных к плоскостям осей $(y_1 y_2)$, $(y_2 y_0)$ и $(y_0 y_1)$, через a_0, a_1 и a_2, то по (7) имеем,

$$P\Delta = a_0 \operatorname{Sn}(Py_1 y_2) = a_1 \operatorname{Sn}(y_0 P y_2) = a_2 \operatorname{Sn}(y_0 y_1 P)$$

а потому, разделяя члены уравнения (8) на три равные величины, найдем

$$\frac{y_0}{a_0} + \frac{y_1}{a_1} + \frac{y_2}{a_2} = 1 \tag{15}$$

Если означим отрезки, отсекаемые данной плоскостью (p) на осях (y_0, y_1, y_2) через (c_0, c_1, c_2), то по формуле (8) и (6) найдем для c_0:

$$P\Delta = c_0 [\operatorname{Sn}(Py_1 y_2) + \operatorname{Sn}(y_0 P y_2) \operatorname{cs}(y_0 y_1) + \operatorname{Sn}(y_0 y_1 P) \operatorname{cs}(y_0 y_2)] = h$$

Выражение, стоящее здесь в скобках, равно [формула (13 с) гл. I] $\operatorname{Sn}(y_0 y_1 y_2) \operatorname{cs}(Py_0)$, и, значит,

$$P = c_0 \operatorname{cs}(Py_0)$$

и вообще

$$P = c_0 \operatorname{cs}(Py_0) = c_1 \operatorname{cs}(Py_1) = c_2 \operatorname{cs}(Py_2) \tag{16}$$

и, разделяя члены уравнения (8) на эти равные величины, получим

$$\Delta = y_0 \frac{\operatorname{sn}(Py_1 y_2)}{c_0 \operatorname{cs}(Py_0)} + y_1 \frac{\operatorname{sn}(y_0 P y_2)}{c_1 \operatorname{cs}(Py_1)} + y_2 \frac{\operatorname{sn}(y_0 y_1 P)}{c_2 \operatorname{cs}(Py_2)} \tag{17}$$

В случае прямоугольности осей это уравнение становится тождественным с (15).

Координаты точек, удовлетворяющих уравнениям двух плоскостей, (p) и (p'), удовлетворяют и уравнениям прямой (d) их пересечения, а потому уравнения

$$y_0 \operatorname{Sn}(Py_1 y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0 P y_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0 y_1 P) = 0$$

и

$$y_0 \operatorname{Sn}(P' y_1 y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0 P' y_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0 y_1 P') = 0$$

определяют уравнения прямой (d) пересечения плоскостей (P) и (P').

Из этих уравнений непосредственно выводим

$$y_0 : y_1 : y_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(y_0Py_2) & \mathrm{Sn}(y_0y_1P) \\ \mathrm{Sn}(y_0P'y_2) & \mathrm{Sn}(y_0y_1P') \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(y_0y_1P) & \mathrm{Sn}(Py_1y_2) \\ \mathrm{Sn}(y_0y_1P') & \mathrm{Sn}(P'y_1y_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mathrm{Sn}\,Py_1y_2) & \mathrm{Sn}(y_0Py_2) \\ \mathrm{Sn}(P'y_1y_2) & \mathrm{Sn}(y_0P'y_2) \end{vmatrix},$$

а принимая во внимание равенство [формула (18) гл. I]

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Sn}(y_0Py_2) & \mathrm{Sn}(y_0y_1P) \\ \mathrm{Sn}(y_0P'y_2) & \mathrm{Sn}(y_0y_1P) \end{vmatrix} = \mathrm{Sn}(y_0y_1y_2)\,\mathrm{Sn}(y_0PP') \ldots$$

также равенства

$$\mathrm{Sn}(y_0PP') = \mathrm{sn}(PP')\,\mathrm{cs}(dy_0) \ldots$$

и сокращая на общие множители $\mathrm{Sn}(y_0y_1y_2)$ и $\mathrm{sn}(PP')$, получаем окончательно

$$\frac{y_0}{\mathrm{cs}(dy_0)} = \frac{y_1}{\mathrm{cs}(dy_1)} = \frac{y_2}{\mathrm{cs}(dy_2)}$$

уравнение, тождественное с уравнением (5).

Перемещение координат

§ 13. Перемещением координат называется такое изменение положения осей координат, которое является как бы результатом поступательного движения, и, значит, все составные части системы сохраняют строгую параллельность.

Ясно, что если вследствие перемещения координат начало их заняло положение точки, имевшей раньше на осях (y_0, y_1, y_2) координаты (b_0, b_1, b_2), то новые координаты той же точки (y'_0, y'_1, y'_2) на тех же осях будут

$$y'_0 = y_0 - b_0; \quad y'_1 = y_1 - b_1; \quad y'_2 = y_2 - b_2 \qquad (18)$$

Если точка (b) находится на оси (y_0), т. е. если перемещение системы координат происходит вдоль этой оси, то, так как по формуле (6) координаты на осях (y_0, y_1, y_2) будут:

$$b_0;\quad b_0 \operatorname{cs}(y_0 y_1);\quad b_0 \operatorname{cs}(y_0 y_2)$$

то уравнения перемещения по оси y_0 будут:

$$y_0' = y_0 - b_0;\quad y_1' = y_1 - b_0 \operatorname{cs}(y_0 y_1);\quad y_2' = y_2 - b_0 \operatorname{cs}(y_0 y_2)$$

Также для перемещения по оси y_1 найдем:

$$y_0' = y_0 - b_1 \operatorname{cs}(y_0 y_1);\quad y_1' = y_1 - b_1;$$
$$y_2' = y_2 - b_1 \operatorname{cs}(y_1 y_2) \qquad (19)$$

и для оси y_2

$$y_0' = y_0 - b_2 \operatorname{cs}(y_0 y_2);\quad y_1' = y_1 - b_2 \operatorname{cs}(y_1 y_2);\quad y_2' = y_2 - b_2$$

Наконец, перемещения по прямым, перпендикулярным к плоскостям осей $(y_1 y_2)$, $(v_2 y_0)$ и $(y_0 y_1)$, выразятся уравнениями:

$$\left.\begin{array}{lll} y_0' = y_0 - b_0; & y_1' = y_1; & y_2' = y_2 \\ y_0' = y_0; & y_1' = y_1 - b_1; & y_2' = y_2 \\ y_0' = y_0; & y_1' = y_1; & y_2' = y_2 - b_2 \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Из формулы (18) следует, что прямая (d), проходящая через точку (b), выразится уравнениями:

$$\frac{y_0 - b_0}{\operatorname{cs}(dy_0)} = \frac{y_1 - b_1}{\operatorname{cs}(dy_1)} = \frac{y_2 - b_2}{\operatorname{cs}(dy_2)} = \frac{y_i - b_i}{\operatorname{cs}(dy_i)} \qquad (21)$$

Так же для плоскости выведем переход от уравнений (8) к уравнениям (14).

Уравнения прямой вида (21) неудобны в том отношении, что здесь (b_0, b_1, b_2), так же как и (y_0, y_1, y_2), неопределенно выражают произвольную точку прямой. Для большей определенности выразим эти уравнения в зависимости от координат точки пересечения прямой с центральной плоскостью,

перпендикулярною к одной из осей координат, например y_0. Означив эти координаты через $(0\ e_1,\ e_2)$ найдем:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{\mathrm{cs}\,(dy_1)}{\mathrm{cs}\,(dy_0)}\, y_0 + e_1 \\ y_2 &= \frac{\mathrm{cs}\,(dy_2)}{\mathrm{cs}\,(dy_0)}\, y_0 + e_2 \end{aligned}\right\} \qquad (21\mathrm{a})$$

Сложные координаты

§ 14. Из самого определения сложных координат следует, что они представляют отрезки на трех определенных осях (y_0, y_1, y_2), считаемые от начала в условленном направлении до пересечения с плоскостями, проведенными через точку $(y_0 y_1 y_2)$ параллельно плоскостям координат $(y_1 y_2)$, $(y_2 y_0)$ и $(y_0 y_1)$. Поэтому, означив эти координаты соответственно через Y_0, Y_1 и Y_2, из (6) и (10) выводим:

$$Y_0\ \mathrm{sn}\,(y_1 y_2) + b_1\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_2^{(0)}) + b_2\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_1^{(0)}) = y_0\,\mathrm{sn}\,(y_1 y_2) + \\ + y_1\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_2^{(0)}) + y_2\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_1^{(0)})$$

и

$$Y_0 = \frac{b_1}{\mathrm{cs}\,(y_0 y_1)} = \frac{b_2}{\mathrm{cs}\,(y_2 y_0)}$$

Исключая из этих трех уравнений величины b_1 и b_2, получим для первой части равенства выражение

$$Y_0\,[(\mathrm{sn}\,(y_1 y_2) + \mathrm{cs}\,(y_0 y_1)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_2^{(0)}) + \mathrm{cs}\,(y_2 y_0)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_1^{(0)})]$$

Трехчлен, стоящий здесь в скобках по формуле (IIa), равен

$$\mathrm{Sn}\,(y_0 y_1 y_2)\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_0)$$

а потому

$$Y_0 \Delta\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_0) = y_0\,\mathrm{sn}\,(y_1 y_2) + y_1\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_2^{(0)}) + y_2\,\mathrm{cs}\,(y_0 n_1^{(0)})$$

Так же найдем

$$Y_1 \Delta\,\mathrm{cs}\,(y_1 n_1) = y_0\,\mathrm{cs}\,(y_1 n_2^{(1)}) + y_1\,\mathrm{sn}\,(y_2 y_0) + y_2\,\mathrm{cs}\,(y_1 n_0^{(1)}) \qquad (22)$$

и

$$Y_2 \Delta\,\mathrm{cs}\,(y_2 n_2) = y_0\,\mathrm{cs}\,(y_2 n_1^{(2)}) + y_1\,\mathrm{cs}\,(y_2 n_0^{(2)}) + y_2\,\mathrm{sn}\,(y_0 y_1)$$

Для того, чтобы перейти от сложных координат к простым, мы можем решить эти уравнения по отношению к переменным (y_0, y_1, y_2), но таким образом мы получим выражение только для трех каких-нибудь координат. Чтобы заменить сложные координаты произвольными простыми координатами y_i, стоит лищь проектировать на эту ось ломаную, соединяющую начало с данною точкой и состоящую из сложных координат Y_0, Y_1, Y_2, и тогда прямо получаем:

$$y_i = Y_0 \operatorname{cs}(Y_0 y_i) + Y_1 \operatorname{cs}(Y_1 y_i) + Y_2 \operatorname{cs}(Y_2 y_i)$$

Угол плоскости с плоскостями координат

§ 15. Принято измерять этот угол углом между нормалями к плоскостям.

Если данная плоскость $A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 = 0$, то в силу соотношения

$$\frac{\operatorname{Sn}(P y_1 y_2)}{A_0} = \frac{\operatorname{Sn}(y_0 P y_2)}{A_1} = \frac{\operatorname{Sn}(y_0 y_1 P)}{A_2} = k_1$$

задача сводится к определению коэффициента k_1.

По формуле (14) главы I имеем:

$$\operatorname{Sn}^2(y_0 y_1 y_2) = \operatorname{Sn}^2(P y_1 y_2) + \operatorname{Sn}^2(y_0 P y_2) + \qquad (23)$$

$$+ \operatorname{Sn}^2(y_0 y_1 P) + 2\operatorname{Sn}(y_0 P y_2)$$

$$\operatorname{Sn}(y_0 y_1 P) \operatorname{cs}(y_1 y_2) + 2\operatorname{Sn}(y_0 y_1 P) \operatorname{Sn}(P y_1 y_2) \operatorname{cs}(y_2 y_0) +$$

$$+ \operatorname{Sn}(P y_1 y_2)$$

$$\operatorname{Sn}(y_0 P y_2) \operatorname{cs}(y_0 y_1)$$

Отсюда прямо находим:

$$k_1^2 = \frac{\Delta^2}{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2c_{12} + 2A_2A_0c_{22} + 2A_0A_1c_{01}} = \frac{\Delta^2}{A_2} \qquad (24)$$

В случае прямоугольности осей (y_0, y_1, y_2)

$$A^2 = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 \qquad (24a)$$

Поэтому

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{cs}(Pn_0) = \dfrac{\operatorname{Sn}(Py_1y_2)}{\operatorname{sn}(y_1y_2)} = \dfrac{A_0 \operatorname{Sn}(y_0y_1y_2)}{A \operatorname{sn}(y_1y_2)} = \dfrac{A_0}{A}\operatorname{cs}(y_0n_0) \\ \text{Так же найдем} \\ \operatorname{cs}(Pn_1) = \dfrac{A_1}{A}\operatorname{cs}(y_1n_1) \text{ и } \operatorname{cs}(Pn_2) = \dfrac{A_2}{A}\operatorname{cs}(y_2n_2)\end{array}\right\} \quad (25)$$

Угол прямой с осями координат

§ 16. Если данная прямая (d)

$$\frac{y_0}{B_0} = \frac{y_1}{B_1} = \frac{y_2}{B_2}$$

то в силу соотношений

$$\frac{\operatorname{cs}(dy_0)}{B_0} = \frac{\operatorname{cs}(dy_1)}{B_1} = \frac{\operatorname{cs}(dy_2)}{B_2} = \ldots = k_2 \quad \text{(a)}$$

задача сводится к отысканию коэффициента k_2.

По формуле (13b) главы 1 имеем

$$\operatorname{Sn}(y_0y_1y_2) = \operatorname{Sn}(dy_1y_2)\operatorname{cs}(dy_0) + \\ + \operatorname{Sn}(y_0dy_2)\operatorname{cs}(dy_1) + \operatorname{Sn}(y_0y_1d)\operatorname{cs}(dy_2). \quad \text{(b)}$$

Но (формула (6) главы I)

$$\operatorname{Sn}(dy_1y_2)\operatorname{Sn}(y_0y_1y_2) = k_2 \begin{vmatrix} B_0 & \operatorname{cs}(y_0y_1) & \operatorname{cs}(y_0y_2) \\ B_1 & \operatorname{cs}(y_1y_1) & \operatorname{cs}(y_1y_2) \\ B_2 & \operatorname{cs}(y_2y_1) & \operatorname{cs}(y_2y_2) \end{vmatrix} = \\ = k_2(B_0C_{00} + B_1C_{10} + B_2C_{20})$$

Так же

$$\operatorname{Sn}(y_0dy_2)\operatorname{Sn}(y_0y_1y_2) = k_2(B_0C_{10} + B_1C_{11} + B_2C_{12}) \quad \text{(c)}$$

и

$$\operatorname{Sn}(y_0y_1d)\operatorname{Sn}(y_0y_1y_2) = k_2(B_0C_{20} + B_1C_{21} + B_2C_{22})$$

Внеся в (b) выражения $\operatorname{Sn}(dy_1y_2)$... из (c) и $\operatorname{cs}(dy_0)$... из (a), найдем

$$\operatorname{Sn}^2(y_0y_1y_2) = k_2^2[B_0(B_0C_{00} + B_1C_{10} + B_2C_{20}) +$$
$$+ B_1(B_0C_{10} + B_1C_{11} + B_2C_{12}) + B_2(B_0C_{20} + B_1C_{21} + B_2C_{22})$$

или

$$k_2 = \frac{\Delta}{B}$$

где

$$B = \sqrt{B_0^2s_{12}^2 + B_1^2s_{20}^2 + B_2^2s_{01}^2 + 2B_1B_2s_{20}s_{01}c'_{12} + 2B_2B_0s_{01}s_{12}c'_{20} + 2B_0B_1s_{12}s_{20}c'_{01}} \tag{26}$$

В случае прямоугольности осей (y_0, y_1, y_2)

$$B = \sqrt{B_0^2 + B_1^2 + B_2^2} \tag{26a}$$

Угол прямой с плоскостью

§ 17. Пусть уравнения данных плоскости (p) и прямой (d)

$$A_0y_0 + A_1y_1 + A_2y_2 + A_3 = 0, \quad \frac{y_0}{B_0} = \frac{y_1}{B_1} = \frac{y_2}{B_2}$$

Угол между ними принято измерять углом прямой с нормалью к плоскости.

Мы имеем [формула (13а) гл. I]

$$\operatorname{Sn}(y_0y_1y_2)\operatorname{cs}(Pd) = \operatorname{Sn}(Py_1y_2)\operatorname{cs}(dy_0) + \operatorname{Sn}(y_0Py_2)\operatorname{cs}(dy_1) +$$
$$+ \operatorname{Sn}(y_0y_1P)\operatorname{cs}(dy_2) = k_1k_2(A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2)$$

а потому

$$\operatorname{cs}(Pd) = \frac{\Delta(A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2)}{AB} \tag{27}$$

В случае прямоугольности осей (y_0, y_1, y_2) $\Delta = 1$, а A и B определяются из (24а) и (26а).

Из формулы (27) непосредственно заключаем, что условие параллельности прямой (d) и плоскости (p)

$$A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 = 0 \tag{a}$$

Если той же плоскости (p) параллельна и другая прямая (d'), то имеем также

$$A_0B'_0 + A_1B'_1 + A_2B'_2 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Из (a) и (b) выводим

$$A_0 : A_1 : A_2 = (B_1B'_2 - B_2B'_1) : (B_2B'_0 - B_0B'_2) : (B_0B'_1 - B_1B'_0) \qquad \text{(27a)}$$

Плоскость, коэффициенты уравнения которой удовлетворяют равенству (27a), будет, следовательно, одновременно параллельна обеим данным прямым.

Перпендикулярность прямой к плоскости

§ 18. Пусть уравнения взаимно-перпендикулярных плоскости (p) и прямой (d)

$$A_0y_0 + A_1y_1 + A_2y_2 = 0\,, \quad \frac{y_0}{B_0} = \frac{y_1}{B_1} = \frac{y_2}{B_2}$$

Углы, образуемые данной прямой (d) с осями координат, определяются формулой $\mathrm{cs}\,(dy_i) = k_2B$.

Примем ее за ось координат. В таком случае по (4)

$$y_0\,\mathrm{Sn}\,(dy_1y_2) = d\,\mathrm{Sn}\,(y_0y_1y_2) + y_1\,\mathrm{Sn}\,(dy_0y_2) + y_2\,\mathrm{Sn}\,(dy_1y_0)$$

или

$$y_0k_2(B_0C_{00} + B_1C_{01} + B_2C_{02}) = d\Delta^2 -$$
$$- y_1k_2(B_0C_{10} + B_1C_{11} + B_2C_{12}) -$$
$$- y_2k_2(B_0C_{20} + B_1C_{21} + B_2C_{22})$$

Внеся это значение y_0 в уравнения плоскости (p) с целью выразить это уравнение в оси (d) вместо оси (y_0) и означив для краткости трехчлен первой части равенства через D, найдем:

$$d\frac{A_0\Delta^2}{Dk_2} + y_1\left(A_1 - \frac{A_0k_2(B_0C_{10} + B_1C_{11} + B_2C_{12})}{k_2D}\right) +$$
$$+ y_2\left(A_2 - \frac{A_0k_2(B_0C_{20} + B_1C_{21} + B_2C_{22})}{k_2D}\right) = 0$$

Если эта плоскость перпендикулярна к оси (d), то по (11) коэффициенты при y_1 и y_2 должны быть равны нулю, и, значит, искомое условие выразится

$$\frac{A_0}{D} = \frac{A_0}{B_0C_{00} + B_1C_{01} + B_2C_{02}} = \frac{A_1}{B_0C_{10} + B_1C_{11} + B_2C_{12}} =$$
$$= \frac{A_2}{B_0C_{20} + B_1C_{21} + B_1C_{22}} \quad (28)$$

где величины C_{ik} определяются по формуле (Id), а отсюда и обратно

$$\frac{B_0}{A_0c_{00} + A_1c_{01} + A_2c_{02}} = \frac{B_1}{A_0c_{10} + A_1c_{11} + A_2c_{12}} =$$
$$= \frac{B_2}{A_0c_{20} + A_1c_{21} + A_2c_{22}} \quad (28a)$$

Выражение это в форме (28a) я пишу ради симметрии, так как

$$c_{00} = c_{11} = c_{22} = 1$$

а также

$$c_{01} = c_{10} = \mathrm{cs}(y_0y_1)\ldots$$

В случае прямоугольности осей (y_0, y_1, y_0) условие примет вид:

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \quad (28b)$$

Угол двух прямых

§ 19. Углы данных прямых (d') и (d) с осями (y_0, y_1, y_2) определяются по формулам

$$\mathrm{cs}(dy_i) = k_2B_i; \qquad \mathrm{cs}(d'y_i) = k_2'B_i'$$

Отсюда угол между ними прямо определяется по формуле (13а) гл. I.

$$\mathrm{Sn}\,(y_0y_1y_2)\,\mathrm{cs}\,(dd') = \mathrm{Sn}\,(d'y_1y_2)\,\mathrm{cs}\,dy_0 + \mathrm{Sn}\,(y_0d'y_2)\,\mathrm{cs}\,(dy_1) + \mathrm{Sn}\,(y_0y_1d')\,\mathrm{cs}\,(dy_2)$$

Подставив сюда значения $\mathrm{cs}\,(dy_i)$ и $\mathrm{cs}\,(d'y_i)$, находим:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{cs}\,(dd') = \frac{k_2k_2'}{\Delta^2}\{B_0(B_0'C_{00} + B_1'C_{01} + B_2'C_{02}) + \\ + B_1(B_0'C_{10} + B_1'C_{11} + B_2'C_{12}) + B_2(B_0'C_{20} + B_1'C_{21} + B_2'C_{22})\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

В этой формуле с равным правом мы можем переставить величины (B) и (B') одни на место других.

В случае прямоугольности осей (y_0, y_1, y_2)

$$\mathrm{cs}\,(dd') = (B_0B_0' + B_1B_1' + B_2B_2')/BB' \quad (29a)$$

Угол двух плоскостей

§ 20. Пусть даны две плоскости (p) и (p').

Из выражения

$$\mathrm{Sn}\,(n_0n_1n_2)\,\mathrm{cs}\,(PP') = \mathrm{Sn}\,(P'n_1n_2)\,\mathrm{cs}\,(Pn_0) + \mathrm{Sn}\,(n_0P'n_2)\,\mathrm{cs}\,(Pn_1) + \mathrm{Sn}\,(n_0n_1P')\,\mathrm{cs}\,(Pn_2)$$

помножив обе части равенства на $\mathrm{Sn}\,(n_0n_1n_2) = \Delta'$ и принимая во внимание формулу (6) главы I и формулы (24) и (25), найдем:

$$\Delta'^2\,\mathrm{cs}\,(PP') = \frac{k_1k_1'}{\Delta^2}\{A_0\,\mathrm{cs}\,(y_0n_0)\,[A_0'C_{00}'\,\mathrm{cs}\,(y_0n_0) + A_1'C_{01}'\,\mathrm{cs}\,(y_1n_1) + A_2'C_{02}'\,\mathrm{cs}\,(y_2n_2)] + A_1\,\mathrm{cs}\,(y_1n_1)\,[A_0'C_{10}'\,\mathrm{cs}\,(y_0n_0) + A_1'C_{11}'\,\mathrm{cs}\,(y_1n_1) + A_2'C_{12}'\,\mathrm{cs}\,(y_2n_2)] + A_2\,\mathrm{cs}\,(y_2n_2)\,[A_0'C_{20}'\,\mathrm{cs}\,(y_0n_0) + A_1'C_{21}'\,\mathrm{cs}\,(y_1n_1) + A_2'C_{22}'\,\mathrm{cs}\,(y_2n_2)]\}$$

а приняв в расчет также и равенства

$$\Delta = \mathrm{sn}\,(y_0y_1y_2) = \mathrm{sn}\,(y_1y_2)\,\mathrm{cs}\,(y_0n_0) = \mathrm{sn}\,(y_2y_0)\,\mathrm{cs}\,(y_1n_1) = \mathrm{sn}\,(y_0y_1)\,\mathrm{cs}\,(y_2n_2)$$

получим:

$$\begin{aligned}\mathrm{cs}(PP') = \frac{k_1 k_1'}{\Delta'^2} \Bigg\{ &\frac{A_0}{s_{12}} \left(\frac{A_0' C_{00}'}{s_{12}} + \frac{A_1' C_{01}'}{s_{20}} + \frac{A_2' C_{011}'}{s_{01}} \right) + \\ + \frac{A_1}{s_{20}} &\left(\frac{A_0' C_{10}'}{s_{12}} + \frac{A_1' C_{11}'}{s_{20}} + \frac{A_2' C_{12}'}{s_{01}} \right) + \frac{A_1}{s_{01}} \left(\frac{A_0' C_{20}'}{s_{12}} + \right. \\ &\left. + \frac{A_1' C_{21}'}{s_{20}} + \frac{A_2' C_{22}'}{s_{01}} \right) \Bigg\}\end{aligned} \qquad (30)$$

В случае прямоугольности осей (y_0, y_1, y_2)

$$\mathrm{cs}(PP') = (A_0 A_0' + A_1 A_1' + A_2 A_2')/AA' \qquad (30a)$$

Расстояние точки от начала

§ 21. Пусть дана точка

$$y_0 = B_0; \quad y_1 = B_1; \quad y_2 = B_2$$

По формуле (5а) уравнение проходящей через нее центральной прямой

$$\frac{y_0}{B_0} = \frac{y_1}{B_1} = \frac{y_2}{B_2}$$

Эта прямая образует с какою-нибудь осью, например y_0, угол, величина которого определяется равенством

$$\mathrm{cs}(By_0) = K_2 B_0$$

а потому, означив искомое расстояние через l, найдем

$$l = \frac{B_0}{\mathrm{sn}(By_0)} = \frac{1}{k_2} = \frac{B}{\Delta} \qquad (31)$$

где величина B определяется из формулы (26).

Расстояние двух точек

§ 22. Пусть две данные точки:

$$y_0 = B_0; \quad y_1 = B_1; \quad y_2 = B_2$$
$$y_0 = B_0'; \quad y_1 = B_1'; \quad y_2 = B_2'$$

Переместим начало координат в точку (B). В таком случае, означив новые координаты через (y_0', y_1', y_2'), найдем:

$$y_0' = y_0 - B_0; \quad y_1' = y_1 - B_1; \quad y_2' = y_2 - B_2$$

и положение точки (B') выразится:

$$y_0' = B_0' - B_0; \quad y_1' = B_1' - B_1; \quad y_2' = B_2' - B_2$$

а потому искомое расстояние определится по формуле (31), в которой величина B будет иметь значение, отличное от значения формулы (26), в которой вместо B_0 нужно внести $(B_0' - B_0)$, вместо $B_1 - (B_1' - B_1)$ и вместо $B_2 - (B_2' - B_2)$.

III. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Задачи геометрии на плоскости можно рассматривать как весьма простой частный случай задач геометрии в пространстве, а именно тот, когда одна из координат принимает постоянное значение 0, а все остальные координаты находятся в плоскости, перпендикулярной к соответствующей оси координат.

Так как введенные выше формулы справедливы для каких угодно координат, то для того, чтобы перейти от них к формулам, относящимся к какой угодно плоскости, нужно только одну из независимых координат, например y_2, взять перпендикулярно к данной плоскости, а две другие в самой плоскости.

При этих условиях последовательно получим вместо (I)

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(y_0y_0) & \mathrm{cs}\,(y_0y_1) \\ \mathrm{cs}\,(y_1y_0) & \mathrm{cs}\,(y_1y_1) \end{vmatrix} = \mathrm{sn}^2\,(y_0y_1); \qquad C_{00} = C_{11} = c_{00} = c_{11} = 1$$

$$-C_{01} = -C_{10} = c_{01} = c_{10} = \mathrm{cs}\,(y_0y_1)$$

Также

$$\Delta' = \operatorname{sn}(n_0 n_1) = \operatorname{sn}(y_0 y_1) = \Delta \qquad (I)$$

В случае прямоугольности осей $y_0 y_1$

$$\Delta = \Delta' = 1;\ a - C_{01} = -C_{10} - c_{01} = c_{10} = 0 \qquad (Ia)$$

Уравнения точки будут вместо (1) и (4)

$$y_0 = a_0;\ y_1 = a_1; y_i \operatorname{sn}(y_0 y_1) = y_0 \operatorname{sn}(y_i y_1) + y_1 \operatorname{sn}(y_0 y_i) \qquad (1)$$

т. е. уравнений столько, сколько возьмем координат данной точки, и притом не меньше двух.

Если означим угол $(y_0 y_1)$ через α_1, а угол $y_0 y_i$ через α_i, то из последнего равенства (1)

$$y_i \operatorname{sn} \alpha_1 = y_0 \operatorname{sn}(\alpha_1 - \alpha_i) + y_1 \operatorname{sn} \alpha_i \qquad (1a)$$

в случае $\alpha_1 = \pi/2$

$$y_i = y_0 \operatorname{cs} \alpha_i + y_1 \operatorname{sn} \alpha_i \qquad (1b)$$

Уравнения прямой (d) вместо (5) будут

$$\frac{y_0}{\operatorname{cs}(dy_0)} = \frac{y_1}{\operatorname{cs}(dy_1)} = \frac{y_i}{\operatorname{cs}(dy_i)} \qquad (2)$$

Уравнения самих осей (y_0) и (y_1) будут

$$y_1 = y_0 \operatorname{cs} \alpha_1 \quad \text{и} \quad y_0 = y_1 \operatorname{cs} \alpha_1 \qquad (3)$$

Уравнения

$$y_0 = 0 \quad \text{или} \quad y_1 = 0 \qquad (4)$$

будут выражать прямые, перпендикулярные к оси (y_1) или оси (y_0).

Если начало переместим в точку $y_0 = b_0$, $y_1 = b_1$, то новые координаты $(y'_0 y'_1)$ будут

$$y'_0 = y_0 - b_0;\quad y'_1 = y_1 - b_1 \qquad (5)$$

Уравнения перемещения по оси y_0 на величину b_0

$$y'_0 = y_0 - b_0;\quad y'_1 = y_1 - b_0 \operatorname{cs} \alpha_1$$

а по оси y_1 на величину b_1

$$y_0' = y_0 - b_1 \operatorname{cs} \alpha_1; \quad y_1' = y_1 - b_1 \tag{6}$$

Перемещение по прямым, перпендикулярным к осям y_1 и y_0, выразится:

и
$$\left. \begin{array}{ll} y_0' = y_0 - b_0; & y_1' = y_1 \\ y_0' = y_0; & y_1' = y_1 - b_1 \end{array} \right\} \tag{7}$$

Прямая (d), проходящая через точку (b), выразится:

$$\frac{y_0 - b_0}{\operatorname{cs}(dy_0)} = \frac{y_1 - b_1}{\operatorname{cs}(dy_1)} = \frac{y - b_i}{\operatorname{cs}(dy_i)} \tag{8}$$

а если означим координаты пересечения ее с центральной прямой, перпендикулярной к оси y_0, через $(0 e_1)$, то та же прямая выразится:

$$y_1 = \frac{\operatorname{cs}(dy_1)}{\operatorname{cs}(dy_0)} + e_1 \tag{9}$$

Формулы перехода к сложным координатам будут вместо (22)

$$Y_0 \operatorname{sn}^2 \alpha_1 = y_0 - y_1 \operatorname{cs} \alpha_1; \quad Y_1 \operatorname{sn}^2 \alpha_1 = -y_0 \operatorname{cs} \alpha_1 + y_1 \tag{10}$$

Здесь взяты знаки — на том основании, что по принятым условиям направления нормалей $n_2^{(0)}$ и $n_2^{(1)}$ будут в данном случае прямо противоположными направлениям осей y_1 и y_0.

Обратный переход выразится уравнениями:

$$y_i = Y_0 \operatorname{cs}(Y_0 y_i) + Y_1 \operatorname{cs}(Y_1 y_i), \text{ например } \begin{array}{l} y_0 = Y_0 + Y_1 \operatorname{cs} \alpha \\ y_1 = Y_0 \operatorname{cs} \alpha_1 + Y_1 \end{array} \tag{11}$$

Углы прямой (d), выражаемой уравнением:

$$\frac{y_0}{B_0} = \frac{y_1}{B_1} = \frac{y_i}{B_i}$$

с осями будут:

$$\operatorname{cs}(dy_0) = kB_0; \quad \operatorname{cs}(dy_1) = kB_1 \tag{12}$$

где

$$k = \frac{\operatorname{sn}\alpha_1}{B} \quad \text{и} \quad B = \sqrt{B_0^2 + B_1^2 - 2B_0B_1 \operatorname{cs}\alpha_1}$$

Угол двух прямых (d) и (d') выразится:

$$\operatorname{cs}(dd') = \frac{kk'}{\operatorname{sn}^2\alpha_1}\{B_0(B_0' - B_1' \operatorname{cs}\alpha_1) + B_1(-B_0' \operatorname{cs}\alpha_1 + B_1')\} \tag{13}$$

Если прямые (d) и (d') перпендикулярны друг к другу, то из (13) непосредственно выводим:

$$\frac{B_0}{B_0' \operatorname{cs}\alpha_1 - B_1'} = \frac{B_1}{B_0' - B_1' \operatorname{cs}\alpha_1} \tag{13a}$$

Расстояние точки (B_0B_1) от начала выразится

$$l = B(\operatorname{sn}\alpha_1) \tag{14}$$

где B определяется по формуле (12).

Накочец расстояние двух точек (B и B') определяется по этой же формуле, если в выражение B из формулы (12) внесем $(B_0' - B_0)$ вместо B_0 и $(B_1' - B_1)$ вместо B_1.

Заметка. Чтобы не усложнять изложения, я с самого начала принял за доказанное, что величина прямолинейных координат какой-нибудь точки определяется проектирующими плоскостями, проходящими через данную точку и *перпендикулярными* к соответственным осям координат. Если бы вместо перпендикулярных плоскостей мы пожелали определить величину координат плоскостями, проведенными через данную точку под некоторым (не прямым) углом, то пришлось бы оси координат принять за оси круговых конусов, проходящих через данную точку, углы растворения

которых были бы равны заданному углу, и следовательно проектирующею поверхностью была бы уже не плоскость, а конус. При такой системе координат самые простые соотношения аналитической геометрии выражались бы весьма сложными формулами, а самая система координат не была бы уже прямолинейною.

СИММЕТРИЯ
КОНЕЧНЫХ ФИГУР

ВВЕДЕНИЕ[2]

Основания современному учению о симметрии положены Браве (Bravais) в его „Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique“ и других работах, которые впоследствии (1866) собраны под именем „Etudes cristallographiques“. Вместе с этими трудами появилась стройная и изящная система учения о симметрии, которая заняла в области наших знаний место, остававшееся до того времени пустым.

Внезапное появление столь грандиозного научного здания повлияло подавляющим образом на умы не одних современников его возникновения. Почти до самого последнего времени не было делаемо даже попыток исправлять или продолжать эту постройку, и она возвышалась над окружающим в своей полной неприкосновенности.

Однако в самом ее основании были слабые места, которые требовали переделки. Браве в своем учении о симметрии не решился дать с самого начала общего определения понятия о симметрии и, сделавши предварительно определения центра, осей и плоскостей симметрии, определил затем самую симметрию как совокупность этих ее факторов.

Ошибочность этого основного определения констатирована самым появлением труда Гадолина „Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного

общего начала" (Зап. Мин. общ., 1869, т. IV), где в числе видов симметрии находится симметрия сфеноидальная, при которой не имеется ни плоскостей, ни центра симметрии, а имеющаяся ось симметрии не вполне соответствует определению Браве. В этом труде в первый раз является вывод всех систем и их подразделений, но лишь поскольку это может иметь место для фигур кристаллических. В нем не упоминается также прямо об ошибочности основного определения Браве. Отчасти вероятно по этой причине труд этот остался почти неизвестным в более широких сферах, да и в кругу специалистов-кристаллографов истинное его значение начинает пониматься только в настоящие дни.

От этого труда оставался лишь ничтожный шаг обобщения и приложения того, что сделано только для систем кристаллографических, к системам симметрии геометрических фигур вообще.

Этот шаг был почти одновременно сделан автором предлежащей работы в „Началах учения о фигурах" [1]) и французским ученым Кюри (Curie) (Bul. de la Soc. min. de Fr., 1884, №№ 3, 4 и 9) в статьях „Sur les questions d'ordre: répétitions" и „Sur la symétrie".

Как в „Началах учения о фигурах", так и в статьях Кюри в первый раз приводится законченный вывод всех вообще возможных видов симметрии конечных фигур.

Статьи Кюри написаны конспектообразно, и пользование ими затрудняется еще тем обстоятельством, что они являются лишь как бы дополнением к работам Браве, и все главнейшие выводы, в том числе и вывод всех видов симметрии, черпаются прямо из трудов Браве с пополнениями, обусловливаемыми вновь вводимыми определениями.

---

[1]) Зап. Мин. общ., 1885, т. XXI. Вследствие обширности этого сочинения его печатание продолжалось несколько лет. Самый труд был окончен еще до 1883 г., а в этом году началось его печатание, хотя появился он в первой половине 1885 г.

В „Началах учения о фигурах" сжатость изложения заставила автора ограничиться лишь тем, что было безусловно необходимо для вывода всех возможных видов симметрии конечных фигур, а потому многие существенные стороны учения о симметрии остались незатронутыми.

Все это заставляет меня полагать, что появление предлежащего труда далеко не бесполезно. К тому же здесь в первый раз симметрия фигур получает аналитическое выражение, через что самое учение о симметрии вводится в область аналитической геометрии.

Первоначально я имел в виду найти аналитические выражения для симметрии бесконечных правильных систем. К этому меня побуждала трудность разобраться в выводах Зонке (Sohncke), относящихся к правильным системам точек, трудность, наглядно проявившаяся в установлении ошибки, долго остававшейся незамеченною самим автором; ошибка Зонке состояла в том, что одна и та же правильная система точек принималась за две различные,[1]) а это едва ли могло случиться, если бы эти системы получили аналитическое выражение. Но, принявшись раз за аналитические выражения симметрии правильных систем точек, т. е. фигур бесконечных, мне по необходимости пришлось предварительно заняться как расширением самого понятия о координатах аналитической геометрии, так и симметрией фигур конечных.

В заключение замечу, что на предполагаемый в этой работе способ аналитического выражения можно смотреть как на развитие мысли, намеченной, впрочем, в весьма смутной форме, немецким математиком Мебиусом (Moebius) в его работах о симметрии,[2]) появившихся почти одновременно с замечательными работами Браве по этому предмету.

---

[1]) Ошибка были замечена Шенфлисом (Math. Ann., 1886,28, S. 341). См. статью Зонке: Zeitschr. f. Krist., 1887, Bd. XIV, H. 3, S. 218.

[2]) „Ueber das Gesetz der Symmetrie der Kristalle" (Crelle J., Bd. 43, S. 365) и „Ueber symmetrische Figuren" (там же, Bd. 44, S. 335). Не расширив понятия о координатах, он не в состоянии был развить свою мысль

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Симметрическою фигурой называется такая, которая непосредственно может быть совмещена с самой собой в разных положениях, или же совмещение в разных положениях может быть произведено, если мы заменим ее другой, которая относится к ней, как изображение в зеркале к изображаемому предмету.

Назову совмещения первого рода *прямыми совмещениями* или просто *совмещениями*, так как этот термин всегда употреблялся именно в этом смысле, а этот вид симметрии — *симметрией совмещения*. Совмещения второго рода назову симметричными совмещениями, а самый вид симметрии *прямою симметрией* или симметрией собственно так называемой.

Число совмещений того и другого рода характеризует степень симметрии фигуры; как число, оно некоторым образом есть результат измерения, а поэтому назову его *величиною симметрии*. Чем величина эта больше, тем симметрия, как говорится, выше. Характерною особенностью этой величины является то, что она может быть только положительным целым числом начиная с единицы. Если величина эта равна единице, т. е. если фигура может быть совмещена с самою собой только в одном положении, то, значит, симметрия отсутствует вовсе и, следовательно, фигура будет *асимметрическою*.

Величина симметрии существенно слагается из двух: величины симметрии собственно или прямой симметрии и

и остановился на первых шагах. В самое последнее время появился в Ann. de l'Ec. Normale (1887, №№ 5 и сл.) заслуживший большую премию французской Академии труд Гурса (Goursat): „Études des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre regulier". Так как здесь дело идет собственно о поверхностях, а не о выражении симметрии, то понятно, что вопрос о системе координат не играет существенной роли. Симметрия предполагается известною, и вопрос сводится к определению вида функций, выражающих поверхности и удовлетворяющихся всеми значениями координат точек, вытекающих из этой симметрии.

величины симметрии совмещения. Первая величина может быть равна и нулю, но вторая не может быть меньше единицы, так как на всякую фигуру мы можем смотреть как на совместившуюся сама с собой.

Кинематика доказывает, что самое общее движение тела есть винтовое и может быть составлено из вращения около некоторой оси и поступания по направлению этой оси. Поэтому вообще, если фигура может быть прямо совмещена сама с собой в различных положениях, мы всегда можем найти эту винтовую ось совмещения. Отыскав эту ось, придадим ей определенное направление и назовем наименьший угол, на который нужно повернуть фигуру, чтобы привести ее к совмещению сама с собой через α, а величину поступания, соответствующую этому углу и взятому направлению вращения — через a. Так как, произведя это элементарное движение, мы привели фигуру в совмещение с ее первоначальным положением, то, значит, в фигуре от этого движения не произошло никакого изменения, а поэтому мы вновь можем повторить то же элементарное движение и снова приведем фигуру в совмещение с ее первоначальным положением. Отсюда вытекает, что если вообще существует такое элементарное движение совмещения, то оно может быть повторено неопределенно большое число раз; при этом повторении величина a непосредственно возрастает и может быть сделана больше всякой данной. Следовательно, если только эта величина не есть нуль, мы можем подвинуть данную фигуру в некотором направлении на величину, бóльшую всякой данной, и вместе с тем привести ее в совмещение сама с собой. Это мыслимо лишь в том случае, если сама фигура в этом направлении имеет величину, бóльшую всякой данной. Если же ограничимся симметрией фигур, имеющих конечную величину во всех направлениях, то необходимо и величину a принять равной нулю.

В таком случае элементарным движением совмещения может быть только вращение около некоторой оси.

Ось, около которой нужно повернуть фигуру, чтобы привести ее в совмещение с ее первоначальным положением, называется *осью симметрии*. Ось симметрии получает наименование от наименьшего характерного для нее угла поворота, приводящего к совмещению, или от того целого числа, которое показывает, сколько раз нужно повернуть фигуру около оси на ее характерный угол, чтобы фигура возвратилась в первоначальное положение. Это целое число имеет определенное значение, если характерный угол поворота имеет величину конечную. Это число становится бесконечно большим, если характерный угол бесконечно мал; в этом частном случае симметрическая фигура есть фигура вращения, а ее бесконечная ось симметрии есть ось вращения. Если ось имеет наименование единицу, т. е. если наименьший характерный угол ее поворота есть 2π, то она уже не есть ось симметрии, так как вращение на этот угол какой угодно фигуры около прямой какого угодно положения всегда приведет фигуру в ее первоначальное положение. Двойная или ось симметрии в 180° будет та, для которой характерный угол поворота $\frac{2\pi}{2} = \pi$; тройная или ось симметрии в 120° будет та, для которой характерный угол поворота $\frac{2\pi}{3}$ и т. д.

Воображаемые зеркальные плоскости, приводящие фигуру в совмещение с ее изображением в них, называются *плоскостями симметрии*.

Тот вид симметрии, при котором, для совмещения фигуры с первоначальным положением, необходимо одновременно повернуть ее около некоторой оси на характерный угол и заменить фигуру ее изображением в зеркале, я назову *сложною симметрией*; [1]) самую прямую, около которой

[1]) По Кюри — plan de symétrie alterne à pôle d'ordre q. (Bul. de la Soc. min. de Fr., 1884, t. VII, No. 9, p. 424). В „Началах учения о фигурах" я называл ее сфеноидальною согласно термину, принятому г. Гадолиным для одного частного случая этой симметрии.

фигуру нужно повернуть,— *осью сложной симметрии*, а воображаемую зеркальную плоскость — *плоскостью сложной симметрии*. Для того, чтобы термин „сложная симметрия“ имел строго определенный смысл, существенно необходимо, чтобы самое совмещение могло быть произведено только при условии одновременного вращения около оси сложной симметрии и замены фигуры другою, ей симметричною по отношению к плоскости сложной симметрии. В противном случае, если только фигура обладает осями и плоскостями симметрии, мы можем произвольно выбрать одну из этих осей и одну из этих плоскостей и произвести совмещения по условиям, характеризующим сложную симметрию.

ОСИ СИММЕТРИИ

§ 1. Если фигура обладает осью симметрии наименования *p*, то, какую бы прямую мы ни взяли за одну из осей координат, повернув фигуру на характерный или обратный ему угол, избранная ось координат останется повидимому в том же положении по отношению к фигуре, несмотря на то, что в сущности она занимает уже по отношению к ней иное положение. Поэтому определение положения точек симметрической фигуры возможно лишь в предположении, что за ось координат мы можем принять любую из *p* прямых, занимающих по отношению к фигуре одинаковое положение. Придав оси симметрии определенное направление и приведя в связь с этим направлением направление вращения около оси, мы получим из положения одной прямой, принятой за ось координат $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$, которые с равным правом могут быть приняты за оси координат.[1]) Означив

Сущность принимаемых мною теперь координат и изложение главнейших формул аналитической геометрии, выраженных в этих координатах, находятся в моей брошюре „Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде“.

координаты какой-нибудь точки фигуры на этих осях соответственно через $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$, мы выразим присутствие оси симметрии равенствами:

$$y_0 = b_i; \quad y_1 = b_{i+1}; \quad y_2 = b_{i+2} \qquad (1)$$

где i — какое-нибудь целое число, начиная от 0 до $p-1$, а величины $p, p+1 \ldots$ принимаются снова за $0, 1 \ldots$

Эгих трех равенств достаточно, так как вообще положение точки вполне определяется тремя координатами.

Чтобы лучше оттенить значения, которые может принимать число i, мы будет писать эти равенства в таком виде:

$$y_0 = \overset{p}{b}_i; \quad y_1 = \overset{p}{b}_{i+1}; \quad y_2 = \overset{p}{b}_{i+2} \ldots \qquad (1a)$$

Так как в равенстве (1) число i может принимать p различных значений, то при помощи этих равенств из положения одной данной точки выводится положение p различных точек, являющихся как результат присутствия оси симметрии.

Если одна из взятых осей координат проходит через ось симметрии в определенной ее точке, то через ту же точку пройдут и все оси координат. Для простоты мы всегда будем подразумевать только такие оси координат, а точка их пересечения, находящаяся на оси симметрии, будет началом координат.

За одну из осей координат удобно принять ось симметрии; означив ее через y, получим вместо равенств (1)

$$y = b; \quad y_0 = \overset{p}{b}_i; \quad y_1 = \overset{p}{b}_{i+1} \qquad (2)$$

Если пожелаем выразить все координаты в зависимости от y и произвольно избранных двух y_0 и y_1, то для какой-нибудь координагы y_i будем иметь [1])

[1]) L. с. § 9, формула (4).

$$y_i \operatorname{Sn}(yy_0y_1) = y \operatorname{Sn}(y_iy_0y_1) + \\ + y_0 \operatorname{Sn}(yy_iy_1) + y_1 \operatorname{Sn}(yy_0y_i) \quad (3)$$

Если y есть ось наименования p, то внутренний двугранный угол между плоскостями:

(yy_0) и (yy_1) есть $\frac{2\pi}{p}$

(yy_0) и (yy_i) " $i\frac{2\pi}{p}$.

(yy_1) и (yy_i) " $(i-1)\frac{2\pi}{p}$

а потому[1])

$$\operatorname{Sn}(yy_0y_1) = \operatorname{sn}(yy_0) \operatorname{sn}(y_1y) \operatorname{sn}\frac{2\pi}{p}$$

также

$$\operatorname{Sn}(yy_iy_1) = -\operatorname{sn}(yy_i)\operatorname{sn}(y_1y)\operatorname{sn}(i-1)\frac{2\pi}{p}\,^{2)}$$

и

$$\operatorname{Sn}(yy_0y_i) = \operatorname{sn}(yy_0)\operatorname{sn}(y_iy)\operatorname{sn} i\frac{2\pi}{p}$$

Кроме того углы

$$yy_0 = y_1y, \qquad yy_i = y_1y \ldots$$

следовательно

$$y_i \operatorname{sn}^2(yy_i)\operatorname{sn}\frac{2\pi}{p} = y \operatorname{Sn}(y_iy_0y_1) - y_0 \operatorname{sn}^2(yy_i)\operatorname{sn}(i-1)\frac{2\pi}{p} + \\ + y_1 \operatorname{Sn}^2(yy_i)\operatorname{Sn} i\frac{2\pi}{p}$$

---

[1]) L. c., § 4, формула (11a).

[2]) Здесь поставлен знак минус по той причине, что за положительное направление углов между плоскостями подразумевается направление в порядке: (yy_0), (yy_1), ..., (yy_i), а противоположное будет поэтому отрицательно.

или

$$y_i \operatorname{sn} \frac{2\pi}{p} = y \frac{\operatorname{Sn}(y_i y_0 y_1)}{\operatorname{sn}^2(yy_i)} - y_0 \operatorname{sn}(i-1)\frac{2\pi}{p} + y_1 \operatorname{sn} i \frac{2\pi}{p} \tag{3a}$$

В частном случае, если за оси координат примем прямые в плоскости, перпендикулярной к оси y, имеем $\operatorname{Sn}(y_i y_0 y_1) = 0$, и $\operatorname{sn}(yy_i) = 1$ и потому

$$y_i \operatorname{sn} \frac{2\pi}{p} = -y_0 \operatorname{sn}(i-1)\frac{2\pi}{p} + y_1 \operatorname{sn} i \frac{2\pi}{p} \tag{3b}$$

Если имеется какая-нибудь плоскость

$$Ay + A_0 v_0 + A_1 y_1 + B = 0 \tag{4}$$

то, так как это уравнение удовлетворяется для всех значений (y, y_0, y_1), как координат какой-нибудь точки этой плоскости, на основании равенств (2) будем иметь также

$$Ay + A_0 y_i + A_1 y_{i+1} + B = 0$$

Подставив сюда вместо y_i и y_{i+1} их величины из равенств (3a), чтобы выразить в координатах $(y, y_0 y_1)$, найдем

$$\left.\begin{aligned} & Ay + \frac{A_0}{\operatorname{sn}\frac{2\pi}{p}}\left\{y\frac{\operatorname{Sn}(y_i y_0 y_1)}{\operatorname{sn}^2(yy_i)} - y_0 \operatorname{sn}(i-1)\frac{2\pi}{p} + \right. \\ & \left. + y_1 \operatorname{sn} i \frac{2\pi}{p}\right\} + \frac{A_1}{\operatorname{sn}\frac{2\pi}{p}}\left\{y\frac{\operatorname{Sn}(y_{i+1} y_0 y_1)}{\operatorname{sn}^2(yy_{i+1})} - y_0 \operatorname{sn} i \frac{2\pi}{p} + \right. \\ & \left. + y_1 \operatorname{sn}(i+1)\frac{2\pi}{p}\right\} + B = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Так как величина i может принять p различных значений, то это уравнение выразит в координатах (y, y_0, y_1) — не одну, а p различных плоскостей, присутствие которых является результатом присутствия оси симметрии y наименования p.

В частном случае, если данная плоскость перпендикулярна к оси симметрии y, то $A_0 = 0$ и $A_1 = 0$, и уравне-

ние (4а) станет тождественным с уравнением (4), т. е. присутствие оси симметрии не вызовет присутствия каких-либо новых плоскостей из данной.

Вообще нетрудно из равенств (2) сделать выводы по отношению к каким угодно данным геометрическим образам, но я оставлю эти вопросы в стороне, имея в виду ограничиться здесь лишь основными законами симметрии.

В случае $p = 2$, i может иметь только два значения: 0 и 1, а потому $\operatorname{Sn}(y_i y_0 y_1) = 0$, и равенство (3а), которое мы можем написать так

$$y_i = -y_0 \frac{\operatorname{sn}(i-1)\pi}{\operatorname{sn}\pi} + y_1 \frac{\operatorname{sn} i\pi}{\operatorname{sn}\pi}$$

становится неопределенным.

Действительно, в этом случае две прямые, которые мы принимаем за оси координат, совмещаются противоположными направлениями, а потому они не могут служить для определения положения точки в пространстве.

Примем поэтому за оси координат, кроме оси симметрии y, еще две прямые y_0 и z_0, находящиеся в плоскости, перпендикулярной к оси y, и тогда равенство (2) для этого случая примет вид

$$y = b; \qquad y_0 = \overset{2}{b}_i; \qquad z_0 = \overset{2}{c}_i \tag{5}$$

По равенству (3) найдем:

$$z_1 \operatorname{sn}(y_0 z_0) = y \operatorname{Sn}(z_1 y_0 z_0) + y_0 \operatorname{Sn}(y z_1 z_0) + z_0 \operatorname{Sn}(y y_0 z_1)$$

Здесь

$$\operatorname{Sn}(z_1 y_0 z_0) = 0; \qquad \operatorname{Sn}(y z_1 z_0) = 0; \qquad \text{а} \quad \operatorname{Sn}(y y_0 z_1) = -\operatorname{sn}(y_0 z_0)$$

так как прямая z_1 имеет направление прямо противоположное z_0, и, значит,

$$z_1 = z_0 \tag{6}$$

Точно так же найдем

$$y_1 = -y_0 \tag{6a}$$

§ 2. Теперь перейду к случаям, когда данная фигура обладает больше чем одною осью симметрии. Допустим сначала, что кроме оси симметрии y наименования p имеется еще ось симметрии z наименования q, и пусть кратчайшее расстояние между ними есть a. Проведя в точке пересечения прямой кратчайшего расстояния с осью y прямую z', параллельную оси z, мы на основании правил кинематики можем принять вместо вращения около оси z такое же вращение около z' как оси и некоторое поступание a' в направлении, перпендикулярном к плоскости прямых z и z'. Так как, произведя это элементарное движение, мы по условию приведем фигуру в совмещение с ее первоначальным положением, то, значит, в таких же точно условиях мы можем повторить это же элементарное движение неопределенно большое число раз и каждый раз снова приведем к совпадению новое положение фигуры с первоначальным; следовательно, если только величина a не равна нулю, фигура приходит в совмещение со своим первоначальным положением и после неопределенно большого поступания в некотором направлении, поступания, которому можно придать величину, бо́льшую всякой данной. Это мыслимо лишь в том случае, если сама фигура в этом направлении имеет величину, бо́льшую всякой данной; для конечных же фигур необходимо $a' = 0$, т. е., что оси симметрии пересекаются.

Так как это доказательство одинаково применимо ко всякой паре осей, симметрии, сколько бы их ни было в данной фигуре, то, значит, все оси симметрии конечной фигуры пересекаются в одной точке. Эту точку назовем *центром симметрии*[1] и будем всегда принимать ее за начало координат.

[1] Браве (Études cristallographiques, 1866, p. XXIII, Déf. VI) неопределенно называет эту точку „centre de figure" (по Кюри — centre de répétition), а, напротив того, центром симметрии он (l. c., p. XXI, Déf. I), а за ним и другие ученые (например: Liebisch. Geometrische Kristallo-

Итак, если кроме оси симметрии y имеется еще какая-нибудь ось симметрии z, то из присутствия последней выводится несколько положений оси y, например присутствие *равных осей симметрии* $y_0, y_1 \ldots$ Здесь под именем равных осей симметрии я подразумеваю такие, которые совмещаются при совмещении фигуры в каком-нибудь ее положении с первоначальным.

Примем за оси координат две равные оси симметрии y_0, y_1, а также прямую z, делящую пополам угол между положительными направлениями этих осей, и прямую v — перпендикулярную к плоскости осей $y_0 y_1$, для направления которой мы изберем, например, такое, чтобы, расположившись вдоль нее и по ее направлению, последовательность положительных направлений y_0, z, y_1 соответствовала движению часовой стрелки.

Если означим координаты некоторой точки фигуры по отношению к этим осям через

$$y_0 = b_0; \quad y_1 = b_1; \quad z = c \quad \text{и} \quad v = д$$

то для величины C найдем:

$$c \operatorname{sn}(y_0 y_1) = y_0 \operatorname{sn}(c y_1) + y_1 \operatorname{sn}(y_0 c) \qquad (A)$$

Теперь сдвинем фигуру из ее первоначального положения, совместив ось y_1 с прежним положением оси y_0, и будем вращать фигуру около этой оси до тех пор, пока ось y_0 не придет в совмещение с прежним положением

graphie, 1881, p. 194), не говоря уже о последователях Браве — Малляр (Mallard) и Кюри, называют то, что я назвал *центром обратного равенства* или просто *центром многогранника* (Начала учения о фигурах, 1885, § 74). Я не считаю возможным согласиться с принятыми этими учеными определениями по той причине, что, согласно с ними, просто центром фигуры означается такое понятие, которое может входить только в состав учения о симметрии, тогда как, обратно, именно центром симметрии означается понятие, имеющее применение, далеко выходящее за пределы учения о симметрии.

оси y_1 (при этих совмещениях, конечно, предполагаются и равные, например положительные, направления этих осей). Так как теперь совмещены две равные оси симметрии с их первоначальным положением, то ясно, что произойдет такое же совмещение с первоначальным положением и самой фигуры, как если бы мы возвратили ее вновь в это положение. Но теперь положительное направление оси координат v совместится с первоначально отрицательным направлением той же оси, а положение оси координат z очевидно не изменится. Если вместе с осями тому же движению мы подвергнем и взятую точку фигуры, то она придет в новое положение, которое определяется в первоначальных осях координат таким образом:

$$y_0 = b_1; \quad y_1 = b_0; \quad v = -\partial \qquad (7)$$

а для координаты по оси z на основании (A) мы имеем ту же величину.

Сравнивая теперь координаты y_0, y_1, z и v с соответствующими велечинами y_0, y_1, y и z_0 равенств (2), (5) и (6), мы в выражениях (7) и (A) имеем выражение оси z как двойной оси симметрии, а потому заключаем:

Если фигура обладает больше чем одною осью симметрии, то она непременно обладает и двойными осями симметрии, положительное направление которых делит пополам угол между положительными направлениями двух равных осей симметрии.

Сделанный вывод теряет свою силу в том случае, если ось симметрии, из которой выведены два положения равных осей симметрии y_0 и y_1, двойная, так как в таком случае оси y_0 и y_1 сольются друг с другом противоположными направлениями в одну прямую, и, значит, в этом случае положение какой-нибудь точки фигуры не может быть определено с помощью осей y_0, y_1 и v как осей координат.

Однако сделанный вывод остается в полной силе, если фигура вообще обладает хоть одною осью симметрии на-

именования большего чем 2; тогда, если кроме такой оси y имеется еще двойная ось z, то из присутствия y следует присутствие некоторого числа равных осей z, а также двойных осей v, которые делят пополам углы между положительными направлениями осей z. В этом случае все оси z и v должны находиться в одной плоскости, перпендикулярной к оси y, так как иначе, вращая около одной из них, мы получили бы для y два различные положения в фигуре, а отсюда, в свою очередь, заключили бы о присутствии в перпендикулярном к плоскости этих двух положений осей направлении еще оси симметрии наименования высшего чем 2, а это противоречит сделанному условию.

Если примем за оси координат: ось y наименования высшего чем 2 и две соседние равные оси z, например z_0 и z_1, то из положения какой-нибудь точки фигуры:

$$y = b; \quad z_0 = c_0; \quad z_1 = c_1$$

выводим сначала p точек

$$y = b; \qquad z_0 = \overset{p}{c}_i; \qquad z_1 = \overset{p}{c}_{i+1} \tag{8}$$

а вследствие присутствия еще двойных осей v, делящих пополам положительные направления осей z, найдем еще p точек:

$$y = -b; \qquad z_0 = \overset{p}{c}_{i+1}; \quad z_1 = \overset{p}{c}_i$$

или, что все равно,

$$y = -b; \qquad z_0 = \overset{p}{c}_i; \qquad z_1 = \overset{p}{c}_{i-1} \tag{8a}$$

а оба равенства, (8) и (8a), мы можем соединить в одно:

$$y = n^k b; \qquad y_0 = \overset{p}{c}_i; \qquad y_1 = \overset{p}{c}_{i+n^k} \tag{8 b}$$

где n означает отрицательную единицу, а k — какое-нибудь положительное целое число или просто 0, или 1.

В этом случае, следовательно, величина симметрии вдвое больше наименования оси, имеющей вообще высшее наименование, а поэтому называющейся *главною осью* симметрии; но здесь, строго говоря, мы имеем уже не одну, а две оси, слившиеся противоположными направлениями. Такие оси будем называть *парными.*[1]) Нетрудно видеть, что вообще парною осью симметрии будет такая, которая образует прямой угол с какою-нибудь двойной осью симметрии. Поэтому, если в рассматриваемом случае главная ось имеет четное наименование и, следовательно, удовлетворяет условиям присутствия двойной оси, то все вообще оси фигуры будут парные.

Если оси наименования высшего чем 2 вовсе отсутствуют, а известно присутствие лишь двух двойных осей y и z, то, приняв их и перпендикулярную к ним прямую v за оси координат, получаем систему трех прямоугольных осей координат, и если дано положение какой-нибудь точки фигуры, определяемое равенствами:

$$y = b; \qquad z = c; \qquad v = \partial$$

то отсюда заключаем о присутствии точек

$$\left.\begin{array}{lll} y = b; & z = \overset{2}{c_i}; & v = \overset{2}{\partial_i} \\ y = b; & z = \pm c; & v = \pm \partial \end{array}\right\} \qquad \text{(a)}$$

т. е.

а также

$$\left.\begin{array}{lll} y = \overset{2}{b_i}; & z + c; & v = \overset{2}{\partial_i} \\ y = \pm b; & z = c; & v = \pm \partial \end{array}\right\} \qquad \text{(b)}$$

т. е.

а два равенства (a и b) мы можем соединить в одно:

$$y = n^i b; \qquad z = n^k c; \qquad v = n^{i+k} \partial \qquad (9)$$

[1]) По Кюри — axes de symétrie doublés.

Означив $i+k=l$, те же равенства представим в виде

$$\left.\begin{array}{lll} y=n^i b; & z=n^{l-i}c; & v=n^l\partial \\ y=n^{l-k}b; & z=n^k c; & v=n^l\partial \end{array}\right\} \quad (9a)$$

или

Все выражения (9 и 9а) совершенно симметричны по отношению ко всем трем осям координат, откуда заключаем, что из присутствия осей y и z существование двойной оси вытекает как следствие.

Если назовем такие оси *равнодействующими* в отличие от осей *первоначальных*, кладущихся в основу вывода, можем сказать, что во всех тех случаях, когда имеется больше чем одна ось симметрии, две какие-нибудь оси, в состав которых входит ось высшего наименования или главная ось, представляют оси первоначальные, а все остальные оси — равнодействующие.

Все рассмотренные до сих пор случаи могут быть сведены в две группы: 1) имеется всего одна ось какого угодно наименования, и 2) кроме первой парной главной оси какого угодно наименования p имеется в плоскости, к ней перпендикулярной, a) если p число четное — $\frac{p}{2}$ парных двойных осей одного рода и столько же и таких же осей другого рода, делящих пополам углы между первыми, и b) если p число нечетное — p (непарных) двойных осей одного рода и столько же и таких же осей другого рода, делящих пополам углы между первыми.

§ *3*. Чтобы убедиться, что больше никаких других осей существовать не может, выведем две общие теоремы о величине симметрии. Величина симметрии (совм.) есть число, показывающее, сколько точек может быть выведено из одной данной при существовании данной системы осей симметрии. Число это есть в то же время число различных положений данной фигуры, совмещающихся с первоначальным; при каждом из этих положений происходит совпадение равных

осей; поэтому. если в данной системе имеется P равных осей (непарных) наименования p и больше равных им осей нет, то число всех совмещений может быть только Pp, и это и будет величина симметрии (совм.); а так как в рассуждении не принимается в расчет, про какие именно оси мы ведем речь, то сделанный вывод одинаково справедлив для всех систем равных осей, и, значит, если имеется P равных осей наименования p, Q равных осей наименования q, R равных осей наименования $r\ldots$, то, назвав величину симметрии через S, найдем[1].

$$S = Pp = Qq = Rr\ldots \tag{10}$$

В случае парных осей они совмещаются попарно противоположными направлениями, а потому для таких осей числа P, $Q,\ldots$ следует принимать вдвое больше кажущегося числа, т. е. считать каждую такую ось за две. С другой стороны, если мы из данной системы осей вывели, по одной данной, S различных точек, для совмещения первоначального положения с каждым из $S-1$ положений, отличающихся от первоначального, необходимо произвести $S-1$ движений; при этом каждая ось наименования p будет участвовать только $(p-1)$ раз в общей сумме этих движений; в этом рассуждении не играет роли, будет ли ось парная или непарная, а потому, означив число таких осей через P', где значок указывает на то, что если ось парная, то две совместившиеся в ее положении оси мы все равно принимаем за одну, найдем[2])

$$S-1 = P'(p-1) + Q'(q-1) + R'(r-1)\ldots \tag{11}$$

Формула (10) может служить для проверки того, правильно ли мы высчитали число осей каждого рода, а формула (11) проверит, все ли существующие оси мы приняли

[1]) Формула Кюри.

[2]) Формула Браве.

в расчет, т. е. не существуют ли, кроме выведенных, еще оси какого-либо рода, оставшиеся в неизвестности.

Если вообще существует только одна ось симметрии, то применение этих формул непосредственно очевидно.

Если же кроме главной оси наименования p существуют еще двойные оси в плоскости к ней перпендикулярной, то главная ось необходимо становится парной, и потому $S=2p$. Если она четного наименования, то и все двойные оси будут парными, а потому число Q таких осей каждого рода найдется из равенства

$$2 \times 2Q = 2p, \quad \text{т. е.} \quad Q = \frac{p}{2}$$

Если же p нечетного наименования, то найдем

$$2Q = 2p, \quad \text{т. е.} \quad Q = p$$

Применяя формулу (11) и приняв в расчет только выведенные нами 3 системы осей, найдем для случая p — четного

$$S - 1 = 2p - 1 = (p - 1) + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \qquad \text{(a)}$$

и в случае p — нечетного

$$S - 1 = 2p - 1 = (p - 1) + p + p \qquad \text{(b)}$$

(a) есть тожество и указывает на правильность наших заключений; напротив того, (b) есть невозможность и свидетельствует об ошибочности, а именно о том, что нами взято двойных осей вдвое больше, чем это возможно по формуле (11), но так как существование всех этих осей нами доказано, то остается допустить, что в данном случае сливаются по две неравные двойные оси, а это, впрочем, и непосредственно очевидно.

Таким образом никаких других осей, кроме уже выведенных, в рассмотренных случаях существовать не может.

§ *4*. Теперь перейдем к случаям, когда по крайней мере две оси имеют наименование высшее чем 2. Пусть такие

две оси будут y наименования p и z наименования q, причем $p \geqslant q$.

Из присутствия оси z мы, прежде всего, вращая около нее выведем не меньше трех равных осей y, y_0 и y_1. Вращая все эти оси около каждой из них, мы снова будем получать новые равные оси, и в конце концов должны получить систему равных осей y, пересекающихся в центре симметрии, и обладающую таким свойством, что вращение ее около каждой из ее осей (на характерный или кратный от него угол) приводит ее в совмещение с первоначальным положением; если бы такого совмещения не происходило, то это значило бы только, что процесс образования системы нами еще не закончен.

Выбрав произвольно одну из этих осей, например y, мы отыскиваем сначала ближайшую к ней ось y_0, и так как присутствие этих двух ближайших равных осей предполагает присутствие какой-нибудь иной оси, вращением около которой мы y переносим в положение y_0, то, продолжая то же вращение дальше, мы получим целый цикл осей. Все оси этого цикла составляют ребра некоторого правильного гоноэдра, который можно принимать за центральный гоноэдр правильного многогранника, так как, очевидно, все пространство около центра симметрии разложится на равные ему гоноэдры. Отсюда легко вывести все системы осей из правильных многогранников.

Но нетрудно и прямо произвести этот вывод, предполагая последовательно, что цикл состоит из 3, 4, ... осей.

Допустим сначала, что цикл состоит из 3 осей. Так как внутренний угол такого гоноэдра есть характерный угол оси симметрии наименования p, то величина его $\frac{2\pi}{p}$, а потому величина самого гоноэдра[1])

[1]) См., например: Начала учения о фигурах. Зап. Мин. общ., 1885, т. XXI, § 8.

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2\pi}{p}-\frac{\pi}{2}=\pi\frac{6-p}{2p}$$

Так как сумма всех гоноэдров системы, как сумма углов около одной точки, равна 2π, а число их не может быть иное как целое и положительное, то значит, целым и положительным должно быть число

$$Q=\frac{2\pi}{\frac{\pi(6-p)}{2p}}=\frac{4p}{6-p}$$

Отсюда заключаем, что p может быть только: 1) $p=3$ (в этом случае $Q=4$), 2) $p=4$ ($Q=8$), 3) $p=5$ ($Q=20$) и 4) $p=6$ ($Q=\infty$), что соответствует тетраэдру, октаэдру, икосаэдру и шару. Так как, по условию, взятые тригоноэдры имеют ребрами ближайшие по положению оси симметрии наименования p, то, значит, других равных им осей больше не существует, но во всех случаях существуют тройные оси симметрии, расположенные по оси (вписанных или описанных конусов) этих тригоноэдров, и двойные оси, делящие пополам положительные направления тех и других осей.

Теперь допустим, что цикл состоит из 4 осей. В этом случае величина тетрагоноэдра [1])

$$\frac{4}{2}\cdot\frac{2\pi}{p}-\pi=\pi\,\frac{4-p}{p}$$

а число всех тетрагоноэдров

$$Q=\frac{2\pi}{\frac{\pi(4-p)}{p}}=\frac{2p}{4-p}$$

Так как в этом случае оси наименования 4 уже предполагаются существующими, то для p мы можем принять

[1]) L. c., § 10.

величину не меньше 4, но по выведенному выражению нельзя принять p и больше 4. Остается принять только 5) $p=4$ ($Q=\infty$), и это опять соответствует шару.

Допустив цикл состоящим из 5 осей, получим для величины пентагоноэдра

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{2\pi}{p}-\frac{3\pi}{2}=\pi\frac{10-3p}{2p}$$

а число всех пентагоноэдров

$$Q=\frac{2\pi}{\frac{\pi(10-3p)}{2p}}=\frac{4p}{10-3p}$$

Так как p можно взять теперь не меньше 5, то никаких новых случаев отсюда вывести нельзя.

Допустив цикл состоящим из 6 осей для величины гексагоноэдра, найдем

$$\frac{6}{2}\cdot\frac{2\pi}{p}-2\pi=\pi\frac{6-2p}{p}$$

а число всех гексагоноэдров

$$Q=\frac{2\pi}{\frac{\pi(6-2p)}{p}}=\frac{2p}{6-2p}$$

Очевидно, что отсюда никаких новых случаев не выведем, и вообще для цикла из m осей найдем величину m-гоноэдра

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{\pi}{p}-(m-2)\frac{2\pi}{2}=\pi\frac{2m-(m-2)p}{2p}$$

а число всех m-гоноэдров.

$$Q=2\pi/\pi\frac{2m-(m-2)p}{2p}=\frac{4p}{2m-(m-2)p}$$

Отсюда видим, что если $m > 6$, например $m = 6 + m'$, то знаменатель этой дроби становится отрицательным, а именно

$$12 - 4p - m'(p - 2)$$

для наглядности величины Q представим в виде:

$$1 \Big/ \left\{ \frac{3}{p} - 1 - \frac{m'}{4}\left(1 - \frac{2}{p}\right) \right\}$$

Так как p необходимо больше 6, то знаменатель дроби необходимо отрицателен, и, значит, никакие новые случаи вообще невозможны.

Если оставим в стороне симметрию шара, то будем иметь всего 3 случая:

1) 4 тройные оси y, расположенные как нормали к граням тетраэдра; столько же и такого же наименования осей z, совпадающих с осями y в противоположных направлениях, и 3 парные оси v, расположенные как прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра.

По формуле (10) получим тожество:

$$12 = 4 \times 3 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$$

По формуле (11) получаем невозможность,

$$11 = 4 \times 2 + 4 \times 2 + 3 \times 1$$

показывающую совпадение осей y и z.

2) 3 четверные оси y, расположенные как нормали к граням куба, 4 тройные оси z, расположенные как его диагонали, и 6 двойных осей v, расположенных как прямые, соединяющие середины его противоположных ребер. Все оси парные, так как в плоскости, перпендикулярной каждой оси, имеются двойные (или четверные) оси.

По формуле (10) получаем тожество

$$24 = 3 \times 2 \times 4 = 4 \times 2 \times 3 = 6 \times 2 \times 2$$

а по формуле (11) тожество

$$23=3\times3+4\times2+6\times1$$

3) 6 пятерных осей p, расположенных как нормали к граням правильного додекаэдра, 10 тройных осей z, расположенных как прямые, соединяющие противоположные вершины этой фигуры, и 15 двойных осей v, расположенных как прямые, соединяющие середины противоположных ребер той же фигуры. Все оси парные, о чем можно заключить по присутствию в правильном додекаэдре центра (обратного равенства). Из этого можно вывести как следствие присутствие двойных (или вообще четных) осей в плоскостях, перпендикулярных к каждой из осей.

По формуле (10) получаем тожество

$$60=6\times2\times5=10\times2\times3=15\times2\times2$$

По формуле (11) получаем тожество

$$59=6\times4+10\times2+15\times1$$

Таким образом, и в этих трех случаях никаких осей симметрии, кроме уже выведенных, существовать не может.

Теперь обратимся к аналитическому выражению симметрии всех этих случаев. Во всех трех случаях за оси координат мы можем принять оси симметрии y наивысшего наименования, и при этом число осей будет наименьшее. Выразив положение какой-нибудь точки в координатах трех ближайших осей и написав

$$y=b;\quad y_0=\overset{p}{b}_i;\quad y_1=\overset{p}{b}_{i+1}$$

мы, очевидно, будем иметь столько таких равенств, сколько имеется равных осей y. Если притом все оси парные, то, считая каждую такую ось за одну, мы, очевидно, должны удвоить число равенств, прибавляя

$$y = -b; \quad y_0 = -\overset{p}{b}_i; \quad y_1 = -\overset{p}{b}_{i-1}$$ [1])

Чтобы выразить все это, мы можем написать

$$(P')\, y = n^k b; \quad y_0 = n^k \overset{p}{b}_i; \quad y_1 = n^k \overset{p}{b}_{i+n}. \qquad (12)$$

Здесь (P') напоминает, что таких равенств имеется числом P', и притом, так как оси расположены как ребра центральных гоноэдров правильных многогранников,то вывести координаты по одним в других не представит никакого затруднения. Величина n равна единице в случае непарных осей, а в случае парных она равна — 1, а величина k равна 0 или единице.

Начнем с первого случая. Имеем

$$(4)\, y = b; \quad y_0 = \overset{3}{b}_i; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+1} \qquad (13)$$

Означив 4 оси симметрии этого случая y_a, y_b, y_c, $y_д$ (фиг. 1) и приняв сначала y_a за ось y, а y_b, y_c и $y_д$ за y_0, y_1 и y_2, из равенства (13) прежде всего находим три точки:

1) $(b_a, b_b, b_c$; 2) $(b_a, b_c, b_д)$; 3) $(b_a, b_д, b_b)$

где буквы соответствуют последовательности осей координат y, y_0, y_1.

Приняв затем y_b за ось y, мы этим самым производим поворот на 180° около двойной оси, делящей пополам угол между y_a и y_b, а потому из того же равенства (13) получаем 3 новые точки, если подставим b_b вместо b_a и обратно, и $b_д$ вместо b_c и обратно, т. е. получим точки:

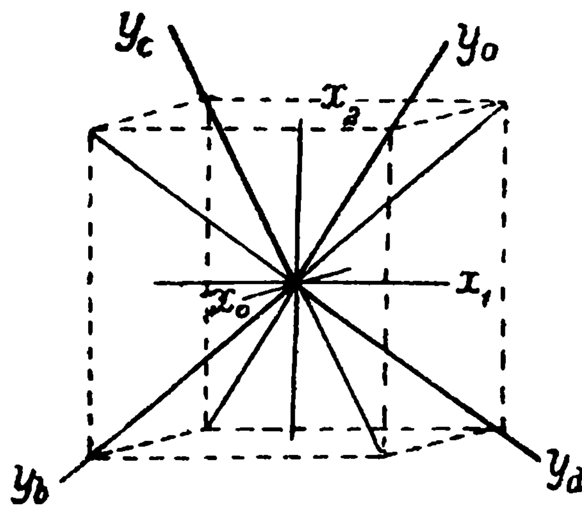
4) $(b_b, b_a, b_д)$; 5) $(b_b; b_д, b_c)$; 6) (b_b, b_c, b_a)

---

[1]) Пишу b_{i-1} потому, что тригоноэдр, образуемый положительными направлениями осей, не равен, а симметричен тригоноэдру, образуемому отрицательными направлениями осей; совмещения в прямой последовательности произвести, значит, нельзя: но как правильные их можно совместить в обратной последовательности ребер.

Приняв далее ось y_c за ось y, мы также найдем три новые точки, если подставим b_c вместо b_a и b_∂ вместо b_b и обратно, т. е. получим

7) (b_c, b_∂, b_a); 8) (b_c, b_a, b_b); 9) (b_c, b_b, b_∂)



Фиг. 1.

Наконец, приняв ось y_∂ за ось y, мы должны подставить b_∂ вместо b_a и b_c вместо b_b, и обратно, и получим

10) $(b_\partial b_c b_b)$; 11) $(b_\partial b_b b_a)$; 15) $(b_\partial b_a b_c)$

Таким образом мы нашли положение всех 12 точек, соответственно величине симметрии, в четырех координатах. Если даны три из них, то четвертая легко находится по общей формуле

$$y_i \operatorname{Sn}(y_0 y_1 y_2) = y_0 \operatorname{Sn}(y_i y_1 y_2) + y_1 \operatorname{Sn}(y_0 y_i y_2) + y_2 \operatorname{Sn}(y_0 y_1 y_i)$$

Например, если пожелаем выразить величину координаты b_∂ в величинах $(b_a b_b b_c)$, то будем иметь

$$b_\partial \operatorname{Sn}(b_a b_b b_c) = b_a \operatorname{Sn}(b_\partial b_b b_c) + b_b \operatorname{Sn}(b_a b_\partial b_c) + b_c \operatorname{Sn}(b_a b_b b_\partial)$$

Приняв во внимание величины данного случая, получим

$$b_\partial \frac{4}{9}\sqrt{3} = -b_a \frac{4}{9}\sqrt{3} - b_b \frac{4}{9}\sqrt{3} - b_c \frac{4}{9}\sqrt{3}$$

или

$$b_\partial = -(b_a + b_b + b_a) \qquad (14)$$

Однако положение точки может быть дано в иных координатах. Пусть, например, оно дано в координатах (x_0, x_1, x_2), представляющих двойные оси симметрии данного случая. Допустим, кроме того, что и положение всех точек нужно выразить в этих же координатах. В таком случае координаты b_a, b_b и b_c найдем из равенств:

$$\left.\begin{aligned} b_a &= a_0 \operatorname{cs}(y_a x_0) + a_1 \operatorname{cs}(y_a x_1) + a_2 \operatorname{cs}(y_a x_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(a_0 + a_1 + a_2) \\ b_b &= a_0 \operatorname{cs}(y_b x_0) + a_1 \operatorname{cs}(y_b x_1) + a_2 \operatorname{cs}(y_b x_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-a_0 + a_1 - a_2) \\ b_c &= a_0 \operatorname{cs}(y_c x_0) + a_1 \operatorname{cs}(y_c x_1) + a_2 \operatorname{cs}(y_c x_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(a_0 - a_1 - a_2) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

а отсюда из (14)

$$b_d = \frac{1}{\sqrt{3}}(-a_0 - a_1 + a_2)$$

Подставив эти значения вместо соответствующих найденных значений координат 12 точек, мы выразим положение этих точек координатами на осях (y), но в величинах данных (x).

Чтобы отсюда перейти к координатам (x), имеем уравнения

$$x_0 \operatorname{Sn}(y_a y_b y_c) = y_a \operatorname{Sn}(x_0 y_b y_c) + y_b (y_a x_0 y_c) + y_c (y_a y_b x_0)$$

т. е. в данном случае

$$\left.\begin{aligned} x_0 \frac{4}{9}\sqrt{3} &= y_a \frac{2}{3} + y_b\, 0 + y_c \frac{2}{3}, \text{ т. е. } x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(y_a + y_c) \\ x_1 \frac{4}{9}\sqrt{3} &= y_a \frac{2}{3} + y_b \frac{2}{3} + y_c\, 0, \text{ т. е. } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(y_a + y_b) \\ x_2 \frac{4}{9}\sqrt{3} &= y_a\, 0 + y_b \frac{2}{3} + y_c \frac{2}{3}, \text{ т. е. } x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(y_b + y_c) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

6*

Равенства (15) и (16) отвечают на поставленный вопрос. Так для точки (1) по (15) найдем:

$$y_a = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_0 + a_1 + a_2); \qquad y_b = \frac{1}{\sqrt{3}}(-a_0 + a_1 - a_2)$$

и

$$y_c = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_0 - a_1 - a_2)$$

Подставляя эти значения в (16), найдем:

$$x_0 = a_0; \qquad x_1 = a_1 \quad \text{и} \quad x_2 = a_2$$

Так же найдем для 2-й точки $(a_2 a_0 a_1)$, для 3-й точки $(a_1 a_2 a_0)$, для 4-й $(-a_0 a_1 - a_2)$, для 5-й $(-a_2 - a_0 a_1)$, для 6-й $(a_1 - a_2 - a_0)$, для 7-й $(a_0 - a_1 - a_2)$, для 8-й $(-a_2 a_0 - a_1)$, для 9-й $(-a_1 - a_2 a_0)$, для 10-й $(-a_0 - a_1 a_2)$, для 11-й $(a_2 - a_0 - a_1)$, для 12-й $(-a_1 a_2 - a_0)$.

Рассматривая внимательно полученные 12 выражений, найдем, что они вместо (13) могут быть выражены также равенствами

$$x_0 = n^j \overset{3}{a_i}; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1}; \quad x^2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2} \qquad (17)$$

а эти равенства, как нетрудно видеть, выражают в свою очередь присутствие двойных осей симметрии (x_0, x_1 и x_2) и тройной оси, расположенной по прямой, имеющей уравнением

$$x_0 = x_1 = x_2$$

Симметрия этого случая известна под именем тетартоэдрии кубооктаэдрической системы.[1]

Во втором случае имеем

$$(3) \quad y = n^k b; \qquad y_0 = n^k \overset{4}{b}_i; \qquad y_1 = n^k \overset{4}{b}_{i+n^k} \qquad (18)$$

С помощью этих равенств нетрудно по данным координатам одной какой-нибудь точки вывести координаты всех

[1] L. c., § 42.

24 точек соответственно величине симметрии этого случая. Но так как в этом случае фигура имеет парные оси симметрии, то достаточно вывести координаты 12 точек, а остальные 12 получим, переменив в первых все знаки и одновременно изменив последовательность двух координат.

Приняв за ось y ось y_a (ось x_2 фиг. 1), а оси y_b и y_c (x_0 и x_1, фиг. 1) за оси y_0 и y_1, из (18) найдем сначала 4 точки:

1) $(b_a b_b b_c)$; 2) $(b_a b_c - b_b)$; 3) $(b_a - b_b - b_c)$; 4) $(b_a - b_c b_b)$

Приняв далее y_b за ось y, а оси y_a и y_c за оси y_0 и y_1, мы должны подставить b_b вместо b_a и обратно, а в b_c переменить знак, и таким образом получим:

5) $(b_b b_a - b_c)$; 6) $(b_b - b_c - b_a)$; 7) $(b_b - b_a b_c)$; 8) $(b_b b_c b_a)$

Наконец, подставив b_c вместо b_a и обратно и переменив знаки b_b, найдем остальные:

9) $(b_c - b_b b_a)$; 10) $(b_c b_a b_b)$; 11) $(b_c b_b - b_a)$; 12) $(b_c - b_a - b_b)$

Наконец нетрудно видеть, что симметрия этого случая отличается от симметрии предыдущего только возможностью совмещать тригоноэдры, образуемые положительными направлениями, с тригоноэдрами, образуемыми отрицательными направлениями тех же осей, меняя при этом последовательность координат, а потому симметрию этого случая кроме равенств (18) в тех же трех прямоугольных координатах удобно выразить и так:

$$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a_i}; \quad x_1 = n^{k+l} \overset{3}{a}{}_{i+n}^{\,l}; \quad x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}{}_{i+2n}^{\,l} \qquad (19)$$

Взяв сначала $j = k = l = 0$, найдем три точки:

1) $(a_0 a_1 a_2)$; 2) $(a_1 a_2 a_0)$; 3) $(a_2 a_0 a_1)$

Взяв далее $j = 1$, из этих 3 получим еще 3:

4) $(-a_0 a_1 - a_2)$; 5) $(-a_1 a_2 - a_0)$; 6) $(-a_2 a_0 - a_1)$

Взяв еще $k=1$, из предыдущих 6 найдем еще 6:

7) $(a_0 - a_1 - a_2)$; 8) $(a_1 - a_2 - a_0)$; 9) $(a_2 - a_0 - a_1)$;
10) $(- a_0 - a_1 a_2)$; 11) $(- a_1 - a_2 a_0)$; 12) $(- a_2 - a_0 a_1)$

Наконец, присоединив $l=1$, получим остальные:

13) $(- a_0 - a_2 - a_1)$; 14) $(- a_1 - a_0 - a_2)$; 15) $(- a_2 - a_1 - a_0)$;
16) $(a_0 a_2 - a_1)$; 17) $(a_1 a_0 - a_2)$; 18) $(a_2 a_1 - a_0)$;
19) $(- a_0 a_2 a_1)$; 20) $(- a_1 a_0 a_2)$; 21) $(- a_2 a_1 a_0)$;
22) $(a_0 - a_2 a_1)$; 23) $(a_1 - a_0 a_2)$; 24) $(a_2 - a_1 a_0)$

Симметрия этого случая известна под именем *гидроэдрической гемиэдрии кубооктаэдрической* системы.[1])

В третьем случае имеем:

$$(6)\quad y = n^k b;\quad y_0 = n^k \overset{5}{b_i};\quad v_1 = n^k \overset{5}{b}_{i+n^k} \qquad (20)$$

Так как в этом случае фигура имеет все оси парные, то ограничусь выводом 30 точек, т. е. ограничусь случаем $k=0$, так как из них нетрудно непосредственно найти координаты остальных 30 точек. Взяв сначала ось y_a (фиг: 2) за ось y, найду;

1) $(b_a b_b b_c)$; 2) $(b_a b_c b_д)$; 3) $(b_a b_д b_e)$; 4) $(b_a b_e b_f)$; 5) $(b_a b_f b_b)$

Приняв далее за ось y ось y_b, что соответствует повороту на 180° около оси, делящей пополам углы между y_a и y_b. мы очевидно должны в эти 5 выражений внести b_a вместо b_b и обратно, а также b_f вместо b_c и обратно, и, наконец, переменить знаки $b_д$ и b_e.

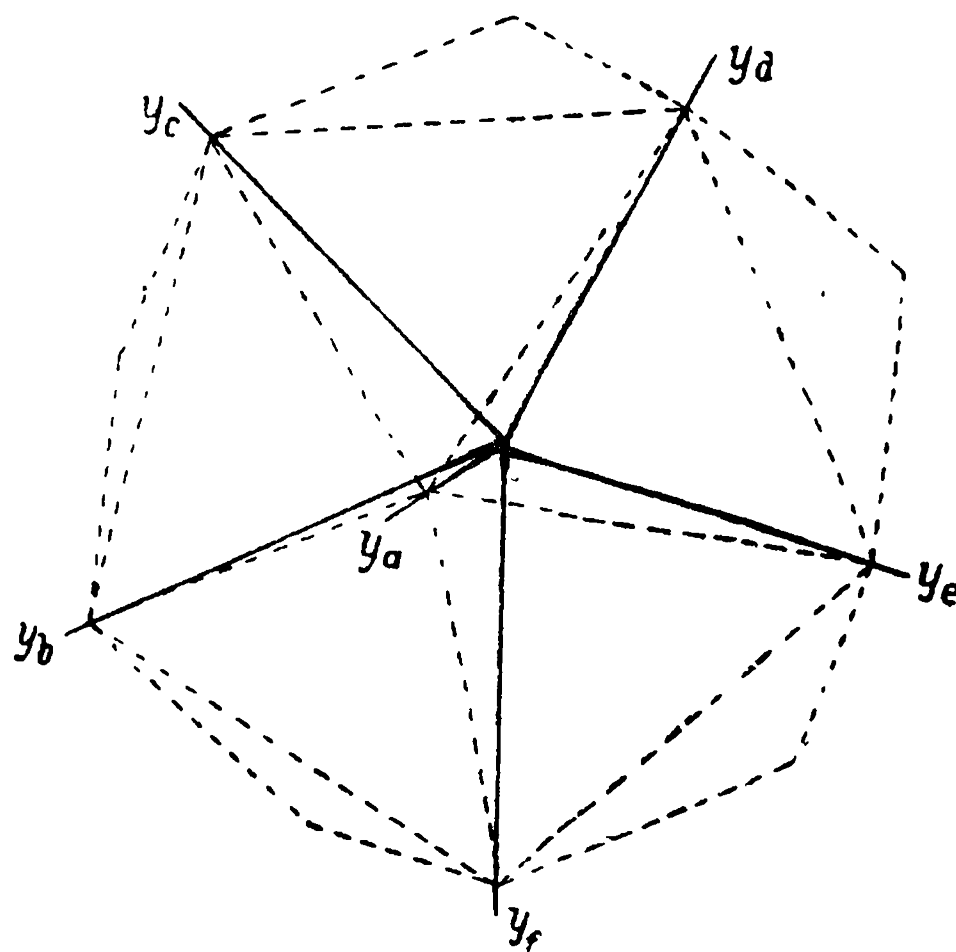
Сделав это, получим:

6) $(b_b b_a b_f)$; 7) $(b_b b_f \cdot - b_д)$; 8) $(b_b \cdot - b_д \cdot - b_e)$;
9) $(b_b \ - b_e \cdot b_c)$; 10) $(b_b \cdot b_c \cdot b_a)$

1) L. c., § 41.

Так же найдем

11) $(b_c \cdot b_\partial \cdot b_a)$; 12) $(b_c \cdot b_a \cdot b_b)$; 13) $(b_c \cdot b_b \cdot -b_e)$;
14) $(b_c \cdot -b_e \cdot -b_f)$; 15) $(b_c \cdot -b_f \cdot b_\partial)$;
16) $(b_\partial \cdot -b_b \cdot b_e)$; 17) $(b_\partial \cdot b_e \cdot b_a)$; 18) $(b_\partial \cdot b_a \cdot b_c)$;
19) $(b_\partial \cdot b_c \cdot -b_f)$; 20) $(b_\partial \cdot -b_f \cdot -b_b)$;
21) $(b_e \cdot -b_b \cdot -b_c)$; 22) $(b_e - b_c \cdot b_f)$; 23) $(b_e \cdot b_f \cdot b_a)$;
24) $(b_e \cdot b_a \cdot b_\partial)$; 25) $(b_e \cdot b_\partial \cdot -b_b)$;
26) $(b_f \cdot b_e \cdot -b_c)$; 27) $(b_f \cdot -b_c \cdot -b_\partial)$ 28) $(b_f \cdot -b_\partial \cdot b_b)$;
29) $(b_f \cdot b_b \cdot b_a)$; 30) $(b_f \cdot b_a \cdot b_e)$



Фиг. 2

Симметрия этого случая известна под именем *гемиэдрии додекаэдроикосаэдрической* системы. [1]

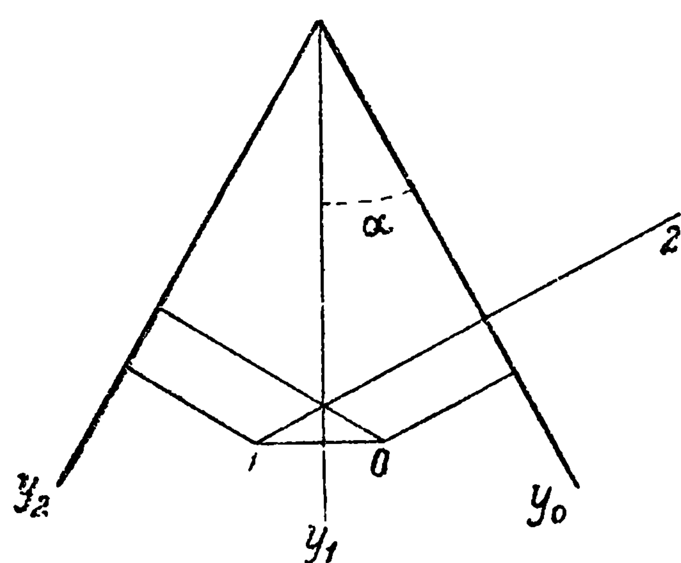
Резюмируя все возможные системы осей симметрии конечных фигур, мы находим: 1) существует всего одна ось наименования от 2 до ∞; 2) к ней присоединяются двойные

[1] L. c., § 43.

оси в плоскости к ней перпендикулярной; 3) тетартоэдрия кубооктаэдрической системы; 4) гироэдрическая гемиэдрия той же системы и 5) гемиэдрия додекаэдроикосаэдрической системы.

ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ

§ 5. Если существует какая-нибудь плоскость симметрии, то из присутствия одной данной точки выводится присутствие другой, находящейся на одном с данною перпендикуляре к плоскости симметрии и на равном с нею расстоянии от этой плоскости, но с другой стороны последней.



Фиг. 3.

Если примем за оси координат прямую y, перпендикулярную плоскости, и две прямые z и v, находящиеся в этой плоскости, то ясно, что присутствие плоскости симметрии выразится равенствами

$$y = n^k b; \qquad z = c; \qquad v = d \tag{21}$$

Допустив, что фигура обладает больше чем одною плоскостью симметрии, то вообще из положения одной данной точки мы выведем ряд точек. Примем за ось y прямую пересечения двух данных плоскостей симметрии; если же в одной прямой пересекаются не две, а большее число плоскостей симметрии, то возьмем в соображение какие-нибудь две плоскости, образующие друг с другом наименьший угол α (фиг. 3). За оси y_0 и y_1 примем прямые пересечения этих двух плоскостей с плоскостью, перпендикулярною к оси y; две оси, y_0 и y_1, образуют, следовательно, угол α; возьмем еще третью ось координат y_2 в той же плоскости и притом так, чтобы угол $y_0y_1 = y_1y_2 = \alpha$.

Из координат данной точки:

$$y=b; \qquad y_0=b_0; \qquad y_1=b_1$$

выведем [1]

$$b_2 \operatorname{sn} \alpha = -b_0 \operatorname{sn} \alpha + b_1 \operatorname{sn} 2\alpha \tag{22}$$

или

$$b_2 = -b_0 + 2b_1 \operatorname{cs} \alpha$$

Означу данную точку через 0; из нее и плоскости симметрии, проходящей через ось y_1, выведется точка 1; из последней и плоскости симметрии, проходящей через ось y_0, выведется в свою очередь точка 2; из последней и плоскости симметрии, проходящей через ось y_1, выведется опять точка 3, и т. д.

Отсюда для точки 0 получим: $y=b$; $y_0=b_0$; $y_1=b_1$; $y_2=b_2$

» » » 1 » $y=b$; $y_0=b_2$; $y_1=b_1$; $y_2=-b_2+2b_1 \operatorname{cs} \alpha$

» » » 2 » $y=b$; $y_0=b_2$; $y_1=-b_1+2b_2 \operatorname{cs} \alpha$; $y_2=-2b_1 \operatorname{cs} \alpha + b_2(2\operatorname{cs} 2\alpha+1) = -b_0+2b_2 \operatorname{cs} 2\alpha$

» » » 3 » $y=b$; $y_0=-2b_1 \operatorname{cs} \alpha + b_2(2\operatorname{cs} 2\alpha+1) = -b_0+2b_2 \operatorname{cs} 2\alpha$; $y_1=-b_1+2b_2 \operatorname{cs} \alpha$ $y_2=b_2$

» » » 4 » $y=b$; $y_0=-b_0+2b_2\operatorname{cs}2\alpha$ $y_1=-b_1[\operatorname{cs}(2\alpha)+1]+4b_2 \operatorname{cs} 2\alpha \operatorname{cs} \alpha$ $y_2=-2b_0 \operatorname{cs} 2\alpha + b_2(4\operatorname{cs}^2 2\alpha - 1)$ (A)

и т. д.

[1] Основные формулы аналитической геометрии, III, формула (1а).

Но, сделав в равенствах (3b) i последовательно равным 0, 1, 2 и т. д., получим:

$$y_0 = y_0; \quad y_1 = y_1; \quad y_2 = -y_0 + 2y_1 \operatorname{cs}\frac{2\pi}{p};$$

$$y_3 = -2y_0 \operatorname{cs}\frac{2\pi}{p} + y_1\left(4\operatorname{cs}^2\frac{2\pi}{p} - 1\right)$$

и т. д., т. е. для координат точек, выводящихся из оси симметрии наименования p, найдем последовательно:

$$\left.\begin{array}{l} y = b; \quad y_0 = b_0; \quad y_1 = b_1 \\ y = b; \quad y_0 = b_1; \quad y_1 = -b_0 + 2b_1 \operatorname{cs}\frac{2\pi}{p} \\ y = b; \quad y_0 = -b_0 + 2b_1 \operatorname{cs}\frac{2\pi}{p} \\ y_1 = -2b_0 \operatorname{cs}\frac{2\pi}{p} + b_1\left(4\operatorname{cs}^2\frac{2\pi}{p} - 1\right) \end{array}\right\} \quad \text{(B)}$$

. . . .

Сравнивая выражения (A) и (B), найдем, что они станут тожественными, если примем в (A) ось y_2 за ось y_1 и угол 2α за угол $\frac{2\pi}{p}$, а так как равенства (B) выражают присутствие оси симметрии y наименования p, то отсюда заключаем, что и равенства (A) выражают, что ось y есть ось в 2α, т. е. *две плоскости симметрии, пересекающиеся под наименьшим углом α, необходимо имеют своею прямою пересечения ось симметрии в 2α или наименования $p = \frac{\pi}{\alpha}$.*

Отсюда следует, что для того, чтобы получить все возможные комбинации осей и плоскостей симметрии, достаточно во всех рассмотренных уже случаях прибавить всего одну плоскость симметрии, положение которой избрано таким образом, чтобы из ее присутствия не вытекала необходимость образования новых осей симметрии, так как все возможные системы этих осей, независимо от плоскостей

симметрии, и составляют совокупность рассмотренных нами раньше случаев.

§ 6. Если прибавим плоскость симметрии, перпендикулярную к оси симметрии, то на основании (4) никаких новых плоскостей симметрии не выведем; если прибавим плоскость симметрии, проходящую через ось симметрии наименования p, то отсюда выведется ряд плоскостей симметрии, пересекающихся в той же оси под наименьшим углом $\frac{\pi}{p}$. Если прибавим плоскость симметрии под углом к оси симметрии наименования p, то отсюда выведем p плоскостей симметрии, пересекающихся в осях симметрии другого рода и притом наклонных к первоначально взятой оси симметрии, и, значит, такое прибавление возможно вообще лишь в тех случаях, когда имеется не меньше двух осей симметрии наименования высшего чем 2.

Прибавив плоскость симметрии, перпендикулярную к единичной оси наименования p, мы вместо равенств (2) получим

$$y = n^k b; \quad y_0 \overset{p}{=} b_i; \quad y_1 \overset{p}{=} b_{i+1} \tag{23}$$

Если притом эта ось двойная (т. е. $p = 2$), то вместо (5) найдем;

$$y = n^k b; \quad y_0 \overset{2}{=} b_i; \quad z_0 \overset{2}{=} c_l \tag{24}$$

Так как в равенствах (23) и (24) оси координат y_0, y_1 и z_0 предполагаются находящимися в плоскости, перпендикулярной к оси y, т. е. в плоскости симметрии, то удобнее последнее из них написать в такой форме:

$$y = n^k b; \quad y_0 = n^i b_0; \quad z_0 = n^i c_0 \tag{24a}$$

Теперь прибавим плоскость симметрии, проходящую через единичную ось симметрии, и расположим оси координат так, чтобы эта плоскость делила пополам углы между плоскостью, проходящею через ось симметрии и ось y_0

и через ту же ось симметрии и ось y_1. Ясно, что при таких предположениях из присутствия какой-нибудь точки

$$y=b; \qquad y_0=b_0; \qquad y_1=b_1 \tag{25}$$

и плоскости симметрии выведется присутствие другой точки

$$y=b; \qquad y_0=b_1; \qquad y_1=b_0 \tag{25a}$$

Здесь оси y_0, y_1, ... могут и не находиться в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии y.

Равенства (25) и (25a) совместно с (2) могут быть заменены одним:

$$y=b; \quad y_0=\overset{p}{b_i}; \quad y_1=\overset{p}{b}_{i+n}{}^{k} \tag{25b}$$

На основании выведенного выше свойства плоскостей симметрии, пересекающихся в оси симметрии, можно предвидеть, что кроме плоскостей симметрии, расположенных посредине между осями координат, должны существовать и плоскости симметрии, проходящие через самые оси. Чтобы последнее имело место, необходимо, чтобы кроме точки

$$y=b; \; y_0=b_{i-1}; \; y_1=b_i; \; y_2=b_{i+1} \tag{a}$$

существовала еще точка

$$y=b; \; y_0=b_{i+1}; \; y_1=b_i; \; y_2=b_{i-1} \tag{b}$$

И действительно, равенства (a) получаются из (25b), если внесем в него $i-1$ вместо i и сделаем $k=0$, а равенства (b) получаются из него же, если внесем $i+1$ вместо i и сделаем $k=1$.

Если ось симметрии двойная, то, приняв за оси координат прямые y_0 и z_0, взаимно-перпендикулярные и находящиеся в плоскости, перпендикулярной к двойной оси y, и если притом плоскость симметрии проходит через ось y_0, вместо равенства (5), которое можем представить в виде

$$y=b; \; y_0=n^i b_0; \; z_0=n^i c_0$$

мы получим теперь

$$y=b;\ y_0=n^i b_0;\ z_0=n^{i+k}c_0 \tag{26}$$

Подставив l вместо $i+k$, то же равенство (26) примет вид

$$y=b;\ y_0=n^{l-k}b_0;\ z_0=n^i c_0$$

а отсюда прямо заключаем, что и плоскость, проходящая через ось z_0, есть тоже плоскость симметрии.

§ 7. Теперь обратимся к случаям, когда кроме главной оси наименования p имеются еще (побочные и промежуточные) двойные оси в плоскости, к ней перпендикулярной.

Мы, очевидно, можем к этой системе осей прибавить плоскость симметрии, перпендикулярную к главной оси; и в таком случае вместо равенства (8b) найдем:

$$y=n^{k+l}b;\ y_0=\overset{p}{c_i};\ y_1=\overset{p}{c}_{i+n}{}^{k} \tag{27}$$

Если и главная ось двойная, то вместо равенств (9) получим:

$$y=n^{i+l}b;\ z=n^k c;\ v=n^{i+k}\partial \tag{28}$$

Эти равенства проще представить в виде

$$y=n^i b;\ z=n^k c;\ v=n^l \partial \tag{28a}$$

из которого прямо видим, что в этом случае имеются три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии.

Но и в равенствах (27) также заключаются выражения всех плоскостей симметрии, проходящих через главную ось, и все двойные оси симметрии, в чем нетрудно убедиться, сделав одновременно $k=l=0$ или $k=l=1$ и сравнив эти выражения с равенствами (25b).

Таким образом, кроме рассмотренных случаев остается еще возможность прибавить плоскость симметрии, проходящую через главную ось посредине между двумя ближайшими двойными осями симметрии.

Ввиду того, что в этом случае должно происходить замещение в выражениях осей координат, представляющих неравные двойные оси симметрии, мы для простоты вместо последовательности

$$b_i,\ c_i,\ b_{i+1},\ c_{i+1}\ldots$$

напишем так:

$$b_i,\ b_{i+\frac{1}{2}}\ b_{i+1},\ b_{i+\frac{3}{2}}\ldots$$

При этом способе выражения мы из данной точки

$$y=b;\ y_0=b_i;\quad y_1=b_{i+\frac{1}{2}} \qquad \text{(a)}$$

и плоскости симметрии, проходящей через главную ось y в средине между двойными осями y_0 и y_1, выведем другую точку

$$y=b;\ y_0=b_{i+\frac{1}{2}},\ y_1=b_i \qquad \text{(b)}$$

а из той же точки (a) и двойной оси y_0 по (8b) выведем еще точку

$$y=-b;\ y_0=b_i;\ y_1=b_{i-\frac{1}{2}} \qquad \text{(c)}$$

Сравнивая выражения (b) и (c), мы находим, что в данном случае можно принять сложную симметрию, и притом главную ось за ось сложной симметрии наименования $2p$ (вместо p), а перпендикулярную к ней плоскость за плоскость сложной симметрии; а потому, приняв теперь за оси y_i, y_{i+1}, ... то, что мы только что обозначили через y_i, $y_{i+\frac{1}{2}}$, ..., найдем:

$$y=n^{i+k}b;\ y_0=\overset{2p}{b_i},\ y_1=\overset{2p}{b}_{i+n^k} \qquad (29)$$

Сделав в этих равенствах, предполагая четное i, $k=0$, найдем (a); сделав $k=1$, найдем (c); заместив i через $i+1$ и сделав $k=1$, найдем (b).

§ 8. Теперь перейдем к случаям, когда по крайней мере две оси имеют наименование выше 2.

В этих случаях мы, очевидно, можем прибавить плоскость симметрии по одной из граней гоноэдра, составленного из трех ближайших осей симметрии высшего наименования p, или по одной из плоскостей, делящих угол между этими двумя гранями пополам; но на основании доказанной выше теоремы это одно и то же, так как из существования плоскостей симметрии по граням этого гоноэдра, образующим внутренний угол $\frac{2\pi}{p}$, необходимо следует присутствие плоскостей симметрии промежуточных, образующих с первым углом $\frac{1}{2}\frac{2\pi}{p}$ и кратные. Первые плоскости проходят через оси наименования p и v, вторые — через оси p и q. Для краткости будем называть первые — главными, а вторые — промежуточными плоскостями симметрии. Ясно, что если числа p и q отличаются друг от друга, то вообще кроме этих никаких плоскостей симметрии прибавить нельзя. Если же $p=q$ (случай тетартоэдрии кубооктаэдрической системы), то мыслимо прибавление плоскостей симметрии особого положения.

Начнем с последнего случая. Прибавив промежуточную плоскость симметрии, мы получим вместо (13)

$$(4)\ y=b;\ y_0=\overset{3}{b}_i;\ y_1=\overset{3}{b}_{i+n^k} \tag{30}$$

а вместо (17)

$$x_0=n^j\overset{3}{a}_i;\ x_1=n^k\overset{3}{a}_{i+n^l};\ x_2=n^{j+k}\overset{3}{a}_{i+2n^l} \tag{31}$$

Этот случай носит название *тетраэдрической гемиэдрии кубооктаэдрической* системы.[1]

Так как в этом случае $p=q=3$, то мы не вызовем образования новых осей симметрии, если прибавим плоскости симметрии, проходящие через двойные оси симметрии. Для выражения этого вида симметрии очень удобно

[1] Начала учения о фигурах, § 39.

воспользоваться равенствами (17), так как в них мы должны внести выражения плоскостей симметрии, перпендикулярных к осям координат, а потому получим:

$$x_0 = \overset{3}{n^j a_i};\ x_2 = \overset{3}{n^k a_{i+1}};\ x_2 = \overset{3}{n^l a_{i+2}} \qquad (32)$$

Этот случай носит название *додекаэдрической гемиэдрии кубооктаэдрической* системы.[1]

В случае гироэдрической гемиэдрии кубооктаэдрической системы $p=4$, $q=3$ и, прибавив промежуточную плоскость симметрии вместо (18), получим:

$$(3)\ y = n^k b;\ y_0 = \overset{4}{n^k b_i};\ y_1 = \overset{4}{n^k b_{i+n^l}} \qquad (33)$$

а вместо (19), если принять во внимание, что теперь изменение последовательности координат может и не сопровождаться изменением всех знаков, получим:

$$x_0 = \overset{3}{n^j a_i};\ x_1 = \overset{3}{n^k a_{i+n^m}};\ x_2 = \overset{3}{n^l a_{i+2n^m}} \qquad (34)$$

Здесь i имеет 3 значения, j, k, l и m каждое по два значения — 0 или 1, и потому величина симметрии в этом случае 48.

Этот случай носит название *гомоэдрии кубооктаэдрической* системы.[2]

Наконец в случае гемиэдрии додекаэдроикосаэдрической системы, прибавляя промежуточные плоскости симметрии, мы вместо (20) найдем:

$$(6)\ y = n^k b;\ y_0 = \overset{5}{n^k b_i}\ y_1 = \overset{5}{n^k b_{i+n}} \qquad (35)$$

В этом случае, так же как и в двух предыдущих, фигура обладает центром (обратного равенства), так как мы можем одновременно менять знаки всех координат, не изменяя их величины и последовательности.

[1] L. c., § 40.
[2] L. c., § 38.

Этот случай носит название *гомоэдрии додекаэдроикосаэдрической системы,* [1] и его величина симметрии 120.*

Никакие комбинации осей и полуплоскостей симметрии, кроме уже приведенных, невозможны.

Во всех случаях, прибавляя плоскость симметрии, мы увеличиваем величину симметрии вдвое, а потому для всех этих случаев вместо (11) получим

$$S=2[1+P'(p-1)+Q'(q-1)+R'(r-1)] \qquad (36)$$

а вместо (10)

$$S=2Pp=2Qq=2Rr \qquad (37)$$

Ясно также, что во всех этих случаях первоначальная плоскость симметрии только одна, а все остальные равнодействующие.

СЛОЖНАЯ СИММЕТРИЯ

§ 9. По самому определению симметрической фигуры совмещения ее с самой собою могут быть двоякого рода — или совмещения производятся непосредственно вращением около какой-нибудь оси симметрии: точки, выводящиеся таким образом из одной данной, связаны между собой симметрией совмещения; или же совмещение может быть произведено лишь после замены данной фигуры ей симметричною по отношению к какой-нибудь плоскости симметрии: система точек, получающихся таким образом, связана с предыдущею простою симметрией. Число точек той и другой системы одинаково уже потому, что для тех и других одинаково применимы все движения, приводящие к простому совмещению.

Сложная симметрия возникает тогда, когда движение совмещения фигуры с самою собой не может быть составлено из имеющихся осей и плоскостей симметрии.

Однако она не может существовать, если имеется хоть одна плоскость симметрии. В самом деле, означив точки фигуры, связанные симметрией совмещения, через A, B, ..., E, ..., а симметричные к ним по отношению к имеющейся плоскости симметрии через A', B', ..., E', ..., мы найдем, что для совмещения какой угодно точки первой системы, например A, с какою угодно точкой второй системы, например E', должны сначала повернуть фигуру около некоторой оси симметрии и совместить ее сначала с точкой E, а затем заменить фигуру ей симметричною по отношению к данной плоскости симметрии, и через это точка A совместится с E'.

Вообще комбинация оси и плоскости сложной симметрии может быть только одна. В самом деле, если данная фигура, не обладающая вовсе плоскостями симметрии, имеет сложную симметрию такого свойства, что из точки A вращением около оси сложной симметрии и заменой симметричной ей точкой по отношению к плоскости сложной симметрии мы получим точку A', из B — B', ..., то для совмещения какой угодно точки одной системы, например A, с какой угодно точкой второй системы, например E', нам достаточно сначала повернуть фигуру около некоторой оси симметрии, чтобы привести к совмещению точки A с E, а затем при помощи движения сложной симметрии приведем A в совмещение и с точкой E'.

Отсюда заключаем, что случаи сложной симметрии, которые предстоит вывести, могут существовать только изолированно, так как прибавление не только плоскости, но и оси симметрии из одной оси и плоскости симметрии вызовет присутствие нескольких таких осей и плоскостей, кроме того случая, когда прибавляемая ось симметрии совпадает с осью сложной или прибавляются двойные оси в плоскости, перпендикулярной к оси сложной симметрии.

Рассмотрим сначала случаи сложной симметрии в отдельности. Очевидно, что здесь возможны лишь 3 предположения: 1) плоскость сложной симметрии проходит через ось

сложной симметрии, 2) она наклонна к этой оси, и 3) она перпендикулярна к этой оси.

Для изучения первого предположения допущу, что дана ось наименования p, и возьму за оси координат: за ось y самое ось сложной симметрии, за оси y_i и y_{i+1} — такие две прямые в плоскости, перпендикулярной к первой оси, чтобы угол между ними был равен $\frac{2\pi}{p}$ и чтобы плоскость сложной симметрии проходила между ними посредине, т. е. под углом $\frac{\pi}{p}$ к той и другой, и кроме того подразумеваю ряд других осей координат под равными углами и в последовательности

$$y_{i-1},\ y_i,\ y_{i+1},\ y_{i+2},\ \ldots$$

Чтобы вывести из данной точки

$$y=b;\ y_i=b_i;\ y_{i+1}=b_{i+1};\ y_{i+2}=p_{i+2} \qquad \text{(a)}$$

другую по данным условиям, повернем сначала фигуру около оси симметрии на угол $\frac{2\pi}{p}$ и найдем точку

$$y=b;\ y_i=b_{i+1};\ y_{i+1}=b_{i+2};\ y_{i+2}=b_{i+3}$$

и заменим полученную точку ей симметричною по отношению к плоскости сложной симметрии — и получим:

$$y=b;\ y_i=b_{i+2};\ y_{i+1}=b_{i+1};\ y_{i+2}=b_i,\ \ldots \qquad \text{(b)}$$

Сравнивая (b) с (a), находим, что в этом случае существует обыкновенная плоскость симметрии, проходящая через ось y_{i+1}, т. е. образующая с данной плоскостью сложной симметрии угол $\frac{\pi}{p}$. Этот случай не приводит ни к чему новому ни для каких значений p. Если $p=2$, то

плоскость обыкновенной симметрии перпендикулярна к предполагаемой плоскости сложной симметрии. [1])

Для изучения второго предположения я допущу сначала, что данная ось сложной симметрии имеет наименование $p>2$, и заменю на время плоскость сложной симметрии обыкновенною плоскостью симметрии. Через это число точек удвоится, ось сложной симметрии также станет обыкновенной осью симметрии, и кроме нее из плоскости симметрии выведется другая ось симметрии, относящаяся к ней как зеркальное изображение предмета к самому предмету. Если из данной точки A_1 и присутствия первой оси выведутся последовательно точки A_2, $A_3, \ldots$, то из этих точек и плоскости симметрии выведутся точки A_1', A_2', $A_3', \ldots$, из которых последние связаны друг с другом симметрией совмещения по второй оси. Чтобы отсюда снова перейти к сложной симметрии, мы должны последовательно пропускать точки и получим ряд A, A_1', A_2', $A_3', \ldots$, из которого усматриваем, что обе оси сложной симметрии остаются и притом они в то же время и обыкновенные оси симметрии наименования $\frac{p}{2}$. Этот случай не приводит, следовательно, ни к чему новому.

Если же данная ось сложной симметрии имеет наименование 2, то, приняв за оси координат данную ось сложной симметрии, которую означим через y_i, и симметричную к ней прямую по отношению к плоскости симметрии, и эту прямую примем за ось y_{i+1}, затем возьмем еще ряд координат в плоскости этих же осей, так чтобы они составляли равные углы в последовательности y_{i-1}, y_i, $y_{i+1}, \ldots$, и, наконец, за ось координат y примем перпендикуляр к плоскости первых осей.

---

[1]) Принять для оси сложной симметрии наименование единицу значит отрицать ее как ось симметрии, а плоскость сложной симметрии принять за обыкновенную плоскость симметрии.

В таком случае из какой-нибудь точки

$$y=b;\ y_{i-1}=b_{i-1};\ y_i=b_i;\ y_{i+1}=b_{i+1} \qquad (a)$$

вращая около данной оси y_i на угол π, выведем точку

$$y=-b;\ y_{i-1}=b_{i+1};\ y_i=b_i;\ y_{i+1}=b_{i-1} \qquad (b)$$

а заменяя полученную точку ей симметричною по отношению к плоскости сложной симметрии, найдем:

$$y=b;\ y_{i-1}=b_{i-3};\ y_i=b_{i-2};\ y_{i+1}=b_{i-1} \qquad (c)$$

Сравнивая выражения (a) и (c), находим, что в данном случае имеется ось симметрии y наименования высшего чем 1, если только угол между y_i и y_{i+1} меньше π. Наконец, в данном случае можно принять и ось y за ось сложной, а плоскость, проходящую через оси y_i, y_{i+1}, ... за плоскость сложной симметрии.

Таким образом и это предположение не приводит ни к чему новому, и остается только допустить перпендикулярность плоскости и оси сложной симметрии.

В этом последнем предположении из точки

$$y=b;\ y_{i-1}=b_{i-1};\ y_i=b_i;\ y_{i+1}=b_{i+1} \qquad (a)$$

где ось координат y относится к оси сложной симметрии, а оси y_{i-1}, y_i, y_{i+1} составляют друг с другом углы $\frac{2\pi}{p}$ и находятся в плоскости сложной симметрии, перпендикулярной к оси y, выведем точку

$$y=-b;\ y_{i-1}=b_i;\ y_i=b_{i+1};\ y_{i+1}=b_{i+2} \qquad (b)$$

Из точки (b) выведем в свою очередь точку

$$y=b;\ y_{i-1}=b_{i+1};\ y_i=b_{i+2};\ y_{i+1}=b_{i+3} \qquad (c)$$

и т. д.

Равенства (a) — (c) показывают, что оси сложной симметрии наименования p суть в то же время обыкновенные

оси симметрии наименования $\frac{p}{2}$, и таким образом комбинация осей сложной симметрии с обыкновенными выводится сама собой и выражается этими равенствами, которые можно заменить одним

$$y = n^i b; \; y_0 = \overset{p}{b_i}; \; y_1 = \overset{p}{b}_{i+1} \tag{38}$$

В частном случае, если ось сложной симметрии имеет наименование 2, равенство (38) принимает вид

$$y = n^k b; \; y_0 = n^k b_0; \; y_1 = n^k b_1 \tag{39}$$

и выражает присутствие центра (обратного равенства) при отсутствии осей симметрии.

Остается рассмотреть случай комбинации сложной симметрии с двойными осями, находящимися в плоскости, перпендикулярной к оси сложной симметрии, т. е. в плоскости сложной симметрии.

Если существует одна такая ось, которую примем за ось y_i, то из присутствия сложной симметрии выведем ряд таких осей под углом $\frac{2\pi}{p}$ в последовательности y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, ...

В таком случае из какой-нибудь данной точки

$$y = b; \; y_{i-1} = b_{i-1}; \; y_i = b_i; \; y_{i+1} = b_{i+1} \tag{a}$$

и данной оси симметрии b_i выведем точку

$$y = -b; \; y_{i-1} = b_{i+1}; \; y_i = b_i; \; y_{i+1} = b_{i-1} \tag{b}$$

а из той же точки (a) и оси сложной симметрии выведем

$$y = -b; \; y_{i-1} = b_i; \; y_i = b_{i+1}; \; y_{i+1} = b_{i+2} \tag{c}$$

Сравнивая (b) и (c), находим, что в этом случае существуют плоскости симметрии, проходящие через ось сложной симметрии и делящие пополам углы между данными

двойными осями симметрии, и, значит, этот случай также не представляет ничего нового.

Так как сложная симметрия существует только отдельно, то при ней формулы (10) и (11) принимают вид

$$S=p=2\left(\frac{p}{2}\right) \qquad (40)$$

где p — наименование оси сложной симметрии, которое необходимо должно быть четное, как это и показывает последняя часть равенства, в котором $\frac{p}{2}$ означает наименование обыкновенной оси симметрии, совпадающей с осью сложной симметрии.

Изложенным исчерпываются вообще все возможные случаи симметрии конечных фигур.

§ 10. Для удобства пользования ими я сопоставляю их в одной таблице в связи с номенклатурой, предложенной мною раньше. [1])

Для систем, наименование которых делится на 4 (простейшая — тетрагональная), имеют место только первые 7 подразделений.

$2p$-гональная система

(p — число нечетное)

Название	Аналитическое выражение симметрии	Формула
1) Гомоэдрия	$y=n^{k+l}b;\ y_0=\overset{2p}{b}_i;\ y_1=\overset{2p}{b}_{i+n^k}$	(27)
2) Скаленоэдрич. гемиэдрия . .	$y=n^{i+k}b;\ y_0=\overset{2p}{b}_i;\ y_1=\overset{2p}{b}_{i+n^k}$	(29)
3) Трапецоэдрич. ,,	$y=n^{k}b;\ y_0=\overset{2p}{b}_i;\ y_1=\overset{2p}{b}_{i+n^k}$	(8b)
4) Бипирамидальн. ,,	$y=n^{k}b;\ y_0=\overset{2p}{b}_i;\ y_1=\overset{2p}{b}_{i+1}$	(23)
5) Дельтоэдр. тетартоэдрия . . .	$y=n^{i}b;\ y_0=\overset{2p}{b}_i;\ y_1=\overset{2p}{b}_{i+1}$	(38)
6) Гемиморфия	$y=b;\ y_0=\overset{2p}{b}_i;\ y_1=\overset{2p}{b}_{i+n^k}$	(25b)

[1]) L. c., § 52 и др. в отд. III.

7) Пирамидальн. гемиморфия . . $y = b$; $y_0 = \overset{2p}{b}_i$; $y_1 = \overset{2p}{b}_{i+1}$ (2)

8) Гемиэдрия . . . . $y = n^{k+l}b$; $y_0 = \overset{p}{b}_i$; $y_1 = \overset{p}{b}_{i+n^k}$ (27)

9) Трапецоэдр. тетартоэдр. . . . $y = n^k b$; $y_0 = \overset{p}{b}_i$; $y_1 = \overset{p}{b}_{i+n^k}$ (8b)

10) Бипирамид. ,, . . . $y = n^k b$; $y_0 = \overset{p}{b}_i$; $y_1 = \overset{p}{b}_{i+1}$ (23)

11) Тетартоморфия . . . . $y = b$; $y_0 = \overset{p}{b}_i$; $y_1 = \overset{p}{b}_{i+n^k}$ (25b)

12) Пирамид. тетартоморфия . . $y + b$; $y_0 = b_i$; $y_1 = \overset{p}{b}_{i+1}$ (2)

Кубооктаэдрическая система

1) Гомоэдрия

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m};\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2n^m} \qquad (34)$$

2) Тетраэдрическая гемиэдрия

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^l};\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2n^l} \qquad (31)$$

3) Додекаэдрическая гемиэдрия

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1};\ x_2 = n_l \overset{3}{a}_{i+2} \qquad (32)$$

4) Гироэдрическая гемиэдрия

$$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a}_i;\ x_1 = n^{k+l} \overset{3}{a}_{i+n^l};\ x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{i+2n^l} \qquad (19)$$

5) Тетартоэдрия

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1};\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2} \qquad (17)$$

Додекаэдроикосаэдрическая система

1) Гомоэдрия (6) $y = n^k b$; $y_0 = n^k \overset{5}{b}_i$; $y_1 = n^k \overset{5}{b}_{i+n}$. (35)

2) Гемиэдрия (6) $y = n^k b$; $y_0 = n^k \overset{5}{b}_i$; $y_1 = n^k \overset{5}{b}_{i+n^k}$ (20)

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для лучшего уяснения соотношения подразделений $2p$-гональной системы примем за основание простейший вид (12), характеризующийся присутствием только одной главной оси наименования p.

Чтобы от нее перейти к виду (11), нужно прибавить плоскость симметрии, проходящую через главную ось.

К виду (10) приводит прибавление плоскости, перпендикулярной к главной оси.

К виду (9) приводит прибавление двойной оси в плоскости, перпендикулярной к главной оси.

К виду (8) приводит одновременное прибавление такой же двойной оси и плоскости симметрии, перпендикулярной к главной оси.

Вид (7) отличается от (12) только вдвое высшим наименованием главной оси.

Вид (6) отличается тем же от (11).

Вид (5) представляет сложную симметрию.

Вид (4) отличается от (10) тем же, чем (7) от (11).

Вид (3) отличается тем же от вида (9).

Вид (2) получается из (9) прибавлением плоскости симметрии, проходящей через главную ось посредине между двумя ближайшими двойными осями, и, наконец,

вид (1) отличается от (8) только вдвое высшим наименованием главной оси.

В случае дигональной системы симметрия не может быть выражена приведенными равенствами, и поэтому этот случай мы рассмотрим отдельно.

В этом случае $p = 1$, и поэтому можем сказать, что для подразделений (8)—(12) главная ось вовсе отсутствует. Однако, ради общности, мы будем подразумевать ее присутствие, помня, что это присутствие не прибавляет к симметрии ничего нового.

Подразделение (12) выразит полное отсутствие симметрии и может быть выражено тожеством:

$$y = b; \quad z = c; \quad v = \partial \tag{1}$$

Подразделение (11) характеризуется лишь одной плоскостью симметрии, проходящей через главную ось, и выразится:

$$y = b; \quad z = c; \quad v = n^k \partial \tag{2}$$

предполагая, что плоскость симметрии перпендикулярна к оси v.

Подразделение (10) выразится, очевидно:

$$y = n^k b; \quad z = c; \quad v = \partial \tag{2a}$$

и, по существу, очевидно, не отличается от предыдущего, так как в обоих имеется плоскость симметрии и ничего больше.

Подразделение (9), предполагая, что прибавлена двойная ось v, выразится:

$$y = n^k b; \quad z = n^k c; \quad v = \partial \tag{3}$$

Подразделение (8) выразится:

$$y = n^i b; \quad z = n^k c; \quad v = \partial \tag{4}$$

Подразделение (7) выразится:

$$y = b; \quad z = n^k c; \quad v = n^k \partial \tag{3a}$$

Оно, очевидно, не отличается по существу от подразделения (9), так как в обоих имеется одна двойная ось и ничего больше.

Подразделение (6) выразится:

$$y = b; \quad z = n^i c; \quad v = n^k \partial \tag{4a}$$

Оно, очевидно, не отличается по существу от подразделения (8), так как в обоих имеются только две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии и двойная ось их пересечения.

Подразделение (5) выразится по формуле (38), если подставить к ней $p = 2$, т. е. по формуле (39):

$$y = n^k b; \quad z = n^k c; \quad v = n^k д \tag{5}$$

Подразделение (4) выразится:

$$y = n^k b; \quad z = n^i c; \quad v = n^i д \tag{6}$$

Подразделение (3) выразится:

$$y = n^k b; \quad z = n^{k+i} c; \quad v = n^i д \tag{7}$$

Подразделение (2), так как в этом случае, по условию, требуется прибавить плоскость симметрии, перпендикулярную к оси v, выразится:

$$y = n^k b; \quad z = n^k c; \quad v = n^i д \tag{6a}$$

Оно, очевидно, не отличается по существу от подразделения (4), так как в обоих имеются лишь двойная ось и перпендикулярная к ней плоскость симметрии.

Наконец, подразделение (1) выразится:

$$y = n^i b; \quad z = n^k c; \quad v = n^l д \tag{8}$$

Таким образом число подразделений для дигональной системы из (12) сокращается до 8.

В кристаллографии принято подразделять эту систему на 3 отдельные системы, и я закончу проведением терминов,

предложенных г. Гадолиным, с соответствующими аналитическими выражениями:

Ромбическая система

				Формула
Голоэдрия	$y = n^i b$,	$z = n^k c$,	$v = n^l d$	(8)
Гемиэдрия . . .	$y = n^k b$;	$z = n^{k+i} c$.	$v = n^i d$	(7)
Гемиморфия . . .	$y = b$,	$z = n^i c$;	$v = n^k d$	(4a)

Моноклиноэдрическая система

Голоэдрия	$y = n^k b$;	$z = n^i c$,	$v = n^i d$	(6)
Гемиэдрия	$y = n^k b$;	$z = c$:	$v = d$	(2a)
Гемиморфия . . .	$y = b$;	$z = n^k c$,	$v = n^k d$	(3a)

Триклиноэдрическая система

Голоэдрия	$y = n^k b$,	$z = n^k c$:	$v = n^k d$	(5)
Гемиэдрия	$y = b$;	$z = c$;	$v = d$	(1)

СИММЕТРИЯ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ ФИГУР

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представления о правильных системах фигур столь же древни, как и гипотезы о строении кристаллов; представления эти всегда шли рука об руку с этими гипотезами, составляя как бы две стороны одного и того же предмета.

Точному геометрическому изучению фигур должно предшествовать изучение точек; поэтому и в этой области представление о правильных системах фигур развилось в точные математические понятия, когда вместо них Браве [1]) задался правильными системами точек. Однако и здесь, как и в учении о симметрии конечных фигур, основатель теоретической кристаллографии несколько сузил основное определение, ограничившись лишь тем видом правильных систем точек, который получил впоследствии название пространственных решеток.

Первые результаты математической теории правильных систем точек есть в то же время и первый триумф человеческого ума в области изучения кристаллов, так как выводы, шедшие из глубины кабинета, совпали как раз с тем, что составляло результат обширного опыта, принявшего со временем колоссальные размеры. Пред строгими кабинетными

---

[1]) Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués règulièrement sur un plan, ou dans l'éspace. J. de l'Ec. polytechn., 1850, t. 19. См. также в. Études cristallographiques. 1866.

выводами как бы преклонилась природа, и кристаллы расположились в тех системах, которые явились необходимым математическим выводом из понятия о правильных системах точек (пространственных решетках).

Применяя выводы к кристаллам, Браве должен был одну точку, заключавшуюся в выводе, заменить группой точек, представляющих атомы кристаллизующегося вещества; к свойствам этих групп он отнес возможность дальнейших подразделений кристаллографических систем, не выведенных им из теории пространственных решеток. Это заключение, уже не основанное на математических результатах, оказалось ошибочным; но вывести эти подразделения из понятия о структуре кристаллов (опять-таки в полноте, хотя и на основании опытного закона, они явились результатом строгого математического вывода Гадолина) долго не удавалось ни одному теоретику; и только в „Началах учения о фигурах"[1]) автора вывод их составляет результат исследования правильных систем фигур, выполняющих пространство, т. е. параллелоэдров и стереоэдров. Полного вывода самих правильных систем фигур в этом сочинении сделано не было, да это и не соответствовало бы его элементарному характеру.

Хотя до появления только что упомянутого сочинения теория правильных систем и не сделала следующего существенного шага, но она не находилась в состоянии полного застоя. Теорию эту впервые расширил известный математик Жордан (С. Jordan), [2]) взглянув на нее с новой точки зрения — как на теорию групп движений. Его результатами воспользовался Л. Зонке,[3]) исправивший погрешности и ограничившийся в теории тем, что собственно только и может относиться к правильным системам точек. Мною было уже

[1]) Стр. 239.

[2]) Mémoire sur les groupes de mouvements. Ann. di matematica, Ser. II 1869, т. II, Milano.

[3]) Entwickelung einer Theorie der Kristallstructur. 1879.

указано на неполноту в данном им определении правильных систем точек, состоящую в пропуске понятия симметричности. [1] Благодаря этому, хотя упомянутые работы и подвинули вперед теорию правильных систем точек, но она не достигла в них еще той первой ступени, на которую ей предстояло подняться.

В „Началах учения о фигурах“ указан вывод всех подразделений кристаллографических систем из правильных систем фигур. В предлежащем сочинении я имел в виду сделать полный вывод всех правильных систем, а равно и применить к их изучению способ алгебраического анализа. В первом отношении я отчасти предупрежден Шенфлисом (Schönflies), который явился прямым продолжателем Жордана. Разобрав снова вопрос о группах движений, [2] причем он имел случай заметить и исправить одну ошибку в окончательном выводе Зонке, он вскоре заметил недостаточность определения, лежащего в основании; он заметил также связь между правильными системами точек и правильным выполнением пространства [3] и, наконец, сделал в конспектообразной статье [4] дополнительный вывод всех правильных систем точек, отчего число систем с 65 возросло до 227.

В предлежащем сочинении не только производится полный вывод всех правильных систем фигур в числе 230. [5] Вывод простых систем, сделанных на совершенно ином основании, чем у Зонке, привел еще раз к числу 65, [6] уже раньше явившемуся результатом работ Жордана, Зонке с поправкой Шенфлиса, почему и можно принимать вывод

[1] Начала учения о фигурах, стр. 240.

[2] Math. Ann., 1887, Bd. XXVIII, XXIX, SS. 319, 50.

[3] Nachricht. v. d. Kön. Ges. d, Wiss. zu Goettingen, 1888, No.9, S. 223.

[4] Math. Ann., 1889, Bd. XXXIV, S. 172.

[5] Шенфлис упустил по одной из двух пар систем: (5 s) и (6 s), а также (1 h) и (2 h). Две его системы, ($\mathfrak{B}_8^d$ и ($\mathfrak{B}_8^q$), равнозначны и выведены здесь под номером (52 а).

[6] См.: Зап. Мин. общ., т. XXVI, стр. 456.

этот за окончательный; что касается двойных систем, то хотя мой вывод и делает поправку в выводе Шенфлиса, однако остается желательным еще новый пересмотр этих систем, по возможности еще с новой точки зрения, хотя близость чисел Шенфлиса и моих заставляет считать их близкими к окончательным.

В этом сочинении я ввожу такие же алгебраические уравнения всех выводимых систем, какие выводятся аналитическою геометриею вообще для геометрических мест. Не имея в виду чисто математических целей, я и не задавался ни алгебраическим выводом видов симметрии и правильных систем (хотя такой вывод невольно навязывается уму при принятом мною методе и частные решения являются сами собою), ни решениями различных аналитических задач; я имел в виду исключительно интересы естествознания и потому ограничивался выводом необходимого и пользовался тем, что облегчает понимание. Однако уже несколько примеров, относящихся к самым сложным системам, например (92 а) — (102 а), достаточно ясно показывают изящество и простоту решения некоторых вопросов (например вопроса о правильной системе, входящей как часть в состав другой, более сложной) аналитическим путем.

Анализ симметрии, которым я пользуюсь в этом сочинении, предполагает употребление особой системы координат, объясненной в моем сочинении „Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде" (1888). Эта система прямолинейных координат состоит из неопределенного числа осей, пересекающихся в начале координат. Величина координаты какой-либо точки на каждой оси есть расстояние от начала до плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной к соответственной оси координат. Положение осей координат $y_0, y_1, \ldots, y_i$ легко определяется из одной из них положением некоторой оси совмещения. Если наименование последней оси есть p, то и рядовой значок i имеет v значений от 0 до $p-1$;

величина p для него равнозначна с 0, $p+1$ — с единицей и т. д.

В первый раз анализ симметрии применен мною в статье „Симметрии конечных фигур". [1]) Уравнения, употребляющиеся при этом анализе, будучи даже линейными, дают S решений, где S — „величина симметрии", различная в различных случаях и равная единице в случае отсутствия симметрии, в этом случае уравнения перестают быть уравнениями анализа симметрии и становятся обыкновенными уравнениями аналитической геометрии. При анализе симметрии постоянно приходится применять отрицательную единицу, которую для краткости я означаю через n, и параметры f, g, j, k, l, m, имеющие каждый два значения: 0 или 1.

При изучении конечных фигур простота предмета позволяет ограничиться одними алгебраическими формулами, т. е. обходиться без графических изображений. Здесь также возможно ограничиться выведенными уравнениями, которые выражают системы совершеннее всякого чертежа; однако ввиду чрезвычайной сложности условий, определяющих некоторые системы, в высокой степени важно для облегчения работы воображения воспользоваться графическими изображениями хотя бы простых (т. е. не двойных) систем; для этих изображений я нашел возможность употребить способ, аналогичный линейной проекции, употребляющейся в кристаллографии, а именно: проектировать оси совмещения на некоторой плоскости теми точками, в которых оси эти пересекают плоскость проекции, причем буква, стоящая при точке, вполне характеризует направление этой оси, являясь для нее как бы названием. Для осей, параллельных плоскости проекции, я надписываю сбоку их расстояние от плоскости проекции (в положительном направлении нормали), которое выражаю в величинах поступания

[1]) Зап. Мин. общ., т. XXV, стр. 1.

совмещения по направлению нормали, а именно: для гексагональной системы за единицу расстояния (по главной оси) принимаю $\lambda_0 / 6$, где λ_0 — элементарное поступание совмещения системы; поэтому для этой системы величина полного поступания в этом направлении выразится числом 6; для всех остальных систем соответственное поступание выразится числом 4, и, значит, за единицу я принимаю $\lambda_0/4$, где λ_0 и есть это поступание совмещения.

С целью еще большего упрощения графических изображений систем я выделяю двойные винтовые оси, а для систем гексагональной и кубооктаэдрической — еще правые и левые тройные винтовые оси, и помещаю их изображения на наложенной сверху прозрачной бумаге. Таким образом, мы можем составить полное изображение всех осей совмещения системы, или же, откинув верхнее изображение, опустить указанные винтовые оси, не играющие в большинстве случаев существенной роли в понимании симметрии системы.

Это сочинение заканчивает собою ряд чисто математических исследований в области кристаллографии, намеченных мною в начале моего самостоятельного научного поприща.

Декабрь 1889 г

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании симметрии конечных фигур было сделано два ограничения, а именно: 1) опущены винтовые оси [1]) и 2) опущена возможность непересечения двух осей симметрии. [2]) Эти два ограничения или опущения являются необходимым следствием предположения конечных размеров изучаемых фигур во всех направлениях. Теперь, переходя к изучению фигур бесконечных, мы должны признать эти опущения невозможными; но, введя оба эти опущенные условия, т. е. признавая возможность винтовых осей и возможность непересечения осей, мы будем на пути к выводу всех симметрических бесконечных фигур.

Так как в бесконечных фигурах, кроме винтовых осей, мыслимы также и оси симметрии, то, для определенности, те или другие безразлично мы будем называть *осями совмещения*.

Осями совмещения характеризуется симметрия совмещения. Из них оси винтовые отличаются от осей симметрии лишь тем, что вместе с поворотом на элементарный угол около оси необходимо связано элементарное поступание по направлению оси; но так как таких направлений два (прямо

[1]) Зап. Мин. общ., т. XXV, стр. 5—6,

[2]) То же, стр. 12.

противоположные), то, для определенности, представив себя поместившимися вдоль оси так, чтобы направление от ног к голове соответствовало положительному направлению оси, те оси, в которых вращение по направлению часовой стрелки связано с положительным поступанием, назовем *левыми*, а те, в которых то же вращение связано с отрицательным поступанием,— *правыми*.[1]

Как в симметрии совмещения бесконечных фигур мы отличаем оси симметрии и винтовые, так и в прямой симметрии мы можем отличать просто плоскости симметрии или плоскости симметрии в связи с поступаниями, которые мы всегда можем мыслить параллельными плоскости симметрии. В самом деле, в случае произвольного поступания мы можем разложить его на два: перпендикулярное к плоскости симметрии l и параллельное ей λ'. Ясно, что передвижение l только переместит плоскость симметрии в параллельном положении на величину $l/2$; остается λ', которое приводит две фигуры, связанные выводом, в особое положение, отличное от фигур, связанных плоскостью симметрии; эту связь мы назовем *плоскостью симметричного скольжения*, или, для краткости, в учении о симметрии прямо *плоскостью скольжения*. Плоскости симметрии и скольжения безразлично я буду называть *плоскостями симметричности*. Хотя между винтовыми осями и плоскостями скольжения и существует аналогия в том смысле, что в обоих случаях с характерным симметрическим движением связано поступание, но направление этого поступания играет роль только для винтовых осей, заставляя отличать правые или левые, и не играет роли в случае плоскостей скольжения, так как, если существует одно определенное направление этого скольжения, которое при-

[1]) При этом обозначении я имею в виду как обыкновенное представление о правых и левых винтах, так и расположение слюдяных пластинок необходимое для вызывания явления правого и левого вращения плоскости поляризации.

водит фигуру к совмещению самое с собою, то существует и прямо противоположное направление при том же положении плоскости скольжения.

Что касается сложной симметрии, то сущность ее не изменяется от присоединения произвольного поступания λ. В самом деле, разложив последнее снова на слагающее l, параллельное оси, и слагающее λ', параллельное плоскости сложной симметрии, легко найдем, что первое поступание приводит лишь к изменению положения плоскости сложной симметрии, которая при этом передвигается по направлению l в параллельном положении на величину $l/2$, а второе поступание приводит лишь к изменению положения оси сложной симметрии, которая, сохраняя свое наименование, передвигается при этом в параллельном положении в направлении и на величину, выведенные теоремой 2.

Итак, для бесконечных фигур в качестве элементов симметрии мы имеем: 1) оси совмещения, характеризующие симметрию совмещения, 2) плоскости симметричности и 3) оси и плоскости сложной симметрии. Оба последние элемента характеризуют прямую симметрию, и мы соединим их в одном понятии *симметричности.*

Согласно заглавию этого сочинения я не буду выводить все виды симметрии бесконечных фигур, а только те из последних, которые называются *правильными системами фигур.*

Под правильною системою фигур я подразумеваю такую бесконечную во всех направлениях совокупность конечных фигур, что если мы приведем по законам симметрии в совмещение две из фигур, входящих в состав системы, то совместятся и сами системы.

Если фигуры системы связаны между собою только симметрией совмещения, то такие правильные системы я буду называть *простыми* в отличие от *двойных* правильных систем, когда кроме симметрии совмещения фигуры связаны еще и симметричностью.

Если в одной из фигур системы мы возьмем некоторую точку, а затем определим положение всех соответственных точек как в той же самой фигуре, так и во всех остальных фигурах, то получим *правильную систему точек*, также простую или двойную.[1])

Подвергая систему некоторому движению совмещения, т. е. такому, при котором одна из фигур системы совместится или сама с собою или с какою-нибудь другою фигурой системы, мы вместе с тем выводим определенный закон симметрии данной системы в виде: или оси симметрии, или винтовой оси, или плоскости симметрии, или плоскости скольжения, или, наконец, оси и плоскости сложной симметрии.

Представив себе, что мы произвели все возможные движения совмещения, мы вместе с тем получаем совокупность всех этих элементов симметрии, определенно расположившихся в пространстве и вполне точно обусловливающих *закон симметрии системы*. Закон этот будет совершенно тождествен как для симметрии некоторой правильной системы фигур, так и для симметрии выведенной из нее правильной системы точек. По этому закону мы можем располагать в пространстве не только точки, группы точек, произвольные фигуры, но даже вообще произвольные геометрические образы.

Возьмем какое-нибудь направление и произведем мысленно все возможные движения совмещения данной правильной системы. Каждое такое движение из заданного направления приведет к другому направлению, которое будет отличаться от заданного или же будет тождественно с ним. Так как направлением называется совокупность всех параллельных прямых, то мы можем выразить его одной из этих прямых, которую мы всегда будем представлять проходящею через определенную точку. Совокупность всех равных или

[1]) Термины эти введены в „Началах учения о фигурах“ стр. 240.

симметрично равных направлений выразится пучком прямых, проходящих через ту же точку.

Движение совмещения этого пучка будет отличаться от движения совмещения самих правильных систем только поступаниями, которые не играют роли в угловых положениях равных направлений. Но пучок прямых, который таким образом вполне характеризует величину симметрии бесконечной правильной системы, сам обладает лишь элементами симметрии конечных фигур, т. е. осями, плоскостями симметрии, или осями и плоскостями сложной симметрии. Характеризуя, следовательно, симметрию системы симметрией связанного с нею пучка равных и симметрично равных направлений, мы можем сказать, что *виды симметрии бесконечно правильных систем могут находиться лишь в числе видов симметрии конечных фигур.*

Однако при этом надо иметь в виду, что при переходе от пучка к системе мы вместе с тем вводим и поступания, а потому кроме осей и плоскостей симметрии в системе могут существовать также винтовые оси с тем же элементарным углом поворота и притом параллельные осям симметрии пучка и плоскости скольжения, параллельные плоскостям симметрии пучка. Так как при этом переходе мыслимо различное пространственное положение и значение элементов симметрии, например мыслимы одноименные и параллельные винтовые оси с разным ходом, то вместе с тем *мыслимы и правильные системы одного и того же вида симметрии, построенные по различным законам симметрии.*

Число прямых пучка выражает собою величину симметрии системы. Так как число это вообще есть величина конечная и становится бесконечным только для случаев симметрии шара и конусов, то, следовательно, и число движений совмещения равных и симметрично-равных направлений системы есть также вообще число конечное и может стать бесконечным лишь в указанных случаях симметрии, характери-

зующихся присутствием осей симметрии бесконечно-большого именования. Поэтому, вообще, сверх S различных движений совмещения, выводящих S различных направлений из одного данного, все остальные движения, существующие в таком числе, сколько можно сделать из точек правильной системы сочетаний по 2, приводят данное направление в положение одного из выведенных уже S ему равных или симметрично-равных направлений. Но движение, при котором направления сохраняются, есть поступание, а потому *кроме некоторых определенных движений совмещения, в числе S, приводящих данное направление во все другие S, ему равные и симметрично-равные, все остальные движения совмещения могут быть выведены из них, присоединяя к ним некоторые поступания совмещения.*

Так как число S, которое слагается из величин S_1, симметрии совмещения и S_2 симметричности (причем $S_1 = S_2$), есть полное число равных (и симметрично-равных) направлений системы, то число s равных (и симметрично-равных) направлений каждой отдельной фигуры системы может быть или равно или меньше чем S. Это дает возможность классифицировать самые системы, а именно можно различать:

1) Такие системы, для которых $s = S = S_1 + S_2$. Системы эти характеризуются тем, что все фигуры системы могут быть выводимы одна из другой с помощью одних поступаний совмещения, или, другими словами, все фигуры системы находятся в параллельном положении. В таком случае каждая фигура обладает центром симметрии, в котором пересекаются оси и плоскости симметрии всех направлений (кроме тех случаев, когда система обладает или осями совмещения одного направления, или плоскостями симметричности, только параллельными осям совмещения одного направления, потому что в этих случаях центра симметрии существовать не может) или в котором пересекаются ось и плоскость сложной симметрии. Системы, сюда относящиеся, я назову *симморфическими*.

2) Такие системы, для которых $s = S_1 = S_2 (= S/2)$. В этом случае каждая фигура системы имеет полное число равных направлений системы или одинаковую с последнею величину симметрии совмещения, но не обладает направлениями симметрично-равными. В системах этого рода каждая фигура обладает центром симметрии, в котором пересекаются оси симметрии всех направлений (за исключением случаев, перечисленных выше), но вовсе не обладает плоскостями симметрии. Системы эти непременно двойные и состоят из совокупности двух простых систем; фигуры одной из них связаны с фигурами другой связью симметричности. Если мы устраним одну из этих простых систем, то останется простая симморфическая система (так как при этом предположении выполняется условие $s = S$), безусловно сохранившая все оси совмещения первоначальной двойной системы. Системы, сюда относящиеся, я назову *гемисимморфическими*.

3) Наконец, возможен случай, когда число равных направлений отдельной фигуры меньше соответственного числа системы, т. е. $s_1 = s_2 < S_1 = S_2$. В этом случае не существует таких точек, в которых бы пересекались оси симметрии всех направлений. В этом случае или вовсе нет двух таких осей симметрии разных направлений, которые мы могли бы принять за первоначальные, или же такие две оси не пересекаются; фигуры системы не находятся все в параллельном положении; если отдельная фигура системы имеет величину симметрии s, и мы можем вывести для нее s равных и симметрично-равных направлений,[1] то при совмещении ее с некоторой другой непараллельной ей фигурой системы все направления должны изменить свое

[1]) Направления эти нельзя брать параллельными ни осям совмещения, ни плоскостям симметричности, так как в этих случаях число равных и симметрично-равных направлений сокращается и, следовательно, становится меньшим, чем величина симметрии s.

угловое положение, потому что одинаковость углового положения двух равных направлений означает возможность параллельного совмещения, вместе с которым является одинаковость углового положения и всех равных направлений.

На этом основании величина симметрии S каждой такой *асимморфической системы* слагается из равных чисел $s + s' + s' + \ldots$, повторенных в сложении некоторое целое число раз; другими словами $S = ns$, где n целое число. Это последнее число есть число различных угловых положений фигур системы; оно находится, следовательно, в непосредственной связи с законом расположения фигур или симметрией связи фигур; поэтому как s выражает величину симметрии отдельных фигур системы, так n есть величина симметрии связи фигур, и только что выведенная формула выражает следующую теорему: ***величина симметрии асимморфической системы равна произведению из величин симметрии фигур, входящих в состав системы, и связи этих фигур.***

Остановлюсь несколько над ближайшим изучением величины симметрии связи.

Из учения о симметрии конечных фигур нам известно, что для всех видов симметрии мы можем принять две первоначальные оси симметрии, из которых мы выводим все равнодействующие оси. Совокупность всех этих осей дает возможность из каждого данного направления вывести каждое другое ему равное; поэтому, если примем такой способ вывода новых равных направлений, по которому мы получаем их, вращая около каждой новой оси не одно, а все выведенные раньше равные направления, мы, очевидно, получим вообще многочисленные повторения; ограничиваясь же одними первоначальными осями, мы вообще выведем не все равные направления. Но существуют и такие комбинации осей, посредством которых из данного мы выведем по указанному способу как раз все остальные равные на-

правления; сюда, например, на основании формулы Кюри[1] вообще относится всякая совокупность всех равных осей. Такие комбинации я буду называть *полными*. Всякое аналитическое выражение какого-нибудь вида симметрии совмещения конечных фигур есть в то же время выражение такой полной комбинации осей. Для примера возьмем хоть формулу,[2] выражающую тетартоэдрию кубооктаэдрической системы:

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_{i};\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1};\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2}$$

Здесь параметр i, очевидно, выражает одну из тройных октаэдрических осей симметрии, а параметры j и k — две определенные двойные кубические оси симметрии. Первый имеет 3 значения, а оба остальные по 2; поэтому их произведение имеет значение 12, что и составляет величину данного вида симметрии,

Понятие о полных комбинациях осей разрешает поставленный вопрос о симметрии связи фигур асимморфической системы. В самом деле, руководствуясь им, мы можем подобрать сначала полную комбинацию осей отдельной фигуры, а затем дополнить ее до полной комбинации осей совмещения системы; дополняющие оси совмещения, следовательно, и составят симметрию связи. В случае двойных систем: или отдельные фигуры обладают плоскостью симметрии, или же фигуры кроме связи симметрии совмещения имеют еще связь симметричности. В обоих случаях присоединение симметричности приводит к полной комбинации элементов симметрии вообще.

На основании сказанного выше о сложной симметрии видно, что этот элемент симметрии может существовать лишь в системах симморфических, так как присоединение произвольного поступания не приводит ни к чему новому,

---

[1] Зап. Мин. общ., т. XXV, § 3.

[2] Там же, стр. 49.

чем бы симметрия правильных систем могла отличаться от симметрии конечных фигур.

Теперь перейду к рассмотрению вопроса, какие системы подлежат выводу? Для того, чтобы подойти к ответу на него, отдадим себе сначала отчет в том, какие данные вполне определяют какую-нибудь систему, другими словами, в чем состоят элементы правильной системы фигур?

Ясно, что система вполне определена, если дана одна из ее фигур и движения совмещения. На основании различия фигур мы, очевидно, не можем различать в выводе системы, так как самые фигуры мы можем произвольно изменять до бесконечности; что же касается движений совмещения, они слагаются из двух различных элементов: элемента симметрии и элемента поступания. Первые имеют постоянный, неподвижный характер; мы в них не можем вносить никаких постепенных изменений. Напротив того, величины поступаний могут изменяться произвольно и потому не годны для установления по ним различия систем. Итак, мы должны в выводе различать системы только по характерным для них элементам симметрии. Системы, характеризующиеся одними и теми же элементами симметрии, я буду называть *равнозначными*. Следовательно, при выводе все равнозначные системы идут за одну, и для того, чтобы доказать ее отличие от другой, нужно указать на различие в элементах симметрии.

Две равнозначные системы находятся в параллельном положении или просто параллельны, если соответственные элементы симметрии имеют одинаковое угловое положение.

Может случиться, что после изменения углового положения одной из параллельных равнозначных систем их параллельность сохранится. Таков в особенности случай отсутствия всяких элементов симметрии в правильной системе; здесь мы можем говорить про одинаковое угловое положение элементов симметрии по той причине, что противопо-

ложное утверждение будет ошибочно, как бы мы ни расположили друг относительно друга две такие системы. В этих случаях я буду называть *равнозначными* те элементы симметрии одной и той же системы или вообще те направления, которые параллельны одному и тому же направлению другой системы до и после изменения положения одной из них. На этом основании, например, в системах, вовсе не имеющих симметрии, все направления равнозначны; в системах, обладающих только параллельными осями совмещения одного направления, равнозначны все направления, перпендикулярные к осям.

Как две равнозначные системы могут стать *равными*, если в одной из них будем изменять как самые фигуры, так и элементы поступания до одинаковости того и другого с другою системою, так и два равнозначные направления в одной и той же системе можно сделать равными, изменяя соответственным образом те же величины (т. е. фигуры и элементы поступания).

Две системы, связанные симметричностью, я буду называть *аналогическими*.

Две простые аналогические системы могут быть равнозначными и неравнозначными. В случае пересечения одинаковых первоначальных осей совмещения неравнозначность не мыслима. Напротив того, в случае непересечения одинаковых первоначальных осей обе аналогические системы могут быть неравнозначны. В самом деле, допустим, что имеются две первоначальные двойные оси симметрии A и B, и пусть положительное направление оси A образует с положительным направлением оси B угол $+\alpha$. В системе аналогической, легко получающейся из нее, например, отражением в зеркальной плоскости симметрии, те же положительные направления образуют между собой соответственно угол $-\alpha$, и, значит, в обоих случаях мы можем различать системы по их элементам симметрии, а следовательно системы неравнозначны.

Две аналогические двойные системы всегда равны между собой. Если система s' есть аналогическая с системой s, то, значит, она может быть выведена из последней отражением в зеркальной плоскости симметрии + какое угодно движение. Но если s есть система двойная, то какая-нибудь входящая в ее состав фигура f может быть совмещена с некоторою другою фигурой f', также входящей в ее состав, отражением в некоторой плоскости симметрии + определенное движение; при этом совмещении фигур совместятся и самые системы; другими словами, условия совмещения последнего случая есть лишь частный случай условий совмещения первого.

Прежде чем перейти к выводу систем, я приведу несколько теорем, знакомство с которыми упростит до возможной степени самый вывод, а также скажу несколько слов о свойствах элементов поступания.

Из данной точки и поступания совмещения в некотором направлении на величину λ мы выведем ряд с промежутком (параметром) λ. Присоединяя другое направление поступания совмещений, мы получим плоскость поступаний совмещений. Одно из тех направлений, которые приводят данный ряд в совмещение с ближайшим параллельным ему рядом, называется *сопряженным* с первоначальным. Оба сопряженные ряда обусловливают систему параллелограммов или *плоскую сетку*. Также одно из направлений, которые приводят плоскую сетку в совмещение с ближайшей параллельной ей плоской сеткой, называют *сопряженным* с плоской сеткой.

Теперь перейдем к теоремам.

Теорема 1. *Оси симметрии и винтовые в правильных системах фигур могут быть только оси наименования* 2, 3, 4 *и* 6.

Означим через 0 одну из этих осей наименования p, а ближайшую равную и параллельную ей ось означим 1. Приняв 1 за ось, мы повернем около нее ось 0 в какую-нибудь сторону, например по направлению часовой стрелки, на эле-

ментарный угол $2\pi/p$ и получим ось 2; затем повернем на тот же угол и в ту же сторону ось 1 около оси 2 и получим ось 3, и т. д., пока не придем, наконец, к некоторой оси i, которая или совпадет с осью 0, или займет на цилиндрической поверхности, проходящей через все проведенные оси и имеющей ось, параллельную же всем этим осям, положение, промежуточное между осями 0 и 1; однако в последнем случае расстояние полученной оси от осей 0 и 1 было бы меньше, чем расстояние между осями 0 и 1, т. е. то, которое по предположению есть наименьшее, а потому такого допущения сделать нельзя, и, значит, некоторая ось i ряда $0, 1, 2 \ldots$ непременно совпадет с осью 0.

Так как в сечении плоскостью, перпендикулярной к осям, точки пересечения осей $0, 1, \ldots, i-1$ займут положение вершин правильного многоугольника, имеющего i сторон, а внутренний угол этого многоугольника есть элементарный угол поворота $2\pi/p$, то находим

$$\frac{2\pi}{p} = \pi\left(1 - \frac{2}{i}\right) \text{ или } p = \frac{2i}{i-2}$$

где как p, так и i должны быть некоторыми целыми положительными числами; нетрудно видеть, что здесь возможны лишь следующие случаи:

1) $i = 2$; в этом случае $p = \infty$, что обозначает равенство элементарного угла поворота около взятой оси нулю, т. е. что взятая ось вовсе и не есть ось симметрии;

2) $i = 3$; в этом случае $p = 6$;

3) $i = 4$; „ „ „ $p = 4$;

4) $i = 6$; „ „ „ $p = 3$;

5) $i = \infty$; „ „ „ $p = 2$.

Эти соображения одинаково применимы и к винтовым осям, так как при них поступания по направлению этих осей не играют никакой роли.

Примечание. В случае $6 < i < \infty$ мы можем взять $i = 6 + k$, где k некоторое целое положительное число; в таком случае $p = \frac{2 + 2k}{4 + k} = 3 - \frac{k}{4 + k}$, и, значит, в этом случае p заключается между значениями 3 и 2, что невозможно.

Эта теорема по ходу доказательства одинаково применима и к *осям сложной симметрии*; но так как последние могут быть только четного наименования, то, значит, в правильных системах фигур наименование осей сложной симметрии может быть лишь 2, 4 и 6.

Только что доказанная теорема в высокой степени ограничивает число возможных видов симметрии правильных систем, сводя их к системам дигональной, тетрагональной, гексагональной и кубооктаэдрической, т. е. к самым простым из возможных, и притом именно тем, которые наблюдаются в кристаллах и изучаются кристаллографией, или иначе — к системам кристаллографическим.

Теорема 2. *Если существует ось симметрии* 0 *наименования p и некоторое возможное поступание совмещения l, то существует также равнодействующая и параллельная ей ось* 0' *того же наименования, занимающая такое положение, что она равно отстоит от оси* 0 *в ее данном положении и в том положении 1, которое та же ось* 0 *займет после совмещения, и притом плоскости, проходящие через ось* 0' *и оси* 0 *и 1, образуют около* 0' *внутренний угол* $2\pi/p$.

Примем данную ось симметрии 0 за ось координат y, а перпендикулярную к ней прямую, находящуюся в плоскости осей 0 и 1, — за одну из осей y_i. Ось 0 выразится равенствами

$$y = b;\ y_0 = b_i;\ y_1 = b_{i+1}$$

Поступание совмещения l разложим на два: одно по направлению оси y_0, которое означим l_0, и другое по направлению оси y, которое означим l.

Повернув сначала систему около оси y на угол $2\pi/p$ из данной точки (bb_0b_1), выведем точку:[1]

$$y = b;\ y_0 = 2\,b_0 \operatorname{cs} 2\pi/p - b_1;\ y_1 = b_0.$$

Придав еще элементарное перемещение, найдем

$$y = b + l';\ y_0 = 2\,b_0 \operatorname{cs} 2\pi/p - b_1 + l_0;\ y_1 = b_0 + l_0 \operatorname{cs} 2\pi/p \quad \text{(a)}$$

Теперь перенесем начало координат в точку

$$y = 0;\ y_0 = l_0/2;\ y_1 = l_0/2 + l_0 \operatorname{cs} 2\pi/p \quad \text{(b)}$$

Из данной точки получим точку

$$y = b;\ y_0 = b_0 - l_0/2;\ y_1 = b_1 - l_0/2 - l_0 \operatorname{cs} 2\pi/p$$

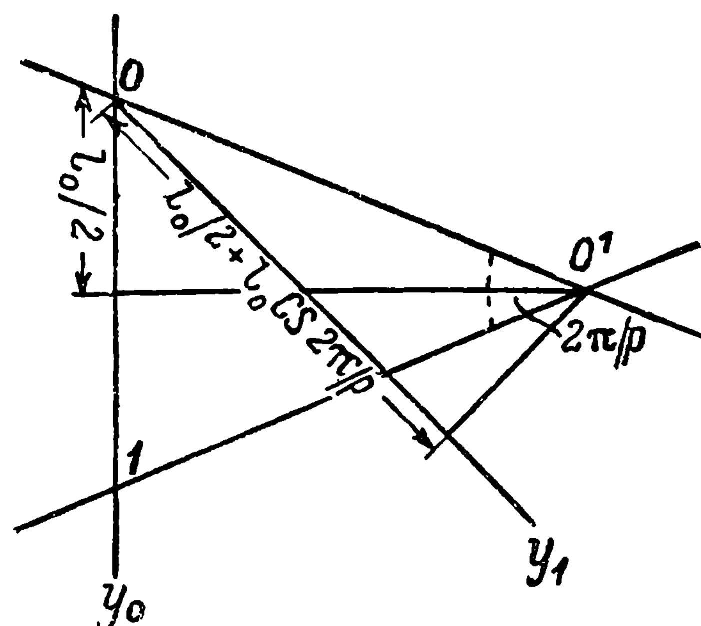
Повернув систему в том же направлении как раньше, около оси y на угол $2\pi/p$, найдем

$$y = b;\ y_0 = 2\,b_0 \operatorname{cs} 2\pi/p - b_1 + l_0/2;\ y_1 = b_0 - l_0/2$$

Произведя обратное перемещение координат, получим

$$y = b;\ y_0 = 2\,b_0 \operatorname{cs} 2\pi/p - b_1 + l_0;\ y_1 = b_0 + l_0 \operatorname{cs} 2\pi/p \quad \text{(c)}$$

Так как точка (b) и есть именно та точка, которая, соединенная с точками пересечения осей 0 и 1 с плоскостью $y = 0$, образует угол $2\pi/p$, то совпадение выражений (a) и (c) составляет доказательство предложенной теоремы. Несовпадение этих выражений состоит лишь в присутствии в первом равенстве (a) члена l'; нетрудно видеть, что, введя этот член в первое равенство



Фиг. 1.

[1] По формуле (1) „Основных формул аналитической геометрии ...", стр. 34, а именно:

$$y_{p-1} \operatorname{sn}(y_0 y_1) = y_0 \operatorname{sn}(y_{p-1} y_1) + y_1 \operatorname{sn}(y_0 y_{p-1})$$

или

$$y_{p-1} = y_0 \frac{\operatorname{sn} 2\,2\pi/p}{\operatorname{sn} 2\pi/p} - y_1 = 2\,y_0 \operatorname{cs} 2\pi/p - y_1$$

(с), мы получим выражение равнодействующей винтовой оси 0′, с ходом l', а не оси симметрии. Но в случае, если слагающая l' данного перемещения равна нулю, то и равнодействующая ось 0′ будет также осью симметрии.

Ясно, что эта теорема одинаково применима и к *осям сложной симметрии*; все различие вывода будет состоять в том, что, производя элементарный поворот, вместе с тем нужно переменить знак координаты y; в этом случае равнодействующая ось 0′ будет также осью сложной симметрии. Двойные оси сложной симметрии не имеют определенного направления, но все проходят через одну и ту же точку — центр обратного равенства. Ясно, что то же имеет место и для равнодействующих двойных осей сложной симметрии.

В случае, если бы первоначальная ось 0 была винтовая, например с ходом λ/p, где λ означает элементарное поступание по направлению оси, мы получили бы первое равенство (а) в таком виде:

$$y = b + l' + \lambda/p$$

Принимая его за первое равенство (с), найдем, что равнодействующая ось тоже винтовая с ходом $l' + \lambda/p$. Здесь возможны два случая: 1) $l' + \lambda/p = 0$, т. е. $l' = -\lambda/p$, а в таком случае равнодействующая ось есть обыкновенная ось симметрии, но этот случай и есть случай, рассмотренный выше, с тем лишь различием, что теперь равнодействующей является та ось, которая выше принята за первоначальную, и 2) $l' + \lambda/p$ не равна нулю; но так как величина λ есть величина элементарного поступания совмещения по направлению всех этих осей вообще, то $l' + \lambda/p$ может составлять лишь целую часть λ (геометрический делитель).

На основании этой теоремы мы заключаем:

а) Посредине между двумя равными двойными осями симметрии находится равнодействующая двойная же ось симметрии (или винтовая), параллельная первоначальным.

b) В средине между тремя равными и параллельными тройными осями симметрии (т. е. по оси правильной трехгранной призмы, по ребрам которой располагаются данные оси) находится параллельная же им тройная ось симметрии (или винтовая).

c) В средине между четырьмя равными и параллельными четверными осями симметрии (т. е. по оси правильной квадратной призмы, по ребрам которой располагаются данные оси) находится параллельная же им четверная ось симметрии (или винтовая; так как равные оси, расположенные по диагоналям призмы, по смыслу симметрии всегда могут быть выведены поступанием совмещения, перпендикулярным к направлению осей, то равнодействующая винтовая ось может иметь лишь ход λ/p); но так как четверные суть в то же время и двойные оси симметрии, то посредине между двумя равными из них находятся равнодействующие двойные оси симметрии (или винтовые).

d) В средине между шестью равными и параллельными осями симметрии (т. е. по оси правильной гексагональной призмы) по смыслу симметрии может находиться лишь равная им же шестерная ось симметрии, а отсюда в свою очередь следует, что элементарное поступание в этом случае может быть лишь перпендикулярно к направлению осей, т. е. в этом случае непременно $l' = 0$.

Но так как шестерная ось симметрии есть в то же время и ось тройная и ось двойная, то по „a“ и „b“ в этом случае имеются равнодействующие тройные и двойные оси симметрии, но уже непременно не винтовые.

Теорема 3. *Направления винтовых осей и осей симметрии всегда суть направления поступаний совмещения.*

Для винтовых осей теорема эта непосредственно очевидна, так как, повторив элементарное движение совмещения около винтовой оси, наименования p, p раз, мы и получим поступание совмещения по направлению оси.

Но так как и в случае осей симметрии всегда существует вожможное направление поступания совмещения, не находящееся в плоскости, перпендикулярной к оси, то, значит, на основании предыдущей теоремы всегда существуют равнодействующие оси, параллельные данным, которые мы можем принять за винтовые.

Теорема эта не прилагается непосредственно к осям сложной симметрии, но так как такие оси наименования выше 2 (т. е. наименования 4 и 6) суть в то же время и оси симметрии, то к ним именно и может быть приложена эта теорема.

Теорема 4. *Плоскости, перпендикулярные к осям симметрии и винтовым, всегда суть плоскости возможных поступаний совмещения.*

Чтобы доказать теорему, достаточно доказать необходимость двух (непараллельных) поступаний совмещения, перпендикулярных к оси. Поэтому для осей симметрии теорема эта непосредственно очевидна. В самом деле, взяв, например, одну из осей, параллельных данной, и произведя элементарный поворот около оси, мы найдем другую ось, равную и параллельную первой, и притом направление поступания совмещений этих равных осей будет перпендикулярно к осям.

В случае винтовых осей для доказательства теоремы возьмем произвольную точку A. Произведя элементарное движение около одной какой-либо винтовой оси 1, мы из A выведем точку A_1, а сделав то же с другою равною и параллельною осью 2, выведем из той же точки A точку A_2. Точки A_1 и A_2 будут связаны поступанием совмещения, перпендикулярным к направлению взятых осей; рассуждая таким же образом, но взяв вместо оси 2 какую-нибудь ось 3, равную и параллельную оси 1, мы из точки A выведем точки A_1 и A_3, которые, вообще, будут связаны другим требующимся поступанием совмещения, отличным от выведенного раньше.

Эта теорема применима и к осям сложной симметрии наименования 4 и 6, как осям простой симметрии вдвое меньшего наименования.

Теорема·5. *Если существует плоскость симметрии и перпендикулярное к ней поступание совмещения* λ, *то существует и равнодействующая плоскость симметрии, параллельная первоначальной и находящаяся от нее на расстоянии* $\lambda/2$.

В самом деле, если за ось y примем прямую, перпендикулярную к плоскости симметрии, а за оси z и v две прямые в самой плоскости симметрии, то из точки

$$y=b;\ z=c;\ v=d \tag{a}$$

выведем точку

$$y=-b;\ z=c;\ v=d \tag{b}$$

Перенеся начало координат по направлению оси y на величину $\lambda/2$, найдем

$$\text{из (a) } y=b-\lambda/2;\ z=c;\ v=d \tag{c}$$

$$\text{а из (b) } y=-b-\lambda/2;\ z=c;\ v=d \tag{d}$$

Но так как λ есть величина элементарного поступания совмещения по направлению оси y, то, прибавив эту величину к (d), найдем

$$y=-b+\lambda/2;\ z=c;\ v=d \tag{e}$$

Сравнение положения точек (c) и (e) и служит доказательством того, что теперь плоскость осей z и v есть плоскость симметрии.

Нетрудно распространить эту теорему и на случай плоскостей сложной симметрии; все различие в ходе доказательства состоит в том, что, переходя от точки (a) к точке (b), нужно присоединить поворот около оси сложной симметрии.

Теорема 6. *Плоскости симметрии всегда суть плоскости поступаний совмещения, а перпендикулярные к ним прямые — направления поступаний совмещения.*

Для доказательства первой части теоремы достаточно взять точку в плоскости симметрии и вывести все точки, которые получаются из нее всеми возможными поступаниями совмещения системы. Ни одна точка такой системы не может находиться не в плоскости симметрии, и, следовательно, все точки расположатся в плоскостях симметрии, параллельных данной.

Для доказательства второй части теоремы возьмем точку 0; из нее и какой-нибудь плоскости симметрии, не проходящей через эту точку, выведем 1, а из последней точки и какой-нибудь другой параллельной плоскости симметрии, также не проходящей через точку 1, выведем точку 2. Очевидно, что прямая 02, перпендикулярная к плоскостям симметрии, и будет одним из направлений поступания системы.

Эта теорема прилагается и к плоскостям сложной симметрии как плоскостям, перпендикулярным к осям сложной симметрии, в случае наименования последних большего чем 2.

Теорема 7. *Если направление оси совмещения не есть сопряженное с плоскостью, к ней перпендикулярною, то слагающая поступания, имеющего сопряженное направление, на этой оси равна половине элементарного поступания по той же оси, если эта ось четного наименования, и одной трети той же величины, если эта ось тройная.*

Если данная ось совмещения четная, то она в то же время и ось двойная, т. е. совмещение может быть произведено вращением около нее на угол 180°. Вследствие такого вращения из одного данного направления поступания совмещения является два с равными слагающими на оси; равнодействующая же этих обоих поступаний есть диагональ ромба, составленного из этих поступаний, и направлена по данной оси.

Если данная ось тройная, то из одного данного направления поступания совмещения выводятся три с равными слагающими на оси; равнодействующая же этих трех поступаний есть диагональ (главная ось) ромбоэдра, составленного из этих поступаний, и направлена по данной оси.

Примечание. Эта теорема прилагается также и к прямым, перпендикулярным к плоскостям симметрии, причем прямые эти играют роль осей четного наименования. Ход доказательства в этом случае настолько близок к только что изложенному, что я его опускаю.

Переходя к выводу правильных систем фигур, мы начнем этот вывод с систем симморфических, располагая их в кристаллографических системах в порядке сложности, т. е. начиная с триклиноэдрической и кончая кубооктаэдрической.

1. СИСТЕМЫ СИММОРФИЧЕСКИЕ

Так как в этих системах их симметрия одинакова с симметрией входящих в их состав элементарных фигур, то мы можем принять за основание для вывода одну из этих фигур. Оси координат будем располагать так, как это было сделано при выводе симметрии конечных фигур; центр симметрии фигуры, т. е. точка пересечения всех вообще осей и плоскостей симметрии фигуры, если таковой имеется, будет принят за начало координат; самый же вывод систем будет состоять лишь в исследовании возможных поступаний совмещения системы.

А. Триклиноэдрическая система

Табл. I фиг. 1.

1. Гемиэдрия

В этом случае симметрия вовсе отсутствует, и потому нет исходной точки для выбора осей координат на основании расположения элементов симметрии.

Для того, чтобы получить аналитическое выражение системы этого случая, мы можем произвольно выбрать какие-

нибудь три сопряженные ряда Y, Z и V точек системы и, взяв произвольно также и одну точку для начала координат, за оси координат принять прямые y, z и v, соответственно перпендикулярные к плоским сеткам ZV, VY и YZ. Если, кроме того, слагающие поступаний по направлению Y, Z и V соответственно на осях y, z и v означим через λ, λ_0 и λ_1, а через B, C и D некоторые произвольные целые числа, то из положения одной какой-либо точки (b, c, d)[1] выведем пространственную решетку

$$y = b + B\lambda; \quad z = c + C\lambda_0; \quad v = d + D\lambda_1 \qquad (1s)$$

Ввиду произвольности целых чисел B, C и D, которым мы можем придавать все значения от $-\infty$ до $+\infty$, я во всех дальнейших аналитических выражениях правильных систем точек буду пропускать эти коэффициенты и писать сокращеннее так:

$$y = b + \lambda; \quad z = c + \lambda_0; \quad v = d + \lambda_1 \qquad (1s')$$

Так как постоянные члены λ, λ_0 и λ_1 относятся к некоторым поступаниям, характерным для системы, поступаниям, которые могут повторяться произвольное число раз, то целые коэффициенты B, C и D подразумеваются в этих формулах сами собой.

Уравнения (1′) выражают, однако, лишь правильную систему точек;[2] чтобы перейти к системе фигур, нужно точки так заменить равными фигурами, в параллельном положении, чтобы они в этих фигурах были точками соответственными.[3] Фигуры в данном случае могут совмещаться только в параллельном положении, так как движения совмещения данного случая—только поступания.

[1] Т. е. имеющей величины координат b, c и d соответственно на осях y, z и v.

[2] Зонке, 1.

[3] Т. е. совмещались при совмещении фигур в параллельном положении, и наоборот.

Особенно важный случай, который мы рассмотрим, составляют фигуры, выполняющие пространство в параллельном положении, т. е. параллелоэдры. Фигуры эти способны делиться на стереоэдры в количестве, равном величине симметрии; в данном случае величина эта равна единице, и потому параллелоэдры на стереоэдры не разделяются; другими словами, в данном случае пространство может выполняться равными фигурами лишь в параллельном положении.

В учении о фигурах доказывается, что каждой данной пространственной решетке соответствует бесконечное множество различных систем параллелоэдров;[1] но мы здесь и во всех дальнейших случаях будем иметь в виду лишь параллелоэдры нормальные, т. е. такие, которые посредством сдвигов и растяжений могут быть приведены к наиболее правильным их представителям: a) трипараллелоэдр — к кубу, b) тетрапараллелоэдр — к прямой гексагональной призме с основаниями — правильными шестиугольниками, c) гексапараллелоэдр — к ромбическому додекаэдру и d) гептапараллелоэдр — к особому притупленному октаэдру.[2] **Табл. IV фиг. 1, a—d.**

2. Голоэдрия

В этом случае в каждой фигуре имеется точка пересечения осей и плоскостей сложной симметрии неопределенного положения, т. е. центр симметрии, который в то же время будет и центром обратного равенства. **Табл. I фиг. 2.**

Приняв одну из этих точек за начало координат и выбрав оси координат подобно предыдущему случаю, найдем правильную систему точек:

$$y = n^k b + \lambda;\ z = n^k c + \lambda_0;\ v = n^k d + \lambda_1 \qquad (2\,s)$$

Величина симметрии в этом случае равна 2, и, соответственно этому, точки правильной системы образуют

1) Начала учения о фигурах, стр. 244.

2) L. c., стр. 245.

ближайшие группы по 2 в каждой; обе точки одной группы находятся на одной прямой с центром обратного равенства и на равном от него расстоянии.

Сами центры обратного равенства образуют пространственную решетку, как это можно непосредственно заключить и из уравнений (2), сделав в них $b = c = d = 0$. Кроме этих равных центров обратного равенства в системе (2) имеются равнодействующие центры, занимающие середину между каждыми двумя из этих центров. Если первоначальные центры примем, по положению, за центры системы параллелепипедов, то равнодействующие центры займут положение вершин этой системы, центров граней и средины ребер.

Табл. IV фиг. 2, a—d. Каждый из четырех параллелоэдров a, b, c и d в этом случае является разделенным на 2 стереоэдра; поверхность разделения должна проходить через центр фигуры и сама иметь центром ту же точку; проще всего принять за поверхность разделения произвольную плоскость, проходящую через этот центр.

B. Моноклиноэдрическая система

3. Гемиморфия

Табл. I фиг. 3. В этом случае имеется двойная ось симметрии, которая на основании теоремы 3 всегда есть направление поступаний совмещения. Примем ее за ось y, а в перпендикулярной к ней плоскости, которая на основании теоремы 4 всегда есть плоскость возможных поступаний совмещения, выберем оси координат z и v перпендикулярно к двум сопряженным рядам плоской сетки, параллельной этой плоскости; начало координат возьмем произвольно на оси y. Слагающие величин поступания совмещения по направлению обоих сопряженных рядов на осях координат означим через λ_0 и λ_1.

Здесь мыслимы два случая: 1) направление оси есть

направление, сопряженное с перпендикулярной к ней плоской сеткой, или же 2) оно не есть таковое.

В первом случае мы выводим систему:[1]

$$y = b + \lambda; \; z = n^k c + \lambda_0; \; v = n^k d + \lambda_1 \qquad (3\,s)$$

В этом случае на основании теоремы 2 посредине между каждыми двумя равными осями системы будет находиться равнодействующая двойная ось симметрии. Табл. II фиг. 3.

Во втором случае на основании теоремы 7 выводим систему,[1] которую проще всего выразить так:

$$y = b + f\lambda/2; \quad z = n^k c + f\lambda_0/2; \quad v = n^k d + \lambda_1 \qquad (4\,s)$$

В этом выражении предполагается, что за ось v мы взяли прямую, перпендикулярную к плоской сетке, в которой находятся направление оси y и предположенное направление элементарного поступания, не совпадающее с этой осью. Если бы оси координат выбрали иначе, то получили бы вместо (4) другое выражение для той же правильной системы точек. Однако я не буду входить в эти слишком простые и понятные подробности.

В этом случае посредине между двумя равными ближайшими осями будут находиться равнодействующие двойные винтовые оси. Табл. I. фиг. 41.

Переходя к системе нормальных параллелоэдров, легко найдем, что сюда могут быть отнесены все те же фигуры, в которых могут существовать двойные оси симметрии, т. е. все вообще разности параллелоэдров.

В случае трипараллелоэдра двойная ось может быть: a) перпендикулярна к одной из граней фигуры, b) соединять средины противоположных ребер. Табл. IV фиг. 3—4, a — i.

В случае тетрапараллелоэдра двойная ось может быть: c) перпендикулярна к шестиугольным основаниям фигуры,

---

1) Зонке, 2.

2) Зонке, 4.

d) к четырехугольным боковым ее граням и e) соединять средины противоположных ребер пояса боковых граней.

В случае гексапараллелоэдра двойная ось может быть: f) перпендикулярна к граням фигуры и g) соединять противоположные тетрагоноэдрические вершины.

В случае гептапараллелоэдра двойная ось может быть: h) перпендикулярна к четырехугольной грани фигуры и i) соединять средины противоположных ребер, общих двум шестиугольным граням.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на два стереоэдра, например плоскостью, проходящей через ось симметрии.

4. Гемиэдрия

Табл. I фиг. 4. В этом случае имеется плоскость симметрии, которая на основании теоремы 6 есть плоскость поступаний совмещения, а перпендикулярная к ней прямая есть направление поступаний совмещений. Поэтому сюда применяются соображения, совершенно аналогичные соображениям предыдущего случая, и мы выведем 2 системы:

$$y = n^k b + \lambda; \quad z = c + \lambda_0; \quad v = d + \lambda_1 \qquad (5\,s)$$

В этом случае на основании теоремы 5 имеются равнодействующие плоскости симметрии, параллельные данным плоскостям симметрии, но проходящие посредине между двумя ближайшими.

$$y = n^k b + f\lambda/2; \quad z = c + f\lambda_0/2; \quad v = d + \lambda_1 \qquad (6\,s)$$

В этом случае равнодействующих плоскостей симметрии не имеется.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, мы опять найдем все аналогичные случаи, а именно:

Табл. IV фиг. 5—6, a—i. В случае трипараллелоэдра плоскость симметрии может быть: a) параллельна одной из граней фигуры и b) проходить через пару противоположных ребер.

В случае тетрапараллелоэдра плоскость симметрии может быть: c) параллельна шестиугольным основаниям, d) параллельна четырехугольным боковым граням, e) проходит чрез средины ребер бокового пояса.

В случае гексапараллелоэдра плоскость симметрии может быть: f) параллельна двум граням фигуры и g) проходит чрез 4 тетрагоноэдрические вершины.

В случае гептапараллелоэдра плоскость симметрии может быть: h) параллельна двум четырехугольным граням фигуры и i) перпендикулярна к ребрам первичного трипараллелогональнсго пояса.

Во всех случаях параллелоэдр плоскостью симметрии разделяется на 2 стереоэдра.

5. Голоэдрия

В этом случае имеется двойная ось симметрии и перпендикулярная к ней плоскость симметрии. Ясно поэтому, что сюда опять применяются соображения, аналогичные соображениям двух предыдущих случаев, и мы снова выведем 2 правильные системы: Табл. I фиг. 5.

$$y = n^k b + \lambda; \quad z = n^j c + \lambda_0; \quad v = n^j d + \lambda_1 \qquad (7s)$$

В этом случае имеются равнодействующие оси симметрии, как в случае (3 s), и равнодействующие плоскости симметрии, как в случае (5 s).

$$y = n^k b + f\lambda/2; \quad z = n^j c + f\lambda_0/2; \quad v = n^j d + \lambda_1 \qquad (8s)$$

В этом случае имеются равнодействующие винтовые оси, как в случае (4 s).

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, мы снова найдем аналогично случаи „a“—„i“, как в двух предыдущих отделениях. Табл. IV фиг. 7—8, a—i.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 4 стереоэдра плоскостью симметрии и, например, плоскостью, к ней перпендикулярною, проходящей через ось симметрии.

С. Ромбическая система

6. Гемиэдрия

Табл. I фиг. 6. В этом случае имеются три взаимно-перпендикулярные двойные оси симметрии, которые мы примем за оси координат y, z и v. На основании теоремы 3 направления эти будут направлениями поступаний совмещения, и мы сначала примем их за сопряженные и получим систему:[1]

$$y = n^k b + \lambda; \quad z = n^{k+j} c + \lambda_0; \quad v = n^j d + \lambda_1 \qquad (9\,\mathrm{s})$$

Табл. II фиг. 9. В этом случае имеются равнодействующие двойные оси симметрии, параллельные и находящиеся посредине между двумя равными осями.

Теперь предположим, что в плоской сетке, параллельной zv, направления осей z и v не суть сопряженные; получим систему:[2]

$$y = n^k b + \lambda; \quad z = n^{k+j} c + f\lambda_0/2; \quad v = n^j d + f\lambda_1/2 \qquad (10\,\mathrm{s})$$

Табл. II фиг. 10. В этом случае все равнодействующие оси, параллельные осям y, а также и те из осей, параллельных осям z и v, которые находятся в плоскостях, проходящих посредине между плоскостями, равными плоскостям осей vz, будут двойными осями симметрии; напротив того, равнодействующие двойные оси, параллельные осям z и v, но находящиеся в плоскостях, равных плоскости zv, будут винтовыми осями.

Но можно допустить, что в плоской сетке, параллельной zv, направления рядов z и v суть направления сопряженные, но направление оси y не есть направление, сопряженное этой плоской сетке, и притом элементарное поступание совмещения не находится ни в одной из плоскостей yz или

1) Зонке, 5.

2) Зонке, 7

yv, так как при этом предположении мы получили бы системы, равнозначные (10). Получаем систему:[1]

$$y = n^k b + f\lambda/2;\ z = n^{k+j} c + f\lambda_0/2;\ v = n^j d + f\lambda_1/2 \quad (11s)$$

В этом случае равнодействующие оси будут осями симметрии для плоскостей, равных плоскостям yz, zv и vy, и винтовыми осями для плоскостей промежуточных. Табл. II фиг. 11.

Наконец, можно допустить, что ни в плоской сетке[2] zv направления осей z и v не будут сопряженными, ни направление оси y не будет сопряженным с этой плоской сеткой. В таком случае выводим систему: [3]

$$y = n^k b + g\lambda/2;\quad z = n^{k+j} c + (f + g)\lambda_0/2;\quad v = n^j d + f\lambda_1/2 \quad (12\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси, находящиеся в плоскостях, равных плоскостям yz, zv, vy, будут винтовыми осями, и, соответственно этому, равнодействующие оси, находящиеся в промежуточных плоскостях, представляют чередование осей симметрии и винтовых.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем:

В случае трипараллелоэдра: a) все оси симметрии перпендикулярны к граням, и в этом случае трипараллелоэдр есть прямоугольный параллелепипед, или b) одна из них перпендикулярна к паре граней, а две другие соединяют средины противоположных ребер, и в этом случае он есть прямая ромбическая призма. Табл. I фиг. 9—12, —g.

В случае тетрапараллелоэдра: c) две оси перпендикулярны к граням, из коих одна пара шестиугольных оснований, а третья ось соединяет средины противоположных ребер.

[1] Зонке, 10.

[2] Плоскость zv, очевидно, может и не быть плоскостью сетки, и я так, здесь и вперед, выражаюсь для краткости, пропуская слова „параллельной плоскости".

[3] Зонке, 8.

В случае гексапараллелоэдра: d) оси соединяют противоположные вершины тетрагоноэдров и e) одна ось соединяет противоположные вершины тетрагоноэдров, а две другие перпендикулярны к граням.

В случае гептапараллелоэдра: f) оси перпендикулярны к четырехугольным граням фигуры или g) одна ось перпендикулярна к паре таких граней, а две другие соединяют средины противоположных ребер пересечения по две шестиугольных граней.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 4 равных стереоэдра, например, плоскостями, проходящими через оси симметрии. Плоскости эти вообще расположены так, как центральные плоскости, проходящие через ребра ромбического сфеноида 3-го рода, которого оси совпадают с осями параллелоэдра.

7. Гемиморфия

Табл. I фиг. 7. В этом случае имеются две перпендикулярные плоскости симметрии, необходимо пересекающиеся в двойной оси симметрии. На основании теорем 3 и 6 направления осей координат, из которых одна, ось y, есть двойная ось пересечения плоскостей симметрии, а две другие перпендикулярны к этим плоскостям,— суть направления поступаний совмещения. Предположив сначала, что направления осей суть направления сопряженные, выведем систему:

$$y=b+\lambda;\ z=n^jc+\lambda_0;\ v=n^kd+\lambda_1 \qquad (13\,s)$$

Табл. II фиг. 13. В этом случае все равнодействующие оси суть двойные оси симметрии, и имеются равнодействующие плоскости симметрии.

Приняв, что оси z и v не суть сопряженные направления плоской сетки, получим систему:

$$y=b+\lambda;\ z=n^jc+f\lambda_0/2;\quad v=n^kd+f\lambda_1/2 \qquad (14\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси также оси симметрии, а равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют. Табл. II фиг. 14.

Теперь получим неравнозначную с (14) систему, если допустим, что элементарное поступание не совпадает с осями в плоскости yz или плоскости yv, хотя два последние предположения приводят, очевидно, к равнозначным системам. Допустив первое из них, найдем:

$$y = b + f\lambda/2;\ z = n^j c + f\lambda_0/2;\ v = n^k d + \lambda_1 \quad (15\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси в плоскости yv суть оси симметрии, а в параллельной ей промежуточной плоскости — винтовые; имеются лишь равнодействующие плоскости симметрии, параллельные плоскости yz. Табл. II фиг. 15.

Наконец, аналогично предыдущему отделению, выведем еще системы:

$$y = b + f\lambda/2;\ z = n^j c + f\lambda_0/2;\ v = n^k d + f\lambda_1/2 \quad (16\,s)$$

В этом случае все равнодействующие оси располагаются, как оси и в случае (11), а равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют. Табл. II фиг. 16.

$$y = b + g\lambda/2;\ z = n^j c + (f + g)\lambda_0/2;\ v = n^k d + f\lambda_1/2 \quad (17\,s)$$

В этом случае равнодействующие винтовые оси располагаются, как оси, параллельные y в случае (12), а равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют. Табл. II фиг. 17.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, находим:

В случае трипараллелоэдра: a) двойная ось перпендикулярна к паре граней, а плоскости симметрии проходят через средины ребер тех же граней, b) двойная ось расположена так же, но плоскости симметрии проходят через вершины тех же граней и c) двойная ось симметрии проходит через средины двух противоположных ребер, и через эти же ребра проходит и одна из плоскостей симметрии. Табл. IV фиг. 13—17, a—m.

В случае тетрапараллелоэдра: d) ось симметрии перпендикулярна к шестиугольным основаниям, а одна из плоскостей симметрии проходит через пару ребер бокового пояса, e) ось симметрии перпендикулярна к паре четырехугольных граней, а одна из плоскостей симметрии параллельна шестиугольным основаниям, и f) одна из плоскостей также параллельна шестиугольным основаниям, но ось симметрии соединяет средины двух противоположных ребер бокового пояса.

В случае гексапараллелоэдра: g) ось симметрии соединяет вершины двух противоположных тетрагоноэдров, а плоскости симметрии проходят чрез вершины других тетрагоноэдров, h) оси симметрии расположены так же, а плоскость параллельна граням вторичного дипараллелогонального пояса, i) ось симметрии перпендикулярна к одной паре граней, а плоскости симметрии проходят чрез диагонали ромбов, образующих эти грани.

В случае гептапараллелоэдра: k) ось симметрии перпендикулярна к паре четырехугольных граней, а плоскости симметрии проходят через диагонали ромбов, образующих эти грани, l) ось симметрии расположена так же, а плоскости симметрии проходят чрез средины противоположных ребер прямоугольников, образующих эти грани, и m) ось симметрии проходит чрез средины двух противоположных ребер, общих двум шестиугольным граням фигуры, а одна из плоскостей симметрии проходит через эти ребра.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 4 стереоэдра двумя перпендикулярными плоскостями симметрии.

8. Голоэдрия

Табл. I фиг. 8. В этом случае имеются три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии и 3 двойные оси симметрии, в которых пересекаются эти плоскости.

Соображения этого случая совершенно аналогичны соображениям отделения 6, почему здесь можем ограничиться приведением аналогичных результатов, а именно систем:

$$y=n^jb+\lambda;\ z=n^kc+\lambda_0;\ v=n^ld+\lambda_1 \qquad (18\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси симметрии располагаются, как в случае (9), и имеются равнодействующие плоскости симметрии, параллельные всем данным.

$$y=n^jb+\lambda;\ z=n^kc+f\lambda_0/2;\ v=n^ld+f\lambda_1/2 \qquad (19\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения располагаются, как в случае (10), и имеются равнодействующие плоскости симметрии, параллельные плоскости zv.

$$y=n^jb+f\lambda/2;\ z=n^kc+f\lambda_0/2;\ v=n^ld+f\lambda_1/2 \qquad (20\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения располагаются, как в случае (11), и равнодействующих плоскостей симметрии не имеется.

Наконец

$$y=n^jb+g\lambda/2;\ z=n^kc+(f+g)\lambda_0/2;\ v=n^ld+f\lambda_1/2 \qquad (21\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения располагаются, как в случае (12), и равнодействующие плоскости симметрии опять отсутствуют.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, мы аналогично отделению 6 выведем случаи „a“,— „g“. Табл. IV фиг. 18—21, a—g.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 8 стереоэдров тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями симметрии.

D. Тетрагональная система

9. Пирамидальная гемиморфия

В этом случае элементарная фигура системы имеет четвертую ось симметрии и ничего больше. Мы примем ее за ось y, а перпендикулярную к ней плоскость, которая на Табл. I фиг. 9.

основании теоремы 4 непременно плоскость возможных поступаний совмещения, примем за плоскость осей y_0 y_1, выбрав одну из них, например y_0, так, чтобы направление поступания совмещения по этой оси было бы элементарное; в таком случае, по причине присутствия четверной оси y, направления осей y_1, y_2 и y_3 будут также элементарными.

Предположив сначала, что направление оси y есть сопряженное с плоскою сеткой y_0 y_1, найдем систему:[1]

$$y = b + \lambda;\ y_0 = \overset{4}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (22\,s)$$

Табл. II фиг. 22. В этом случае имеются равнодействующие оси симметрии: двойные y и четверные $\overset{4}{y}'$.

В предположении, что направление оси y не есть сопряженное с плоской сеткой y_0 y_1, мы выведем систему:[2]

$$y = b + f\lambda/2;\ y_0 = \overset{4}{b}_i + f\lambda_0/2;\ y = \overset{4}{b}_{i+1} + f\lambda_0/2 \qquad (23\,s)$$

Табл. II фиг. 23. В этом случае равнодействующими осями будут: двойные винтовые оси $\overset{v}{y}$ и четверные винтовые оси $\overset{4v}{y}$ с ходом $\lambda/2$.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем, что тетрапараллелоэдры не могут иметь четверных осей симметрии, а потому остаются возможными лишь три остальные разности параллелоэдров, а именно:

Табл. IV фиг. 22—23, a—c. В случае трипараллелоэдра: a) ось симметрии может быть лишь перпендикулярна к одной паре граней.

В случае гексапараллелоэдра: b) ось симметрии может лишь соединять вершины двух противоположных тетрагоноэдров.

В случае гептапараллелоэдра: c) ось симметрии может быть лишь перпендикулярна к одной паре четырехугольных граней.

---

1) Зонке, 30.

2) Зонке, 31.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 4 стереоэдра, например двумя взаимно-перпендикулярными плоскостями, проходящими через ось симметрии.

10. Гемиморфия

В этом случае в четверной оси симметрии пересекаются 4 плоскости симметрии под углом 45°. Табл I фиг. 10.

Избрав оси координат y_0 и y_1 перпендикулярно к двум из взаимно-перпендикулярных плоскостей симметрии и приняв сначала, что ось y имеет направление, сопряженное с плоской сеткой $y_0\ y_1$, найдем систему

$$y = b + \lambda;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0;\ \ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_1 \qquad (24\,\mathrm{s})$$

В этом случае равнодействующие оси симметрии располагаются, как в случае (22), и имеются равнодействующие плоскости симметрии.

Если бы мы допустили, что направления y_0 и y_1 не суть направления элементарных поступаний, то за такие направления в плоскости $y_0\ y_1$ оставалось бы на основании примечания к теореме 7 принять только направления равноделящих прямых, перпендикулярно которым также имеются плоскости симметрии, а потому при этом допущении мы вывели бы систему, равнозначную с системой (24).

Остается допустить, что направление оси y не есть сопряженное с плоской сеткой $y_0\ y_1$, и в таком случае получим систему:

$$y = b + f\lambda/2;\ \ y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \quad (25\,\mathrm{s})$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения располагаются, как в случае (23), а равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, мы выведем 3 случая, „a“—„c“, аналогичные случаям предыдущего отделения. Табл. IV фиг. 24—25, a—c.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 8 стереоэдров по плоскостям симметрии.

11. Тетартоэдрия

Табл. I фиг. 11. В этом случае имеется четверная ось сложной симметрии и ничего больше. Приняв ее за ось y, а оси y_0 y_1 выбрав аналогично отделению 9, в предположении, что ось y имеет направление, сопряженное с плоской сеткой y_0 y_1, выведем систему:

$$y = n^i b + \lambda;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0;\ y_1 = \overset{4}{b_{i+1}} + \lambda_0 \qquad (26s)$$

Равнодействующие оси в этом случае располагаются аналогично со случаями (22) и (24); только место равнодействующих четверных осей симметрии в рассматриваемом случае займут равнодействующие четверные оси сложной симметрии.

Допустив, что направление оси y не есть сопряженное с плоской сеткой y_0 y_1, выведем систему:

$$y = n^i b + f\lambda/2;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b_{i+1}} + f\lambda_0/2 \qquad (27s)$$

В этом случае равнодействующие оси располагаются аналогично со случаями (23) и (25); только место равнодействующих четверных винтовых осей с ходом $\lambda/2$ в рассматриваемом случае займут четверные оси сложной симметрии с положением плоскостей сложной симметрии, отличающимся от первоначального.

Табл. IV фиг. 26—27, а—с. Переходя к системам нормальных параллелоэдров, снова найдем те же 3 аналогичные случая „а“—„с“, что и в предыдущих отделениях.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 4 равных и симметричных стереоэдра по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят через ребра некоторого квадратного сфеноэдра (сфеноида) 3-го рода, центр (симметрии) которого совпадает с центром параллелоэдра.

12. Бипирамидальная гемиэдрия

В этом случае имеется четверная ось симметрии и перпендикулярная к ней плоскость симметрии. Табл. I фиг. 12.

Избрав оси координат аналогично отделению 9 и приняв ось y за направление, сопряженное с плоскою сеткой $y_0\ y_1$, найдем систему:

$$y = n^k b + \lambda;\quad y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0;\quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (28\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси симметрии располагаются аналогично случаю (22) и имеются равнодействующие плоскости симметрии. Если ось y не имеет направления, сопряженного с плоской сеткой $y_0\ y_1$, то получим систему:

$$y = n^k b + f\lambda/2;\quad y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2;\quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + f\lambda_0/2 \qquad (29\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси располагаются аналогично случаю (23); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, снова найдем аналогично те же 3 случая „a“—„c“, что и раньше. Табл. IV фиг. 28—29, a—c

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 8 стереоэдров плоскостью симметрии и двумя перпендикулярными плоскостями, проходящими через оси симметрии.

13. Трапецоэдрическая гемиэдрия

В этом случае имеется четверная ось симметрии и четыре двойные оси симметрии, расположенные под углом 45° в плоскости, перпендикулярной к первой оси. Приняв четверную ось за ось y, а две перпендикулярные двойные оси за оси y_0 и y_1 в предположении, что y имеет направление, сопряженное с плоской сеткой $y_0\ y_1$, выведем систему:[1] Табл. I фиг. 13.

$$y = n^k b + \lambda;\quad y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0;\quad y = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (30\,s)$$

---

[1]) Зонке, 36.

Табл. II фиг. 30.

В этом случае равнодействующие оси, параллельные y, располагаются как в случае (22); равнодействующие оси, параллельные y_0 и y_1, будут двойными осями симметрии, а равнодействующие оси, параллельные осям z_0 и z_1, будут частью осями симметрии, частью винтовыми.

Если допустим, что направление оси y не есть сопряженное с плоской сеткой y_0 y_1, то получим систему:[1]

$$y = n^k b + f\lambda / 2; \; y_0 = \overset{4}{b}_i + f\lambda_0 / 2; \; y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2 \quad (31\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси, параллельные y, располагаются как в случае (23); равнодействующие оси, параллельные осям y_0, y_1, z_0 и z_1 будут частью осями симметрии, частью винтовыми.

Табл. VI фиг. 30—31, а—с.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, мы найдем те же 3 аналогичные случая „а"—„с", что для предыдущих отделений.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 8 стереоэдров по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят через ребра некоторого тетрагонального трапецоэдра, центр (вписанного шара) которого совпадает с центром (обратного равенства) параллелоэдра.

14. Скаленоэдрическая гемиэдрия

Табл. I фиг 14.

В этом случае имеются три взаимно-перпендикулярные двойные оси симметрии и две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, проходящие через одну из этих осей, которую мы примем за ось y, и через прямые, делящие пополам угол между двумя другими осями, которые мы примем за y_0 и y_1. При выводе этого вида симметрии [2] было замечено, что ось y можно принять за ось сложной симметрии.

---

[1] Зонке, 37.

[2] Сним. коп. фиг. стр. 39.

Сначала мы предположим, что оси y_0, y_1 и y имеют направление элементарных поступаний, и получим систему:

$$y = n^{i+k}b + \lambda;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (32\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси симметрии расположены аналогично случаю (9), а равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Теперь, очевидно, получим систему уже не равнозначную с выведенною, если допустим, что в плоской сетке, параллельной y_0 y_1, направления этих осей не есть направления элементарных поступаний; в этом случае таковыми направлениями могут быть равноделящие оси z_0 и z_1 (перпендикулярные к плоскостям симметрии), и мы получаем систему:

$$y = n^{i+k}b + \lambda;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad (33\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (10), и имеются равнодействующие плоскости симметрии.

Теперь остается допустить, что и направление y не есть направление, сопряженное с плоской сеткой y_0 y_1, так как при этом ось сложной симметрии y может иметь равнодействующею такую же ось, то выведем только два случая, а именно из (32) выведем систему:

$$y = n^{i+k}b + f\lambda/2;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad (34\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (11); равнодействующих плоскостей симметрии не имеется.

Из (33) выведем еще систему:

$$v = n^{i+k}b + g\lambda/2;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + (f+g)\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad (35\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (12), а равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем:

Табл. IV фиг. 32—35, a—f. В случае трипараллелоэдра: a) все оси перпендикулярны к граням фигуры, и b) только главная ось перпендикулярна к паре граней фигуры, а две другие соединяют средины противоположных ребер.

В случае гексапараллелоэдра: c) все три оси симметрии соединяют противоположные вершины тетрагоноэдров, d) только главная ось соединяет две такие вершины, а две другие оси перпендикулярны к граням.

В случае гептапараллелоэдра: e) все три оси симметрии перпендикулярны к черырехугольным граням фигуры, и f) только главная ось перпендикулярна к этим граням, а две другие оси соединяют средины противоположных ребер, в которых пересекаются шестиугольные грани фигуры.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 8 стереоэдров по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят через ребра некоторого тетрагонального скаленоэдра, центр (симметрии) которого совпадает с центром параллелоэдра.

15. Голоэдрия

Табл. I фиг. 15. В этом случае имеются: главная четверная ось симметрии, четыре двойные оси симметрии, расположенные под углом 45° в плоскости, к ней перпендикулярной, и плоскости симметрии, проходящие через все оси симметрии.

Избрав оси координат, аналогично всем прежним случаям этой системы симметрии, найдем 2 правильные системы точек соответственно двум возможным предположениям.

В предположении направления оси y, сопряженного с плоскою сеткою $y_0 y_1$, выведем систему:

$$y = n^{k+l} b + \lambda; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0. \qquad (363)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (30), и имеются равнодействующие плоскости симметрии, параллельные плоскостям, проходящим через две из осей y, y_0 и y_1.

В предположении направления оси y, не сопряженного с плоскою сеткою $y_0 y_1$, найдем систему:

$$y = n^{k+l} b + f\lambda/2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + f\lambda_0/2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad (37\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (31), а равнодействующих плоскостей симметрии не имеется.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем те же аналогичные случаи „a"—„c", что и для всех прежних отделений системы, кроме 14-го. Табл. IV фиг. 36—37, a—c.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 16 стереоэдров плоскостями симметрии.

E. Гексагональная система

16. Пирамидальная тетартоморфия

В этом случае имеется тройная ось симметрии и ничего больше. Табл. I фиг. 16. Примем ее за ось y, а за ось y_0 возьмем прямую, находящуюся в плоскости, перпендикулярной к оси y, и притом перпендикулярную к направлению элементарного поступания в этой плоскости; ясно, что оси y_1 и y_2, вытекающие из y_0 и тройной оси симметрии, будут также перпендикулярны элементарным поступаниям в той же плоскости.

Предположив сначала, что направление оси y есть направление, сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1 y_2$, выведем систему: [1]

$$y = b + \lambda; \quad y_0 = \overset{3}{b}_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (38\,s)$$

[1] Зонке, 17.

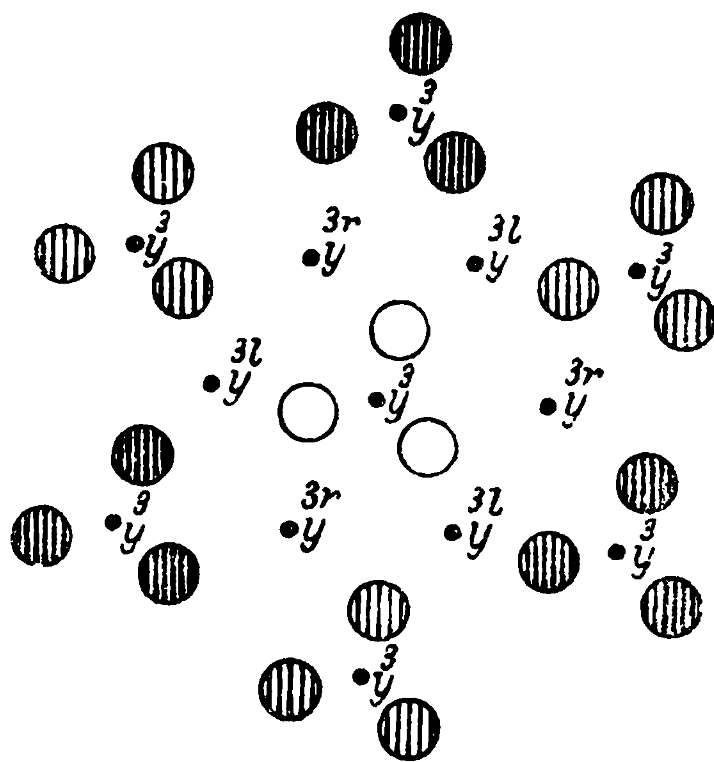
Табл. II фиг. 38. В этом случае имеются лишь тройные равнодействующие оси симметрии, расположение которых определяется теоремой 2, а именно оси $\overset{3}{y}'$ и $\overset{3}{y}''$.

Допустив же, что направление оси y не есть сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1 y_2$, так как элементарное поступание совмещения приведет теперь y в положение одной из равнодействующих тройных осей симметрии, а слагающая поступания по оси y будет лишь одна треть наименьшего поступания совмещения по оси y (теорема 8), выведем систему: [1]

$$y = b + f\lambda/3; \quad y_0 = \overset{3}{b_i} + f\lambda_0/3; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+1} + f\lambda_0/3 \qquad (39\,s)$$

Табл. II фиг. 39. В этом случае равнодействующими осями будут правые (r) и левые (l) тройные винтовые оси (фиг. 2).

Табл. V фиг. 38—39, a—d.



Фиг. 2.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, которые опять могут быть всех четырех разностей, найдем:

В случае трипараллелоэдра: а) тройная ось симметрии соединяет две противоположные вершины фигуры.

В случае тетрапараллелоэдра: b) тройная ось перпендикулярна к шестиугольным граням фигуры.

В случае гексапараллелоэдра: с) тройная ось соединяет противоположные вершины двух тригоноэдров.

В случае гептапараллелоэдра: d) тройная ось перпендикулярна к паре шестиугольных граней фигуры.

[1] Зонке, 18.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 3 равные стереоэдра, например плоскостями, проходящими через ось симметрии.

17. Тетартоморфия

В этом случае имеются три плоскости симметрии, пересекающиеся в оси симметрии под углом 60°. Избрав ось симметрии за ось y, а за ось y_0 избрав прямую пересечения некоторой плоскости, перпендикулярной к оси y, с одной из плоскостей симметрии, мы примем сначала как ось y, так и прямые, перпендикулярные к плоскостям симметрии, за элементарные поступания, и выведем систему: Табл. I фиг. 17.

$$y = b + \lambda; \quad y_0 = \overset{3}{b_i} + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n}{}^k + \lambda_0 \qquad (40\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси симметрии расположены аналогично случаю (38); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Но мы можем допустить, что перпендикуляр к плоскости симметрии не есть направление элементарного поступания, которое в таком случае должно ось y привести к совмещению с одной из равнодействующих тройных осей симметрии, и мы получим систему:

$$y = b + \lambda; \quad y_0 = \overset{3}{b_i} + f\lambda_0/3; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n}{}^k + f\lambda_0/3 \qquad (41\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси располагаются аналогично случаю (39) с той разницей, что теперь они будут осями симметрии, а не винтовыми, как в случае (39).

Наконец можно допустить, что направление оси y не есть сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1$. В таком случае из системы (40) выведем еще систему:

$$y = b + f\lambda/3; \quad y_0 = \overset{3}{b_i} + f\lambda_0/3; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n}{}^k + f\lambda_0/3 \qquad (42\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси располагаются аналогично случаю (39).

Из системы же (41) мы не выведем ничего нового; приняв на основании теоремы 7 за слагающие движения совмещения $\lambda/3$ по оси y и половину наименьшего поступания по направлению, перпендикулярному к плоскости симметрии, мы придем к той же системе (42 s).

Табл. V фиг. 40—42, a—e. Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем:

В случае трипараллелоэдра: a) ось симметрии—как в случае (39„a“), а плоскости симметрии проходят через ребра (полярные) фигуры, пересекающиеся в оси симметрии.

В случае тетрапараллелоэдра: b) ось симметрии — как в случае 38 „b“, а плоскости симметрии параллельны граням трипараллелогонального пояса, и c) ось симметрии расположена так же, а плоскости симметрии перпендикулярны к тем же граням.

В случае гексапараллелоэдра: d) ось симметрии соединяет две противоположные вершины тригоноэдров, а плоскости симметрии проходят через ребра этих тригоноэдров.

В случае гептапараллелоэдра: e) ось симметрии перпендикулярна к двум шестиугольным граням, а плоскости симметрии перпендикулярны к ребрам пересечения этих граней со смежными.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 6 стереоэдров плоскостями симметрии.

18. Бипирамидальная тетартоэдрия

Табл. I фиг. 18. В этом случае имеется тройная ось симметрии и перпендикулярная к ней плоскость симметрии. Избрав первую за ось y, а за ось y_0 прямую, перпендикулярную к направлению элементарного поступания в плоскости симметрии, в предположении, что ось y имеет направление, сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1$, найдем систему:

$$y = n^k b + \lambda; \quad y_0 = b_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (43\,s)$$

В этом случае равнодейсгвующие оси симметрии расположены аналогично случаю (38) и имеются равнодействующие плоскости симметрии.

В предположении, что направление y не есть сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1$, мы получили бы равнодействующие тройные винтовые, правые и левые, оси, перпендикулярные к плоскости симметрии, что невозможно, а следовательно невозможно и сделанное допущение.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, мы Табл V фиг. 43, а. легко поймем возможность только одного тетрапараллелоэдра для этого отделения и получаем лишь случай а), когда плоскость симметрии параллельна паре шестиугольных граней, а ось симметрии к ним перпендикулярна.

Параллелоэдр разделяется на 6 стереоэдров плоскостью симметрии и, например, тремя плоскостями, проходящими через ось симметрии.

19. Трапецоэдрическая тетартоэдрия

В этом случае имеется тройная ось симметрии и три Табл. I фиг. 19. двойные оси симметрии, находящиеся в плоскости к ней перпендикулярной.

Приняв оси симметрии соответственно за оси координат $y, y_0, y_1 \ldots$, и допустив сначала, что направления этих осей суть направления элементарных поступаний, получим систему:[1]

$$y = n^k b + \lambda; \quad y_0 = \overset{3}{b_i} + f\lambda_0/3; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/3 \qquad (44\,s)$$

Табл. II фиг. 44.

В этом случае равнодействующие тройные оси суть оси симметрии, не пересекающиеся с первоначальными двойными осями; равнодействующие двойные оси, отчасти оси симметрии, отчасти винтовые.

---

[1]) Зонке, 25.

Но можно допустить, что направления осей симметрии $y_0, y_1, \ldots$ не есть направления элементарных поступаний; в таком предположении выведем систему:[1]

$$y = n^k b + \lambda; \quad y_0 = \overset{3}{b_i} + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + \lambda_0. \qquad (45\,\mathrm{s})$$

Табл. II фиг. 45.

В этом случае равнодействующие оси, параллельные оси y, суть оси симметрии и пересекаются с первоначальными двойными осями; равнодействующие двойные оси, параллельные y_0, y_1 и y_2, также отчасти оси симметрии, отчасти винтовые. Наконец можно допустить, что направление оси y не есть сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1$. В таком случае из системы (44) выведем новую систему:[2]

$$y = n^k b + g\lambda/3; \; y_0 = \overset{3}{b_i} + (f+g)\lambda_0/3; \, y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/3 \quad (46\,\mathrm{s})$$

Табл. II фиг. 46.

В этом случае равнодействующие оси, параллельные y, располагаются аналогично случаю (39), а равнодействующие двойные оси, параллельные y_0, y_1 и y_2, частью оси симметрии, частью винтовые.

Из системы (45) мы не выведем ничего нового; приняв на основании теоремы 7 за слагающие движения совмещения $\lambda/3$ по оси y и половину наименьшего поступания по направлению осей симметрии, мы получим снова систему (46).

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, находим:

Табл. V фиг. 44—46, а—е.

В случае трипараллелоэдра: а) тройная ось соединяет две противоположные вершины тригоноэдров, а двойные оси соединяют средины противоположных ребер.

В случае тетрапараллелоэдра: b) тройная ось перпендикулярна к шестиугольным основаниям, а двойные оси перпендикулярны к четырехугольным граням, и с) тройная ось расположена так же, а двойные оси соединяют средины противоположных ребер.

---

[1] Зонке, 21.

[2] Зонке, 22.

В случае гексапараллелоэдра: d) тройная ось соединяет две противоположные вершины тригоноэдров, а двойные оси перпендикулярны к граням.

В случае гептапараллелоэдра: e) тройная ось перпендикулярна к двум шестиугольным граням, а двойные оси соединяют средины ребер, в которых пересекаются остальные шестиугольные грани фигуры.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 6 равных стереоэдров по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят чрез ребра некоторых тригональных трапецоэдров, центр (симметрии) которых совпадает с центром параллелоэдра

20. Гемиэдрия

В этом случае имеются все те же оси симметрии, что в предыдущем случае, и кроме того плоскости симметрии, проходящие через все эти оси. Табл. I фиг. 20.

В этом отделении нельзя допустить, чтобы ось y не была сопряженною с плоской сеткой $y_0 y_1$, по той же причине, что и для отделения 18, таким образом найдем всего две системы:

$$y = n^{k+l} b + \lambda; \quad y_0 = \overset{3}{b}_i + f\lambda_0 / 3; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 3 \quad (47\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения располагаются аналогично случаю (44), а равнодействующие плоскости симметрии только перпендикулярно к оси y.

$$y = n^{k+l} b + \lambda; \quad y_0 = \overset{3}{b}_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \quad (48\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси симметрии располагаются аналогично случаю (45), а равнодействующие плоскости симметрии перпендикулярно к оси y.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, легко найдем, что здесь возможны только тетрапараллелоэдры, а именно: a) плоскости симметрии, пересекающиеся в трой- Табл. V фиг. 47—48, a—b.

ной оси, перпендикулярны четырехугольным граням бокового пояса, и b) плоскости эти параллельны тем же граням.

В обоих случаях параллелоэдр плоскостями симметрии разделяется на 12 стереоэдров.

21. Пирамидальная гемиморфия

Табл. I фиг. 21.

В этом случае имеется шестерная ось симметрии и ничего больше. Приняв ее за ось y, а за ось y_0 взяв прямую, перпендикулярную к направлению элементарного поступания в плоской сетке, перпендикулярной к оси y, выведем систему: [1]

$$y = b + \lambda; \quad y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (49\,s)$$

Табл. II фиг. 49.

В этом случае имеются равнодействующие тройные и двойные оси симметрии.

В данном случае равнодействующие шестерные оси симметрии совпадают с первоначальными, связанными между собой поступанием совмещения, перпендикулярным к направлению осей.

Если предположим, что направление оси y не есть сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1$, то на основании теоремы 2 получим равнодействующие винтовые шестерные оси, которые совпадают с первоначальными осями симметрии, что нелепо, и, значит, такое предположение сделать невозможно.

Табл. II фиг. 49, a.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, легко найдем возможность в этом случае только тетрапараллелоэдров, причем a) ось симметрии перпендикулярна шестиугольным основаниям фигуры.

Параллелоэдр разделяется на 6 равных стереоэдров, например плоскостями, пересекающимися в оси симметрии.

---

[1]) Зонке, 47.

22. Гемиморфия

В этом случае имеется 6 плоскостей симметрии, пересекающихся под углом 30° в оси симметрии. Табл. I фиг. 22

Подобно предыдущему выведем лишь одну систему:

$$y = b + \lambda; \quad y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (50\,s)$$

В этом случае за ось y принята шестерная ось симметрии, а за оси y_0, y_1 — прямые, перпендикулярные плоскостям симметрии; легко видеть, что прямые эти в то же время и параллельны другим плоскостям симметрии.

В данном случае также имеется лишь один тетрапараллелоэдр, разделенный плоскостями симметрии на 12 стереоэдров, причем а) ось симметрии перпендикулярна к шестиугольным основаниям, и плоскости симметрии перпендикулярны и параллельны четырехугольным граням фигуры. Табл. V фиг. 50, а.

23. Ромбоэдрическая тетартоэдрия

В этом случае имеется шестерная ось сложной симметрии и ничего больше. Примем ее за ось y, а за оси y_0, y_1 изберем направления, перпендикулярные направлениям элементарных поступаний в плоскости, перпендикулярной к оси y; в предположении, что эта ось имеет направление, сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1$, найдем систему: Табл. I фиг. 2.

$$y = n^i b + \lambda; \quad y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (51\,s)$$

В этом случае имеются равнодействующие тройные оси симметрии, расположенные аналогично случаю (38), а равнодействующие оси сложной симметрии, очевидно, совпадают с первоначальными осями.

Если допустим, что при том же поступании совмещения является по оси y слагающая $\lambda/3$, мы найдем, что теперь равнодействующие шестерные оси будут осями сложной

симметрии, а не винтовыми, как в отделении 21, причем положение плоскости сложной симметрии равнодействующей оси выводится из плоскости сл. сим. оси первоначальной поступанием по направлениям оси y на величины $\lambda/6$, $2\lambda/3$, $-\lambda/3$ и т. д. Система выразится уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} y = n_i b + g\lambda/3; \quad y_0 = \overset{6}{b_i} + (f+g)\lambda_0/3; \\ y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + f\lambda_0/3 \end{aligned}\right\} \quad (52\,s)$$

Кроме упомянутых равнодействующих осей сложной симметрии здесь имеются равнодействующие тройные винтовые, правые и левые оси, расположенные аналогично случаю (39).

Табл. V фиг. 51–52. a–d. Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем:

В случае трипараллелоэдра: a) ось сложной симметрии соединяет две противоположные вершины тригоноэдров.

В случае тетрапараллелоэдра: b) та же ось перпендикулярна к шестиугольным основаниям.

В случае гексапараллелоэдра: c) та же ось соединяет две противоположные вершины тригоноэдров.

В случае гептапараллелоэдра: d) та же ось перпендикулярна к паре шестиугольных граней.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 6 стереоэдров по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят через ребра некоторого ромбоэдра 3-го рода, центр (симметрии) которого совпадает с центром параллелоэдра.

24. Бипирамидальная гемиэдрия

Табл. I фиг. 24. В этом случае имеется шестерная ось симметрии и перпендикулярная к ней плоскость симметрии. Приняв эту ось за ось y и выбрав в плоскости симметрии ось y_0 перпендикулярно к направлению элементарного поступания, получим единственную систему этого отделения:

$$y = n^k b + \lambda; \quad y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (53\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси симметрии расположены аналогично случаю (49) и имеются равнодействующие плоскости симметрии.

Параллелоэдр, соответствующий этому случаю, есть тетрапараллелоэдр: а) ось симметрии перпендикулярна его шестиугольным основаниям. Он разделяется, например, 6 плоскостями, пересекающимися в оси симметрии, и плоскостью симметрии на 12 стереоэдров. Табл. V фиг. 53, a.

25. Трапецоэдрическая гемиэдрия

В этом случае имеется шестерная ось симметрии и 6 двойных осей симметрии, пересекающихся под углом 30° в плоскости, перпендикулярной к шестерной оси. Табл. I фиг. 25.

Нетрудно, подобно предыдущему, вывести единственную для этого случая систему:[1]

$$y = n^k b + \lambda; \quad y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (54\,s)$$

В этом случае кроме равнодействующих двойных и тройных осей симметрии, расположенных аналогично случаю (49), имеются равнодействующие двойные оси симметрии и винтовые, параллельные осям y_0, y_1 и y_2. Табл. II фиг. 54.

Параллелоэдр, соответствующий этому случаю, есть тетрапараллелоэдр: а) шестерная ось симметрии перпендикулярна паре шестиугольных оснований фигуры, а три двойные оси симметрии параллельны сторонам этих оснований. Параллелоэдр разделяется на 12 равных стереоэдров по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят через ребра некоторого гексагонального трапецоэдра, центр (симметрии) которого совпадает с центром параллелоэдра. Табл. V фиг. 54, a

[1] Зонке, 53.

26. Скаленоэдрическая гемиэдрия

В этом случае имеется тройная ось симметрии, три пересекающиеся в ней плоскости симметрии и три перпендикулярные к этим плоскостям двойные оси симметрии. Приняв тройную ось симметрии за ось y, а за ось y_0 — прямую пересечения одной из плоскостей симметрии с плоскостью, проходящею через все двойные оси симметрии, в предположении, что оси симметрии суть направления элементарных поступаний, получим систему: [1]

$$y = n^i b + \lambda;\quad y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\quad y_i = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (55\,\mathrm{s})$$

В этом случае имеются равнодействующие оси совмещения, расположенные аналогично случаю (44); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Предположив, что направления двойных осей не суть направления элементарных поступаний в плоскости $y_0 y_1$, выведем систему:

$$y = n^i b + \lambda;\quad y_0 = \overset{6}{b}_i + f\lambda_0/3;\quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/3 \qquad (56\,\mathrm{s})$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения располагаются аналогично случаю (45); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Наконец, можно допустить, что направление оси y не есть направление, сопряженное с плоской сеткой $y_0 y_1$; в таком случае из системы (55) выведем новую:

$$y = n'b + f\gamma/3;\quad y_0 = \overset{6}{b}_i + f\lambda_0/3;\quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/3 \qquad (57\,\mathrm{s})$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (46); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

---

[1] Здесь введено изменение по отношению к формуле (29) „Симметрии конечных фигур“; изменение это вызвано изменением в положении осей координат y_0, y_1, y_2 и сделано с целью упрощения выражений.

Из системы (56 s) с этим предположением не выведем ничего нового, а поступая на основании теоремы 7, придем к той же системе (57 s).

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем те же аналогичные случаи „a“ — „e“, что и в отделении 19, и при том в обоих случаях аналогично же располагаются и оси симметрии. Табл. V фиг. 55—57, a—c.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 12 стереоэдров по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят через ребра некоторого гексагонального скаленоэдра, центр (симметрии) которого совпадает с центром параллелоэдра.

27. Голоэдрия

В этом случае имеем оси симметрии, расположенные одинаково с отделением 25 s, и плоскости симметрии, проходящие через каждую пару осей симметрии. Табл. I фиг. 27.

Легко видеть, что в этом случае, так же как и в отделении 25 и др., мы выведем всего одну систему:

$$y = n^{k+l}b + \lambda;\quad y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0;\quad y = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (58\,s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения располагаются аналогично случаю (54); имеются равнодействующие плоскости симметрии, перпендикулярные к осям y.

Параллелоэдр, соответствующий этому случаю, есть тетрапараллелоэдр: a) оси симметрии расположены в нем аналогично случаю (54„a“). Он разделяется на 24 стереоэдра плоскостями симметрии. Табл. V фиг. 58, a.

F. Кубооктаэдрическая система

28. Тетартоэдрия

В этом случае имеются 3 двойные оси симметрии, расположенные как нормали к граням куба, и 4 тройные оси Табл. I фиг. 28.

симметрии, расположенные как диагонали той же фигуры. Первые оси примем за оси координат x_0, x_1, x_2.

В предположении, что оси x_0, x_1 и x_2 имеют сопряженные направления, найдем систему: [1]

$$x_0 = n^j \overset{3}{a_i}; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + \lambda; \quad x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2} + \lambda \qquad (59\,s)$$

В этом случае имеются равнодействующие двойные оси симметрии, параллельные осям (x), и равнодействующие тройные винтовые, правые и левые оси, параллельные осям (O).

Если направления осей (x) не суть направления элементарных поступаний, то мыслимо лишь 2 случая: 1) элементарное поступание совмещения совпадает с одною (а следовательно и со всеми) из осей O; в таком случае слагающие поступания по осям (x) будут $\lambda/2$ и 2) элементарное поступание не совпадает с осями (O), и в таком случае слагающие элементарного поступания по осям (x) будут $\lambda/2$ (или O), а по осям (O) одна треть наименьшего поступания по этим осям (O) в случае (59s). Таким образом находим еще две системы:

$$1)\,^{2)} \quad \left.\begin{aligned} x_0 &= n^j \overset{3}{a_i} + f\lambda/2; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + f\lambda/2; \\ x_2 &= n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2} + f\lambda/2 \end{aligned}\right\} \qquad (60\,s)$$

Табл. II фиг. 60. В этом случае имеются равнодействующие винтовые оси, параллельные осям (x) и осям (O).

$$2)\,^{3)} \quad \left.\begin{aligned} x_0 &= n^j \overset{3}{a_i} + f\lambda/2; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + (f+g)\lambda/2 \\ x_2 &= n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2} + g\lambda/2 \end{aligned}\right\} \qquad (61s)$$

[1] Зонке, 54.
[2] Зонке, 56.
[3] Зонке, 55.

В этом случае имеются равнодействующие оси симметрии и винтовые, параллельные осям (x), и винтовые параллельные осям (O). Табл. II фиг. 61.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, легко найдем, что системе (59) соответствует куб, системе (60) — особый притупленный октаэдр и системе (61) — ромбический додекаэдр. Табл. V фиг. 59—61.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 12 равных стереоэдров по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят чрез ребра некоторого тетартоэдра, центр (симметрии) которого совпадает с центром параллелоэдра.

29. Додекаэдрическая гемиэдрия

В этом случае имеются оси симметрии, расположенные так же, как в отделении 28, и плоскости симметрии, проходящие через каждые две из двойных осей симметрии. Оси (O) в данном случае — шестерные оси сложной симметрии. Табл. I фиг. 29.

Для этого случая, аналогично предыдущим, мы выведем три системы:

$$1)\ x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + \lambda;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + \lambda;\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2} + \lambda \quad (62\,\mathrm{s})$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (59), и имеются равнодействующие плоскости симметрии.

$$2)\ \left.\begin{aligned} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2;\quad x_1 = n_k \overset{3}{a}_{i+1} + f\lambda/2 \\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2} + f\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (63\,\mathrm{s})$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (60); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

$$\left.\begin{aligned} 3)\ x_0 &= n^j\overset{3}{a}_i + f\lambda/2;\ x_1 = n^k\overset{3}{a}_{i+1} + (f+g)\,\lambda/2 \\ x_2 &= n^l\overset{3}{a}_{i+2} + g\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (64\ s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (61); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Табл. V фиг. 62—64. Переходя к системе нормальных параллелоэдров, найдем, что система (62 s) соответствует кубу, система (63 s) — особому притупленному октаэдру, а (64 s) — ромбическому додекаэдру.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 24 стереоэдра по особому закону, а именно: плоскости разделения проходят чрез ребра некоторого диакис-додекаэдра, центр (симметрии) которого совпадает с центром параллелоэдра.

30. Тетраэдрическая гемиэдрия

Табл. I фиг. 30. В этом случае имеются оси симметрии, расположенные так же, как в отделении 28, и плоскости симметрии, проходящие каждая через две тройные оси (O) и одну двойную (x). Оси (x) в этом случае — чéтверные оси сложной симметрии.

В этом случае, аналогично предыдущим мы опять выведем 3 системы:

$$1)\ x_0 = n^j\overset{3}{a}_i + \lambda;\ x_1 = n^k\overset{3}{a}_{i+n^l} + \lambda;\ x_2 = n^{j+k}\overset{3}{a}_{i+2n^l} + \lambda \quad (65\ s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (59); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

$$\left.\begin{aligned} 2)\ x_0 &= n^j\overset{3}{a}_i + f\lambda/2;\ x_1 = n^k\overset{3}{a}_{i+n^l} + f\lambda/2 \\ x_2 &= n^{j+k}\overset{3}{a}_{i+2n^l} + f\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (66\ s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (60); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

$$3)\ x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n}{}^l + (f+g)\lambda/2;\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2n}{}^l + g\lambda/2 \qquad (67\ s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (61); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем, что системе (65) соответствует куб, системе (66) — особый притупленный октаэдр и системе (67) — ромбический додекаэдр. Табл. V фиг. 65-67.

Во всех случаях параллелоэдр плоскостями симметрии разделяется на 24 стереоэдра.

31. Гироэдрическая гемиэдрия

В этом случае имеются 3 четверные оси симметрии, расположенные как нормали к кубу, 4 тройные оси симметрии, расположенные как диагонали куба, и 6 двойных осей симметрии, соединяющих противоположные средины ребер той же фигуры. Табл. I фиг. 31.

Нетрудно видеть, что и для этого отделения мы выведем, аналогично предыдущему, 3 системы:

1)[1] $x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + \lambda;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n}{}^l + \lambda;\ x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{i+2n}{}^l + \lambda$ (68 s)

В этом случае имеются равнодействующие четверные и двойные оси симметрии, параллельные осям (x), винтовые оси, параллельные (O), и двойные оси симметрии и винтовые, параллельные осям (z). Табл. II фиг. 68.

$$2)^{2)}\ x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n}{}^l + f\lambda/2;\ x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{i+2n}{}^l + f\lambda/2 \qquad (69\ s)$$

[1] Зонке, 59.
[2] Зонке, 61.

Табл. II фиг. 69.

В этом случае имеются равнодействующие винтовые оси: четверные с ходом $\lambda/2$ и двойные, параллельные осям (x), и тройные, параллельные осям (O), а также двойные оси симметрии и винтовые, параллельные осям (z).

$$3)\ {}^{1)}\ x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2;\quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^l} + (f+g)\lambda/2 \quad x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{i+2n^l} + g\lambda/2 \qquad (70\ s)$$

Табл. II фиг. 70.

В этом случае имеются равнодействующие винтовые оси: четверные с ходом $\lambda/2$ и двойные, параллельные осям (x); тройные, параллельные осям (O), а также двойные оси симметрии и винтовые, параллельные осям (z); расположение не только первоначальных, но и равнодействующих осей иное, чем в предыдущем случае.

Табл. V фиг. 68 - 70.

Подобно предыдущему отделению найдем, что системе (68) соответствует куб, системе (69) — особый притупленный октаэдр и системе 70 — ромбический додекаэдр.

Во всех случаях параллелоэдр разделяется на 24 равных стереоэдра по особому закону, а именно: центральные плоскости разделения проходят чрез ребра некоторого гироэдра, центр (симметрии) которого совпадает с центром параллелоэдра.

32. Голоэдрия

Табл. I фиг. 32.

В этом случае имеются оси симметрии, расположенные так же, как в отделении 31, и плоскости симметрии, проходящие чрез тройные и четверные оси (в каждой 2 первые и 1 вторая) или только чрез четверные оси симметрии. Для этого случая оси (O) — шестерные оси сложной симметрии.

В этом случае, аналогично предыдущим, опять выведем 3 системы:

$$1)\ x_1 = n^j \overset{3}{a}_i + \lambda;\quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m} + \lambda;\quad x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2n^m} + \lambda \qquad (71\ s).$$

---

[1]) Зонке, 60.

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (62) и имеются равнодействующие плоскости симметрии, перпендикулярные к осям (x).

$$2)\ x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n}{}^m + f\lambda/2 \qquad (72\ s)$$
$$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2n}{}^m + f\lambda/2$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (63); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

$$\left.\begin{aligned} 3)\ x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n}{}^m + (f + g)\lambda/2 \\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2n}{}^m + g\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (73\ s)$$

В этом случае равнодействующие оси совмещения расположены аналогично случаю (64); равнодействующие плоскости симметрии отсутствуют.

Переходя к системам нормальных параллелоэдров, найдем, что система (71) соответствует кубу, система (72) — особому притупленному октаэдру и система (73) — ромбическому додекаэдру. Табл V фиг.71 73.

Во всех случаях параллелоэдр плоскостями симметрии разделяется на 48 стереоэдров.

Этим исчерпываются все возможные симморфические правильные системы точек.

II. СИСТЕМЫ ГЕМИСИММОРФИЧЕСКИЕ

По самому определению системы, сюда относящиеся, состоят из двух аналогичных простых симморфических систем, слившихся в одну. Эти две простые системы должны быть связаны симметричностью; и притом, так как случай сложной симметрии для гемисимморфических и асимморфических исключается, то для связи остаются лишь плоскости симметричности. В частном случае, если мы возьмем

плоскость симметрии, пересекающуюся с осями симметрии всех направлений, мы получаем двойную симморфическую систему; поэтому каждую гемисимморфическую систему мы можем вывести из двойной симморфической системы, подвергая одну из входящих в состав последней простых систем некоторому такому поступанию, чтобы в новом положении обе системы слились в одну правильную.

Так как в образовавшейся таким образом гемисимморфической системе движения совмещения не отличаются от движений совмещения каждой из входящих в ее состав простых систем, то необходимым условием для такого слития обеих систем в одну правильную является совпадение всех осей совмещения.

Допустим, что мы нашли некоторое направление поступания величиною L, приводящее оси совмещения обеих простых систем к совпадению. Разложим это поступание на 2 слагающие: перпендикулярное к какой-либо плоскости симметрии первоначальной двойной системы l и параллельное той же плоскости λ'. Первое поступание равнозначно с перенесением плоскости симметрии в параллельном положении на величину $l/2$; второе поступание есть величина скольжения по этой новой плоскости симметрии. Если образовавшаяся теперь двойная система есть система правильная, то и повторение того же процесса приведет систему к совмещению самое с собою. При повторении, однако, из системы, симметричной одной из первоначальных, мы снова возвратимся к системе, ей равной и притом совмещающейся, несмотря на величину поступания $2\lambda'$, в найденном направлении. Поэтому направление и величина поступания $2\lambda'$ есть направление и величина поступания первоначальной простой системы, и, значит, λ' есть половинная величина того же поступания.

Теперь докажу, что оба необходимые выведенные условия, т. е. совпадение всех осей совмещения и половинная величина поступания в направлении скольжения, суть усло-

вия достаточные. Для этого, согласно определению правильной системы фигур, необходимо доказать, что если в системе, полученной таким образом, две какие-нибудь фигуры совместим некоторым движением, то при этом совместятся и все фигуры системы.

Выполнение второго из выведенных условий делает очевидным совмещение систем при совмещении двух фигур, A и A', связанных плоскостью скольжения с указанным направлением и величиною последнего.

Если присоединим к этому какое бы то ни было движение совмещения, при котором фигура A' совместится с фигурою B', то, так как, по первому условию, обе составные простые системы связаны одинаковыми движениями совмещения, при этом совместятся и обе простые системы, т. е. и сама гемисимморфическая система. Итак, оба эти процесса вместе, приводящие фигуру A в совмещение с произвольною другою фигурою B' той же системы, суть в то же время и процессы совмещения самих систем, что и требовалось доказать. Ради удобства поступание L, обладающее необходимыми и достаточными условиями для образования новой двойной правильной системы, я буду называть *образующим* поступанием гемисимморфической системы.

Переходя к самому выводу, мы должны иметь в виду его полноту, а также ограничиться лишь неравнозначными системами. Первое условие удовлетворится, если мы для каждой двойной симморфической системы определим все образующие поступания; второе условие удовлетворится, если при выводе каждой новой системы мы охарактеризуем ее такою комбинацией элементов симметрии, которая не встречалась еще ни в какой из раньше выведенных систем. Выполнение второго условия чрезвычайно облегчается тем соображением, что система, выведенная из одной симморфической системы, непременно неравнозначна с системою, выведенною из другой неравнозначной, симморфической системы.

Мы только что заметили, что при выводе гемисимморфических систем из симморфических всегда нужно иметь в виду те направления, которые, принятые за образующие, не приведут к новым системам. Ясно, что если с данным образующим поступанием мы сложим какое-нибудь поступание совмещения системы, то полученное новое поступание, принятое за образующее, не приведет к новой гемисимморфической системе. Мы назовем совокупность направлений, связанных поступаниями совмещения системы, *группою*, и можем сказать, что из всех направлений одной группы, принятых за образующие, можно вывести лишь одну гемисимморфическую систему.

Теорема 8. *Если в первоначальной двойной симморфической системе плоскость симметрии проходит через двойную винтовую ось, направление которой есть направление образующего поступания, то в гемисимморфической системе имеется плоскость симметрии, проходящая через ту же двойную ось, но перпендикулярно к первоначальной плоскости симметрии.*

Приняв данную винтовую ось за ось y и выбрав в плоскости, к ней перпендикулярной, две оси, z и v, из которых первая перпендикулярна к данной плоскости симметрии, а вторая находится на этой плоскости, из данной точки (b, c, d) и плоскости симметрии выведем точку $(b, -c, d)$; из этой точки и данной оси выводится точка $(b+\lambda/2, +c, -d)$, а подвергая последнюю точку образующему поступанию, которое на основании сделанного выше замечания должно иметь величину $\lambda/2$, найдем точку $(b, -c, -d)$; сравнивая последнюю точку со второй, видим, что эти две точки, принадлежащие одной и той же гемисимморфической системе, симметричны по отношению к плоскости, перпендикулярной к оси v; но так как таким же процессом могут быть выведены все точки гемисимморфической системы, то, значит, данная плоскость симметрии принадлежит гемисимморфической системе.

На основании сказанного выше при выводе гемисимморфических систем, мы будем иметь дело только с теми из 32 видов симметрии, в которых кроме равенств совмещения имеются и равенства симметричные, и притом сюда не войдут случаи сложной симметрии, т. е. отделения 2, 11 и 23.

Поэтому приходится начать прямо с отделений моноклиноэдрической системы.

Моноклиноэдрическая система

4. Гемиэдрия

В симморфических системах этого отделения имеются лишь плоскости симметрии, перпендикулярные к оси y, и ничего больше.

Каждое поступание мы можем разложить на два, из которых одно перпендикулярно плоскостям симметрии, а другое параллельно этой плоскости. На основании теоремы 5 первая слагающая поступания не приводит ни к чему новому, так как только перемещает положение плоскостей симметрии; что же касается слагающих, параллельных плоскостям симметрии, то все эти направления для данной системы равнозначны, а потому за образующее поступание можем по произволу взять какое угодно из возможных поступаний, параллельных этой плоскости.

Таким образом, из системы (5) выведем систему:

$$y = n^k b + \lambda; \quad z = c + \lambda_0; \quad v = d + k\lambda_1/2 \qquad (1\,\mathrm{h})$$

а из системы (6)

$$y = n^k b + f\lambda/2; \quad z = c + f\lambda_0/2; \quad v = d + k\lambda_1/2 \qquad (2\,\mathrm{h})$$

Ясно, что выражения (1) и (2) мы можем с равным правом заменить разнообразными другими выражениями равнозначных гемисимморфических систем.

5. Голоэдрия

Совершенно аналогично предыдущему отделению, мы и здесь выведем две системы, а именно: из системы (7)

$$y = n^k b + \lambda;\quad z = n^j c + \lambda_0;\quad v = n^j d + k\lambda_1/2 \qquad (3\,\mathrm{h})$$

а из системы (8):

$$y = n^k b + f\lambda/2;\quad z = n^j c + f\lambda_0/2;\quad v = n^j d + k\lambda_1/2 \quad (4\,\mathrm{h})$$

Ромбическая система

7. Гемиморфия

При выводе из системы (13s) мы можем принять следующие образующие поступания, охарактеризованные величинами слагающих по осям y, z и v:

1) $(\lambda/2, 0, 0)$; 4) $(\lambda/2, \lambda_0/2, 0)$; 6) $(\lambda/2, 0, \lambda_1/2)$; 7) $(\lambda/2, \lambda_0/2, \lambda_1/2)$
2) $(0, \lambda_0/2, 0)$; 5) $(0, \lambda_0/2, \lambda_1/2)$
3) $(0, 0, \lambda_0/2)$;

Но так как в системе (13s) направления осей z и v равнозначны, то равнозначны будут также и выведенные системы (2) с (3), (4) с (6), и, следовательно, выведем всего 5 новых систем:

1) $y = b + (j + k)\lambda/2;\quad z = n^j c + \lambda_0;\quad v = n^k d + \lambda_1 \qquad (5\,\mathrm{h})$

В этом случае имеются плоскости скольжения yz или yv с направлением скольжения по оси y величиной $\lambda/2$.

2) $y = b + \lambda;\quad z = n^j c + (j + k)\lambda_0/2;\quad v = n^k d + \lambda_1 \qquad (6\,\mathrm{h})$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси z и находящаяся в расстоянии $\lambda_0/4$ от начала координат.

3) $y = b + (j + k)\lambda/2;\quad z = n^j c + (j + k)\lambda_0/2;\quad v = n^k d + \lambda_1 \qquad (7\,\mathrm{h})$

В этом случае плоскость симметрии предыдущего замещена плоскостью скольжения, имеющего направление оси y и величину $\lambda/2$.

$$4)\quad \left.\begin{aligned} y=b+(j+k)\lambda/2; \quad z=n^j c+(j+k)\lambda_0/2 \\ v=n^k d+(j+k)\lambda_1/2 \end{aligned}\right\} \qquad (8\,\mathrm{h})$$

В этом случае та же плоскость скольжения; слагающие последнего на осях y и v соответственно $\lambda/2$ и $\lambda_1/2$.

$$5)\ y=b+\lambda; \quad z=n^j c+(j+k)\lambda_0/2; \quad v=n^k d+(j+k)\lambda_1/2 \qquad (9\,\mathrm{h})$$

В этом случае та же плоскость скольжения; направление последнего ось v и величина $\lambda_1/2$.

Ясно, что в двух последних случаях существуют также плоскости скольжения, перпендикулярные к оси v и отстоящие от начала на расстоянии $\lambda_1/4$.

При выводе из системы (14s) образующие поступания (2) и (3) приводят к симморфической системе, равнозначной с первоначальной (14s), а потому прибавление этих поступаний не приводит к новым системам и остается лишь один случай (1):

$$y=b+(j+k)\lambda/2; \quad z=n^j c+f\lambda_0/2; \quad v=n^k d+f\lambda_1/2 \qquad (10\,\mathrm{h})$$

В этом случае плоскости yz и yv суть плоскости скольжения, имеющего направление оси y и величину $\lambda/2$.

При выводе из системы (15s) направления z и v уже не равнозначны, но образующее поступание (4) есть уже поступание совмещения, а поступания (1) с (2), (3) с (7) и (5) с (6) относятся к одной группе, а потому выводим 3 новые системы:

$$1)\quad y=b+f\lambda/2; \quad z=n^j c+(f+j+k)\lambda_0/2; \quad v=n^k d+\lambda_1 \qquad (11\,\mathrm{h})$$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси z и отстоящая от начала на расстояние $\lambda_0/4$,

проходящая через равнодействующие винтовые оси

2) $y = b + f\lambda/2; z = n^j c + f\lambda/2; v = n^k d + (j + k)\lambda/2$ (12h)

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси v и отстоящая от начала на расстояние $\lambda_1/4$ (проходящая в промежутке между осями).

$$3)\quad y = b + f\lambda/2;\quad z = n^j c + (f + k)\lambda/2;\quad v = n^k d + (j + k)\lambda/2 \qquad (13\text{h})$$

В этом случае имеется плоскость скольжения, расположенная одинаково с плоскостью симметрии предыдущего случая; направление скольжения по оси z и величина его $\lambda/2$.

При выводе из системы (16s) мы должны иметь в виду, что поступание (7) есть уже поступание совмещения, что поступания (1) с (5), (2) с (6) и (3) с (4) относятся к одной группе, и кроме того направления осей z и v равнозначны. Поэтому выводим всего 2 новые системы:

$$1)\quad \left.\begin{array}{c} y = b + f\lambda/2;\quad z = n^j c + (f + j + k)\lambda_0/2 \\ v = n^k d + f\lambda_1/2 \end{array}\right\} \qquad (14\text{h})$$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси z и отстоящая от начала на расстояние $\lambda_0/4$.

$$2)\quad y = b + (f + j + k)\lambda/2;\quad z = n^j c + f\lambda/_0 2;\quad v = n^k d + f\lambda_1/2 \qquad (15\text{h})$$

В этом случае yz и yv плоскости скольжения, имеющего направлением ось y и величину $\lambda/2$.

Наконец при выводе из системы (17s) нужно иметь в виду, что поступания (4), (5) и (6) есть поступания совмещения, а поступания (1), (2), (3) и (7) принадлежат одной группе.

Совершенно особенный случай представляет образующее поступание, имеющее слагающие ($\lambda/4$, $\lambda_0/4$, $\lambda_1/4$), которое производит систему:

$$\left.\begin{aligned} y&=b+g\lambda/2+(j+k)\lambda/4\\ z&=n^jc+(f+g)\lambda_0/2+(j+k)\lambda_0/4\\ v&=n^kd+f\lambda_1/2+(j+k)\lambda_1/4 \end{aligned}\right\}\quad (17\ \text{h})$$

В этом случае плоскостей симметрии не имеется; плоскости скольжения, перпендикулярные к осям z и v, отстоят от начала на расстояние $\lambda_0/8$ и $\lambda_1/8$.

8. Голоэдрия

При выводе из системы (18 s) нужно иметь в виду равнозначность направлений всех трех осей, вследствие чего выводим всего 3 новые системы:

1) $y=n^jb+(j+k+l)\lambda/2;\ z=n^kc+\lambda_0;\ v=n^ld+\lambda_1$ (18 h)

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y и отстоящая от начала на расстояние $\lambda/4$.

2) $y=n^jb+\lambda;\quad z=n^kc+(j+k+l)\lambda_0/2$
$v=n^ld+(j+k+l)\lambda_1/2$ (19 h)

В этом случае имеется плоскость скольжения, перпендикулярная к оси z и отстоящая от начала на расстояние $\lambda_0/4$; направление скольжения есть ось v, и величина его $\lambda_1/2$.

3) $y=n^jb+(j+k+l)\lambda/2;\ z=n^kc+(j+k+l)\lambda_0/2$
$v=n^ld+(j+k+l)\lambda_1/2$ (20 h)

В этом случае та же плоскость скольжения, что в предыдущем случае; направление скольжения имеет слагающие на осях y и v соответственно $\lambda/2$ и $\lambda_1/2$.

При выводе из системы (19 s) мы имеем лишь равнозначность осей z и v; но, кроме того, поступания (1) и (7) относятся к одной группе, а поступание (5) есть поступание совмещения.

Поэтому выведем 3 новые системы:

1) $$\left.\begin{aligned} y&=n^jb+(j+k+l)\lambda/2;\quad z=n^kc+f\lambda_0/2\\ v&=n^ld+f\lambda_1/2 \end{aligned}\right\}\quad (21\ \text{h})$$

При этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к особенной оси y, отстоящая от начала на расстояние $\lambda / 4$.

2) $$\left. \begin{array}{c} y = n^j b + \lambda; \quad z = n^k c + (f + j + k + l) \lambda_0 / 2 \\ v = n^l d + f \lambda_1 / 2 \end{array} \right\} \quad (22\,h)$$

В этом случае имеются плоскости симметрии, перпендикулярные друг к другу и пересекающиеся в равнодействующей двойной оси симметрии, параллельной y.

3) $$\left. \begin{array}{l} y = n^j b + (j + k + l) \lambda / 2; \\ z = n^k c + (f + j + k + l) \lambda_0 / 2 \\ v = n^l d + f \lambda_1 / 2 \end{array} \right\} \quad (23\,h)$$

В этом случае плоскость симметрии случая (21h) есть уже плоскость скольжения, коего направление есть ось z, а величина $\lambda / 2$.

При выводе из системы (20s) нужно иметь в виду снова равнозначность всех трех осей, y, z и v, а также то, что поступание (1) с (5), (2) с (6) и (3) с (4) относятся к одной группе. Поэтому выведем всего одну систему:

$$\left. \begin{array}{c} y = n^j b + (f + j + k + l) \lambda / 2; \quad z = n^k c + f \lambda_0 / 2 \\ v = n^l d + f \lambda_1 / 2 \end{array} \right\} \quad (24\,h)$$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y, отстоящая от начала на расстояние $\lambda / 4$ (проходящая чрез равнодействующие винтовые оси, параллельные осям z и v).

Наконец, при выводе из системы (21s) мы не только будем иметь принадлежность поступаний (1), (2), (3) и (7) к одной группе, а поступаний (4), (5) и (6) к поступаниям совмещения, но еще убедимся в том, что какое-нибудь поступание (1) приведет к симморфической системе, равнозначной с системой (21s); следовательно, здесь мы не выведем ни одного случая.

Особенный случай представляет система

$$
\begin{aligned}
y &= n^j b + g\lambda/2 = (j+k+l)\lambda/4 \\
z &= n^k c + (f+g)\lambda/2 + (j+k+l)\lambda_0/4 \qquad (16\,\text{h}) \\
v &= n^l d + f\lambda/2 + (j+k+l)\lambda/4
\end{aligned}
$$

Эта система выводится из (21s) аналогично тому, как (17h) из (17s). В этом случае имеются плоскости скольжения, перпендикулярные к осям координат и отстоящие от начала на расстояние $\lambda/8$, $\lambda_0/8$ или $\lambda_1/8$.

Тетрагональная система

10. Гемиморфия

В системах, сюда относящихся, образующее поступание должно или совпадать с четверною осью $\overset{4}{y}$, или приводить ее в совмещение с равнодействующей ей четверною же осью симметрии.

Поэтому из системы (24 s) выведем 3 новые:

1) $y = b + k\lambda/2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0$ (25 h)

В этом случае все плоскости симметрии, пересекающиеся в четверной оси y, становятся плоскостями скольжения, направление которого есть ось y и величина $\lambda/2$.

2) $y = b + \lambda; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + k\lambda_0/2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + k\lambda_0/2$ (26 h)

В этом случае имеются плоскости симметрии, пересекающиеся под прямым углом в равнодействующих двойных осях симметрии.

3) $y = b + k\lambda/2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + k\lambda/2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + k\lambda_0/2$ (27 h)

В этом случае плоскости симметрии предыдущего становятся плоскостями скольжения, имеющего направлением ось y и величину $\lambda/2$.

При выводе из системы (25s) два из поступаний предыдущего случая принадлежат одной группе, а третье, приведшее к системе (27h), теперь есть поступание совмещения системы, а потому выведем одну лишь систему:

$$y = b + (f + k)\lambda/2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + f\lambda_0/2;$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad (28\,\mathrm{h})$$

В этом случае (на основании теоремы 8) имеются две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, расположенные аналогично тому, как в системе (26h), т. е. пересекающиеся под прямым углом в равнодействующих четверных осях с ходом $\lambda/2$. Заключение это вытекает из того, что параллельные им плоскости симметрии проходят через равнодействующие двойные винтовые оси, параллельно которым совершается образующее поступание.

12. Бипирамидальная гемиэдрия

Теперь образующее поступание по направлению оси y изменяет лишь положение перпендикулярной к ней плоскости симметрии, не приводя ни к чему новому.

Поэтому из системы (28s) выведем лишь одну систему:

$$y = n^k b + \lambda; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + k\lambda_0/2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + k\lambda_0/2 \qquad (29\,\mathrm{h})$$

В этом случае плоскость симметрии системы (28s) становится плоскостью скольжения, слагающие которого на осях y_0 и y_1 равны $\lambda_0/2$. Легко понять, что из системы (29s) мы не выведем ни одной новой.

14. Скаленоэдрическая гемиэдрия

Для систем, сюда относящихся, образующими поступаниями могут быть:

1) $(\lambda/2, 0, 0)$; 2) $(0, \lambda_0/2, \lambda_0/2)$ и 3) $(\lambda_0/2, \lambda_0/2, \lambda_0/2)$

Однако нетрудно убедиться, что при выводе из системы (32 s) поступание (2), перемещая положение плоскостей симметрии, приводит к симморфической системе, равнозначной с (32 s). Поэтому только поступание (1) дает новую систему:

$$y = n^{i+k} b + i\lambda/2; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0; \; y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (30\,\mathrm{h})$$

В этом случае две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии первоначальной системы становятся плоскостями скольжения, направление которого — ось y и величина $\lambda/2$.

При выводе из системы (33 s) половинное поступание в плоскости, параллельной плоскости симметрии, и притом перпендикулярное к оси y, уже не есть образующее поступание, так как оно не приводит к совпадению всех осей совмещения; но если мы возьмем поступание, например, по оси y_0, слагающими которого будут только что упомянутые поступания, то оси совмещения совпадут. Поэтому теперь имеем следующие 3 образующие поступания:

1) $(\lambda/2, 0, 0)$; 2) $(0, \lambda_0/2, 0)$; 3) $(\lambda/2, \lambda_0/2, 0)$

Соответственно первому из них получаем систему:

$$1)\; y = n^{i+k} b + i\lambda/2; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad (31\,\mathrm{h})$$

В этом случае плоскости симметрии первоначальной системы становятся плоскостями скольжения, имеющего направлением ось y и величину $\lambda/2$.

$$2)\; y = n^{i+k} b + \lambda; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + (f + i)\lambda_0/2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad (32\,\mathrm{h})$$

В этом случае за плоскость скольжения можно принять плоскость, параллельную одной из предыдущих, и притом отстоящую от нее на расстояние половинного поступания совмещения (слагающие по осям y_0 и y_1 — $\lambda_0/4$); направление

скольжения перпендикулярно к другой плоскости той же пары, и величина его — то же половинное поступание совмещения.

3) $y = n^{i+k} b + i\lambda / 2;\ y_0 = \overset{4}{b}_i + (f+i)\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2$ (33 h)

Этот случай отличается от предыдущего только присоединением слагающей $\lambda / 2$ по направлению оси y к направлению скольжения.

При выводе из системы (34 s) мы снова найдем, что половинное поступание в плоскости симметрии не есть образующее; но, сложив два таких поступания, мы придем к образующим поступаниям одной группы:

1) $(\lambda / 2, 0, 0)$; 2) $(0, \lambda / 2, \lambda / 2)$

Однако эти поступания приводят к симморфической системе, равнозначной с системой (34 s), а потому ни одной новой системы не получим.

Наконец из системы (35 s) выведем одну новую:

$$y = n^{i+k} + (g+i)\lambda / 2;\quad y_0 = \overset{4}{b}_i + (f+g)\lambda_0 / 2;$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2 \qquad (34\text{ h})$$

В этом случае плоскости скольжения замещают плоскости симметрии первоначальной площади аналогично случаю (31h).

15. Голоэдрия

Из системы (36 s) выведем следующие 3:

1) $y = n^{k+l} b + l\lambda / 2;\quad y_0 = \overset{4}{b}_i + \lambda_0;\quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0$ (35 h)

В этом случае имеются плоскости симметрии, перпендикулярные к оси y и отстоящие от начала на расстояние $\lambda / 4$.

2) $y = n^{k+l} b + \lambda;\quad y_0 + \overset{4}{b}_i + l\lambda_0 / 2;\quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + l\lambda_0 / 2$ (36 h)

В этом случае имеются плоскости симметрии, расположенные аналогично случаю (26 h).

3) $y = n^{k+l}b + l\lambda/2;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + l\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + l\lambda_0/2$ (37 h)

В этом случае плоскости симметрии предыдущего становятся плоскостями скольжения, имеющего направление оси y и величину $\lambda/2$.

Наконец, из системы (37s) выведем одну новую:

$y = n^{k+l}b + (f+l)\lambda/2;\ y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2$ (38 h)

В этом случае имеются плоскости симметрии, расположенные аналогично случаю (26 h) и еще плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y и отстоящая от начала на расстояние $\lambda/4$.

Гексагональная система

17. Тетартоморфия

В этом случае образующее поступание должно приводить к совмещению первоначальные тройные оси симметрии с ними самими или с равнодействующими тройными осями; если бы ось $\overset{3}{y}$ совместилась при таком поступании с осью $\overset{3}{y'}$, то, повторив то же поступание второй раз, мы привели бы ее к совмещению с осью $\overset{3}{y''}$: это двойное поступание, следовательно, не было бы поступанием совмещения простой системы данного случая. Остается возможность образующего поступания по направлению оси y.

Поэтому из каждой из систем (40) — (42) выведем лишь по одной новой, а именно: из системы (40 s):

$y = b + k\lambda/2;\ y_0 = \overset{3}{b_i} + \lambda_0;\ y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + \lambda_0$ (39 h)

из системы (41s):

$$y=b+k\lambda/2;\ y_0=\overset{3}{b_i}+f\lambda_0/3;\ y_1=\overset{3}{b}_{i+n^k}+f_0\lambda/3 \quad (40\,\mathrm{h})$$

и из системы (42 s):

$$y=b+f\lambda/3+k\lambda/2;\ y_0=\overset{3}{b_i}+f\lambda_0/3;\ y_1=\overset{3}{b}_{i+n^k}+f\lambda_0/3 \quad (41\,\mathrm{h})$$

Во всех этих трех случаях первоначальные плоскости симметрии заменяются плоскостями скольжения, направление которого есть ось y и величина $\lambda/2$.

18. Бипирамидальная тетартоэдрия

Так как в этом случае образующее поступание по направлению оси y не приводит к выводу новой системы, то на основании сказанного для предыдущего отделения здесь вообще никаких новых систем не выведем.

20. Гемиэдрия

Легко понять, что для этого отделения выведем из системы (47s):

$$y=n^{k+l}b+l\lambda/2;\quad y_0=\overset{3}{b_i}+f\lambda_0/3;\quad y_1=\overset{3}{b}_{i+n^k}+f\lambda_0/3 \quad (42\,\mathrm{h})$$

а из системы (48 s):

$$y=n^{k+l}b+l\lambda/2;\quad y_0=\overset{3}{b_i}+\lambda_0;\quad y_1=\overset{3}{b}_{i+n^k}+\lambda_0 \quad (43\,\mathrm{h})$$

В обоих случаях имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y и отстоящая от начала на расстояние $\lambda/4$. Плоскости скольжения как в тетартоморфии.

22. Гемиморфия

Для этого отделения выведем всего одну новую систему из системы (50 s).

$$y=b+k\lambda/2;\ y_0=\overset{6}{b_i}+\lambda_0;\ y_1=\overset{6}{b}_{i+n^k}+\lambda_0 \quad (44\,\mathrm{h})$$

В этом случае плоскости симметрии первоначальной системы заменяются плоскостями скольжения, имеющего направление оси y и величину $\lambda/2$.

24. Бипирамидальная гемиэдрия

Здесь не выведем ни одной новой системы по той же причине, что и для одноименной тетартоэдрии.

26. Скаленоэдрическая гемиэдрия

Для этого отделения выведем 3 системы, а именно: из системы (55 s):

$$y = n^i b + (i+k)\lambda/2; \quad y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (45\,\text{h})$$

из системы (56s):

$$y = n^i b + (i+k)\lambda'/2; \quad y_0 = \overset{6}{b}_i + f\lambda_0/3; \quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/3 \qquad (46\,\text{h})$$

и из системы (57 s):

$$y = n^i b + f\lambda/3 + (i+k)\lambda/2; \quad y_0 = \overset{6}{b}_i = f\lambda_0/3;$$
$$y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/3 \qquad (47\,\text{h})$$

Во всех трех случаях плоскости симметрии первоначальной системы заменяются плоскостями скольжения, имеющего направление оси y и величину $\lambda/2$.

27. Голоэдрия

Для этого отделения выведем лишь одну систему из системы (58 s), а именно:

$$y = n^{k+l} b + l\lambda/2; \quad y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (48\,\text{h})$$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y, находящаяся на расстояние $\lambda/4$ от начала.

Кубооктаэдрическая система

В каждом отделении этой системы имеется по 3 вида симморфических систем соответственно 3 видам относящихся сюда параллелоэдров.

Чтобы вывести гемисимморфическую систему, теперь необходимо не только ось x (двойную или четверную) совместить с нею самою или одноименною ей равнодействующею осью, но также и одну из тройных осей, например O, с нею самою или одноименною равнодействующей осью. Так как эти две оси как первоначальные определяют положение всех остальных, то, выполнив такое совмещение при других условиях, необходимых и достаточных для образующего поступания, мы получим гемисимморфическую систему.

В случае куба, в центре которого представим находящимся центр симметрии и стороны которого равны λ, все тройные оси только один раз пересекаются в его центре, но касаются в его вершинах. В тех же вершинах находятся и равнодействующие оси x, и вообще поступание от центра куба к одной из его вершин вполне удовлетворяет всем условиям, необходимым и достаточным для образующего поступания системы.

В случае *особого притупленного октаэдра* тройные оси также лишь один раз пересекаются в его центре и больше нигде даже не касаются фигуры. Поэтому никаких вообще гемисимморфических систем в этом случае вывести нельзя.

Наконец в случае *ромбического додекаэдра* тройными осями будут все ребра фигуры, а через его тетрагоноэдрические вершины проходят и четверные (или двойные) оси симметрии. Поэтому за образующее поступание можно принять направление осей x. Присоединяя к одному такому поступанию (имеющему величину $\lambda/2$) одно из перпендикулярных к нему поступаний совмещения данного случая, придем к образующему поступанию, одинаковому с выве-

денным для случая куба, но уже принадлежащему к одной группе с только что выведенным образующим поступанием.

Итак, для каждого отделения двойных симморфических систем мы можем вывести две гемисимморфические.

29. Додэкаэдрическая гемиэдрия

Из (62 s) выводим систему:

$$\left.\begin{array}{c} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (j+k+l)\lambda/2; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + (j+k+l)\lambda/2 \\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2} + (j+k+l)\lambda/2 \end{array}\right\} \quad (49\ \mathrm{h})$$

В этом случае можно принять плоскость скольжения, перпендикулярную к одной из осей, например x_0, находящеюся от начала в расстоянии $\lambda/4$ и с таким направлением и величиной скольжения, что его слагающие на двух других осях, x_1 и x_2, будут $\lambda/2$.

Из (64 s) выводим систему:

$$\begin{array}{c} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (f+i+k+l)\lambda/2; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + (f+g)\lambda/2 \\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2} + g\lambda/2 \end{array} \quad (50\ \mathrm{h})$$

В этом случае имеются плоскости симметрии, пересекающиеся по три под прямым углом, в равнодействующих двойных осях x_0', x_1', x_2'.

30. Тетраэдрическая гемиэдрия

Из (65 s) выводим систему:

$$\left.\begin{array}{c} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + l\lambda/2; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^l} + l\lambda/2 \\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2n^l} + l\lambda/2 \end{array}\right\} \quad (51\ \mathrm{h})$$

В этом случае первоначальные плоскости симметрии заменяются плоскостями скольжения, направленного по октаэдрическим осям.

Из (67s) выводим систему:

$$\left.\begin{aligned} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (f+l)\,\lambda/2;\ \ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n}{}^{l} + (f+g)\,\lambda/2 \\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2n}{}^{l} + g\,\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (52\,\mathrm{h})$$

В этом случае плоскости скольжения удалены от начала по направлению осей x_0, x_1 и x_2 на величину $\lambda/4$.

32. Голоэдрия

Из (71 s) выводим систему:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^j \overset{3}{a}_i + (j+k+l+m)\,\lambda/2 \\ x_1 &= n^k \overset{3}{a}_{i+n}{}^{m} + (j+k+l+m)\,\lambda/2 \\ x_2 &= n^l \overset{3}{a}_{i+2n}{}^{m} + (j+k+l+m)\,\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (53\,\mathrm{h})$$

В этом случае плоскости симметрии, пересекающиеся в октаэдрических тройных осях, заменяются плоскостями скольжения, направления которого — эти оси.

Из (73 s) выводим систему:

$$\left.\begin{aligned} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (f+j+k+l+m)\,\lambda/2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n}{}^{m} + (f+g)\,\lambda/2 \\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2n}{}^{m} + g\,\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (54\,\mathrm{h})$$

В этом случае имеются плоскости симметрии, пересекающиеся по три под прямым углом в равнодействующих четверных осях с ходом $\lambda/2$ — $\overset{4v}{x_0}$, $\overset{4v}{x_1}$ и $\overset{4v}{x_2}$.

Стереоэдры гемисимморфических систем

Гемисимморфические системы состоят из двух простых систем фигур, связанных плоскостями симметричности (так как сложная симметрия отсутствует). Симметрия совмеще-

ния каждой отдельной фигуры, так же как и всей системы, всегда одинакова с симметрией некоторой симморфической системы. Как фигуры вообще группируются попарно, так и параллелоэдр гемисимморфической системы должен состоять из двух фигур, связанных плоскостью симметричности. Каждая из этих половинных фигур, которые мы впредь будем называть ***сложными стереоэдрами***, и распадается по закону симметрии на число S_1 совместимо равных простых стереоэдров, где S_1 — величина симметрии совмещения.

Нам удастся вывести сложный стереоэдр, если удастся из данной гемисимморфической системы, присоединяя к ней другие ей равные и параллельные, получить систему симморфическую. В самом деле, для каждой из последних параллелоэдр и разделение его на стереоэдры известны нам из предыдущей главы. Отнимая снова прибавленные системы, мы возвратимся к первоначальной гемисимморфической системе; но при этом с каждым первоначальным простым стереоэдром сольются смежные в числе, равном числу прибавленных систем, образуя сложный стереоэдр.

При этом выводе мы можем различать 2 случая: 1) когда прибавление одной системы (принимая образующее поступание за поступание совмещения) к данной гемисимморфической прямо приводит к симморфической системе. В этом общем случае сложный стереоэдр представляет то же, что в симморфической системе было параллелоэдром, и 2) исключительный случай (1 из 54), когда при этом условии не образуется правильной системы точек, а для получения последней необходимо еще прибавление равных систем. В этом случае в сложный стереоэдр сливается несколько параллелоэдров симморфической системы.

На этом основании составлена нижеприводимая таблица.

№ системы	Сложный стереоэдр	Симметрия сложного стереоэдра
1 h	5 a,c	1 a,b
2 h	6 b,d,e,f,g,h,i	1 a,b,c,d
3 h	7 a,c	3 a,c
4 h	8 b,d,e,f,g,h,i	4 b,d,e,f,g,h.i
5 h	13 a	3 a
6 h	13 a	3 a
7 h	15 c,e,f	4 b,d.e
8 h	16 h,i,k	4 f.g,h
9 h	14 b,d	3 a,c
10 h	14 b,d	3 a,c
11 h	13 a	3 a
12 h	15 c,f,e	4 b,d,e
13 h	17 g,l,m	4 i,g,h
14 h	15 c,f,e	4 b,d,e
15 h	14 b.d	3 a.c
16 h	13 a	3 a
18 h	18 a	9 a
19 h	19 b.c	10 b,c
20 h	20 e,f	11 e,f
21 h	19 b,c	10 b,c
22 h	18 a	9 a
23 h	21 d,g	12 d,g
24 h	19 b.c	10 b,c
25 h	24 a	22 a
26 h	24 a	22 a
27 h	25 b.c	23 b,c
28 h	24 a	22 a
29 h	28 a	22 a
30 h	32 a	9 a
31 h	33 a	10 b
32 h	32 a	9 a
33 h	35 c,f	12 d,g
34 h	32 a	9 a
35 h	36 a	30 a
36 h	36 a	30 a
37 h	37 a	31 b,c
38 h	36 a	30 a
39 h	40	38 b

№ системы	Сложный стереоэдр	Симметрия сложного стереоэдра
40 h	41	38 b
41 h	42 a,d,e	39 a, d, e
42 h	47 g	44 b
43 h	48 b	45 c
44 h	50 a	49 a
45 h	55 b	44 b
46 h	56 c	45 c
47 h	57 a,d,e	46 a, d, e
48 h	58	54 a
49 h	63	60
50 h	62	95
51 h	66	60
52 h	65	59
53 h	72	69
54 h	71	68

В этой таблице первый столбец заключает №№ гемисимморфических систем по порядку. Второй столбец дает сложный стереоэдр (по №№ табл. IV и V), выводящийся в предположении замены образующего поступания поступанием совмещеная, а в третьем столбце ссылка на параллелоэдры, менее симметричные, указывает закон разделения сложного стереоэдра на простые.

В приложенной таблице пропущен исключительный случай (17 h), который рассмотрим отдельно. Если примем в этом случае одну из плоскостей скольжения, например перпендикулярную к оси z, за плоскость симметрии, то еще не получим правильной системы; последнее симметрическое преобразование равносильно принятию образующего поступания, имеющего, например, слагающие $(\lambda/4, 0, \lambda_1/4)$, за поступание совмещения. Правильная симморфическая система получится, если мы к этой системе прибавим еще систему, выведенную из нее посредством поступания совмещения Табл. IV фиг. 74

$(-\lambda/4, 0, \lambda_1/4)$; выведенной симморфической системе соответствует параллелоэдр (15с); отняв прибавленные системы, т. е. вернувшись к данной, мы найдем, что фигуры эти сольются по 4 в данном сложном стереоэдре, как это изображено на фиг. 74,[1] на которой показаны пунктиром плоскости скольжения, y означают двойную ось симметрии, а $\breve{y}$ — двойную винтовую ось.

III. СИСТЕМЫ АСИММОРФИЧЕСКИЕ

При выводе систем симморфических мы в основании его допускали предположение, что все элементы симметрии пересекаются в одной точке — центре симметрии; и, соответственно этому, фигуры, входящие в состав системы, имеют симметрию, одинаковую с симметрией самих систем.

При выводе систем гемисимморфических остается лишь предположение, что в центре симметрии пересекаются все имеющиеся виды осей симметрии и, соответственно этому, фигуры, входящие в состав системы, имеют симметрию, вдвое меньшую симметрии системы.

Теперь, переходя к выводу систем асимморфических, мы устраним и только что сделанное предположение, т. е. допустим, что все виды осей симметрии могут и не пересекаться между собою, а также введем и другое, пропущенное при выводе симметрии конечных фигур условие, а именно возможность принимать первоначальные оси совмещения за винтовые. Выведя все простые асимморфические системы, мы выведем из них и все двойные, присоединяя к каждой из них систему аналогическую, причем она должна быть связана с первоначальной системой плоскостью симметричности; величина скольжения должна быть равна половине величины поступания совмещения той же системы в том же направлении; кроме того, аналогическая система должна занимать такое положение, при котором все ее оси совмещения совпадают с осями совмещения первоначальной системы; затем подвер-

гаем эту систему образующим поступаниям, выводимым аналогично таким же поступаниям при выводе гемисимморфических систем из симморфических. Замечу при этом, что для совпадения совокупности всех осей совмещения двух аналогических систем достаточно, чтобы совпали те две из осей, которые могут быть приняты за первоначальные, т. е. такие, из которых выводятся все остальные оси как результирующие.

Из только что сказанного следует, что асимморфических систем не существует в тех отделениях, в которых нет осей совмещения, так как для таких нельзя сделать ни одного из допущений, характерных для систем асимморфических. Что асимморфические системы не существуют и для отделений, характеризующихся сложной симметрией, нам известно из общего введения.

Переходя к выводу этих систем в том порядке, в каком мы выводили и системы симморфические, теперь придется пропустить триклиноэдрическую систему и гемиэдрию моноклиноэдрической, а также тетартоэдрию тетрагональной и ромбоэдрическую тетартоэдрию гексагональной системы.

Предварительно выведу, однако, следующую теорему:

Теорема 9. *Если в двух аналогических простых системах S и S', связанных плоскостью симметрии, имеются винтовые оси наименования p, с ходом l, находящиеся в плоскости симметрии, то передвижение одной из них, например S', по направлению оси на величину l равносильно образованию новой системы S'', аналогической с S и связанной с нею плоскостью симметрии, повороченною относительно первоначальной на угол π/p.*

Пусть системе S принадлежит точка

$$y = b; \quad y_0 = b_i; \quad y_1 = b_{i+1} \qquad \text{(a)}$$

а системе S' принадлежит точка (пл. сим. есть плоскость yy_0)

$$y = b; \quad y_0 = b_i; \quad y_1 = b_{i-1}$$

Приняв винтовую ось за правую, найдем, что системе S' принадлежит также точка

$$y = b + l;\quad y_0 = b_{i+1};\quad y_1 = b_i \qquad \text{(b)}$$

Но из точки (а), присоединяя плоскость симметрии, проходящую через ось y и делящую пополам угол между осями y_0 и y_1 (т. е. плоскость симметрии, повернутая относительно первоначальной на угол π/p), получим точку системы S'':

$$y = b;\quad y_0 = b_{i+1};\quad y_1 = b_i \qquad \text{(c)}$$

Сравнение выражений (с) и (b) и составляет доказательство предложенной теоремы.

Примечание. Теорему эту мы можем выразить и так: если из двух простых систем, связанных плоскостью симметрии, проходящею через винтовую ось наименования p с ходом l, одну мы передвинем по направлению оси y на величину l (в положительном направлении, если ось левая, и отрицательном, если ось правая), то вместе с тем в положительном направлении (т. е. от оси y_0 к y_1 и т. д.) повернется около той же оси плоскость симметрии на угол π/p.

Теорема 8 составляет, следовательно, лишь частный случай теоремы, выраженной таким образом.

Моноклиноэдрическая система

3. Гемиморфия

Табл. III фиг. 1

В этом случае можно сделать лишь одно допущение, а именно, что первоначальная двойная ось совмещения есть ось винтовая; в предположении, что направление этой оси есть направление, сопряженное с плоской сеткой, ей перпендикулярной, выведем систему:[1]

$$y = b + j\lambda/2;\quad z = n^j c + \lambda_0;\quad v = n^j d + \lambda_1 \qquad \text{(1 a)}$$

В этом случае, на основании теоремы 2, все равнодействующие оси винтовые.

[1] Зонке, 8.

Предположив, что направление оси y не есть сопряженное перпендикулярной к ней плоской сетке, мы на основании теоремы 2 получили бы равнодействующие двойные оси симметрии, которые могли принять за первоначальные, т. е. пришли бы к системе симморфической.

5. Голоэдрия

Присоединяя, по законам симметрии этого случая, плоскость симметрии, перпендикулярную к оси предыдущего случая, мы непосредственно получаем совмещение осей обеих аналогичных систем, и, следовательно, приходим к новой асимморфической системе:

$$y = n^k b + j\lambda / 2; \quad z = n^j c + \lambda_0; \quad v = n^j d + \lambda_1 \qquad (2\,s)$$

Присоединяя образующее поступание, параллельное плоскости симметрии, найдем систему:

$$y = n^k b + j\lambda / 2; \quad z = n^j c + \lambda_0; \quad v = n^j d + k\lambda_1 / 2 \qquad (3\,a)$$

В этом случае плоскость симметрии предыдущего случая заменяется плоскостью скольжения, направление которого есть направление поступания совмещения, перпендикулярного к оси z, а величина — половина поступания совмещения в этом направлении.

Ромбическая система

6. Гемиэдрия

В этом случае имеются две взаимно-перпендикулярные первоначальные двойные оси совмещения, которые мы можем принять за непересекающиеся и за винтовые.

Примем их, сначала одну, а затем обе, за винтовые и пересекающиеся, а потом предположим их и непересекающимися. Пусть ось y будет винтовою, а ось v — осью симметрии.

Из точки (b, c, d) и оси симметрии выведем точку:

$$y = -b; \quad z = -c; \quad v = d \qquad \text{(a)}$$

Из точки (a) и винтовой оси y выведем еще точку:

$$y = -b + \lambda / 2; \quad z = c; \quad v = -d \qquad \text{(b)}$$

Из выражения (b) усматриваем, что в данном случае имеется равнодействующая двойная ось симметрии, параллельная оси z. Чтобы найти положение этой оси, допустим, что она получится из оси z поступанием по направлению оси y на величину l. Переместим сначала в этом направлении и на эту величину оси координат; в таком случае положение точки (b, c, d) выразится так:

$$y = b - l; \quad z = c; \quad v = d \qquad \text{(c)}$$

Так как теперь ось z есть ось симметрии, то из точки (c) выведем другую точку:

$$y = -b + l; \quad z = c; \quad v = -d$$

а возвратившись к первоначальным осям координат, получим выражение:

$$y = -b + 2l; \quad z = c; \quad v = -d \qquad \text{(d)}$$

Сравнивая (d) с (b), найдем $2l = \lambda / 2$ или $l = \lambda / 4$.

В предположении, что направления осей суть направления сопряженные, получим систему: [1]

$$y = n^k b + j\lambda / 2; \quad z = n^{k+j} + \lambda_0; \quad v = n^j d + \lambda_1 \qquad \text{(4 a)}$$

Табл. III фиг. 4. В этом случае равнодействующие осей y будут лишь оси винтовые, а равнодействующие осей z и v — лишь оси симметрии.

В предположении, что элементарное поступание в плоскости, перпендикулярной к оси $\breve{y}$, переводит эту ось в по-

[1] Зонке, 6.

ложение $\breve{y}'''$, но что направление этих осей есть направление, сопряженное с плоскою сеткою, к ней перпендикулярною, получим систему: [1]

$$y = n^k b + j\lambda/2; \quad z = n^{k+j} c + f\lambda_0/2; \quad v = n^j d + f\lambda_1/2 \quad (5\,\text{a})$$

В этом случае равнодействующие осей y будут лишь оси винтовые, а равнодействующие осей z и v — оси симметрии и винтовые. Табл. III фиг. 5.

В предположении, что в плоской сетке, параллельной zv, направления этих осей суть направления сопряженные, но что направление осей y не есть сопряженное с этой плоской сеткой и переводит ось $\breve{y}$ в положение $\breve{y}''$ (фиг. 4), найдем систему: [2]

$$y = n^k b + (f + j)\lambda/2; \quad z = n^{k+j} c + f\lambda_0/2; \quad v = n^j d + f\lambda_1/2 \quad (6\,\text{a})$$

В этом случае равнодействующие всех осей — оси винтовые и симметрии, и притом оси располагаются так, что становятся равнозначными; каждая двойная ось симметрии пересекается последовательно с перпендикулярными к ней винтовыми осями. Табл. III фиг. 6.

Для того, чтобы нагляднее выразить равнозначность всех осей, перенесем начало координат в точку, от которой все оси симметрии находятся в расстоянии четверти наименьших поступаний по направлению этих осей. Если в новых координатах дана точка (b, c, d), то, перенеся сначала оси координат в направлении оси v на величину $\lambda_1/4$, вследствие чего координаты той же точки будут теперь:

$$y = b; \quad z = c; \quad v = d - \lambda_1/4 \quad (\text{a})$$

и приняв теперь ось y за двойную ось симметрии, получим:

$$y = b; \quad z = n^j c; \quad v = n^j (d - \lambda_1/4) \quad (\text{b})$$

---

[1] Зонке, 9.
[2] Зонке, 11.

Перенеся теперь оси координат по направлению оси v на обратную величину и по направлению оси z на величину $\lambda_0/4$, получим для точек (b) выражение:

$$y = b;\quad z = n^j c - \lambda_0/4;\quad v = n^j(d - \lambda_1/4) + \lambda_1/4 \qquad (c)$$

Приняв теперь ось v за двойную ось симметрии, получим:

$$y = n^k b;\quad z = n^{j+k} c - n^k \lambda_0/4;\quad v = n^j(d - \lambda_1/4) + \lambda_1/4 \qquad (d)$$

Перенеся теперь оси координат по направлению оси z на обратную величину, мы этим самым возвратимся к первоначальным координатам и для точек (d) получим:

$$y = n^k b;\quad z = n^{j+k} c + (1 - n^k)\lambda_0/4$$
$$v = n^j d + (1 - n^j)\lambda_1/4 \qquad (e)$$

Принимая во внимание, что, по смыслу выражений, мы можем написать следующие тождества:

$$1 - n^k = 2k;\quad 1 - n^j = 2j \qquad (A)$$

мы, пользуясь им, приведем уравнение (e) к виду:

$$y = n^k b;\quad z = n^{j+k} c + k\lambda_0/2;\quad v = n^j d + j\lambda_1/2 \qquad (f)$$

Наконец, присоединяя выражение элементарного поступания совмещения данного случая, получаем окончательно:[1]

$$y = n^k b + f\lambda/2;\quad z = n^{j+k} c + (f + k)\lambda_0/2$$
$$v = n^j b + (f + j)\lambda_1/2 \qquad (6\,a')$$

Нетрудно убедиться, что в предположении других возможных направлений элементарного поступания мы придем к системам симморфическим.

---

[1] Уравнения эти легко и прямо вывести из уравнений (6 a), заменив в них точку (b, c, d) точкою $(b, c + \lambda_0/4, d)$ и, соответственно этому, перенеся оси координат по направлению оси z на величину $\lambda_0/4$.

Поэтому перейдем к случаю, когда обе оси, z и v, винтовые.

Из данной точки (b, c, d) и оси v выведем точку:

$$y = -b; \quad z = -c; \quad v = d + \lambda_1 / 2 \qquad \text{(a)}$$

Из точки (a) и винтовой оси z выведем точку:

$$y = b; \quad z = -c + \lambda_0 / 2; \quad v = -d + \lambda_1 / 2 \qquad \text{(b)}$$

Из выражения (b) легко усмотреть, что в данном случае имеется равнодействующая двойная ось симметрии, параллельная y.

Чтобы найти положение последней, перенесем сначала оси координат по направлению оси z на величину l_0 и по направлению оси v на величину l_1, почему для точки (b, c, d) получим выражение:

$$y = b; \quad z = c - l_0; \quad v = d - l_1 \qquad \text{(c)}$$

Так как теперь ось y есть ось симметрии, то из (c) выведем точку:

$$y = b; \quad z = -c + l_0; \quad v = -d + l_1 \qquad \text{(d)}$$

а возвратившись к первоначальным координатам:

$$y = b; \quad z = -c + 2l_0; \quad z = -d + 2l_1 \qquad \text{(e)}$$

Сравнение (e) с (b) показывает, что $l_0 = \lambda_0 / 4$ и $l_1 = \lambda_1 / 4$.

В предположении сопряженности направлений всех трех осей получаем систему:[1]

$$y = n^{k+j} b + \lambda; \quad z = n^k c + j\lambda_0 / 2; \quad v = n^j d + k\lambda_1 / 2 \quad \text{(7a)}$$

В этом случае равнодействующие оси, параллельные y, — оси симметрии, а равнодействующие оси, параллельные v и z, — винтовые. Табл. III фиг. 7.

[1] Зонке, 12.

Нетрудно убедиться, что в предположении иных направлений элементарных поступаний придем к одной из систем, выведенных раньше.

Переходя теперь к случаям, когда первоначальные оси не пересекаются, мы не можем предполагать их обоих осями симметрии [случаи (4 а), (5 а) и (6 а)], или даже и одной из них [случай (7 а)], и потому остается рассмотреть случай, когда обе оси винтовые.

Пусть ось y и отстоящая от нее по направлению оси z на величину l_0 прямая, параллельная оси v, — будут первоначальные винтовые оси.

Из данной точки (b, c, d) и оси y_0 выведем точку

$$y=b+\lambda/2; \quad z=-c; \quad v=-d \qquad \text{(a)}$$

Перенеся оси координат по направлению оси z на величину l_0, для точки (a) найдем выражение:

$$y=l+\lambda/2; \quad z=-c-l_0; \quad v=-d \qquad \text{(b)}$$

Так как теперь ось v есть винтовая ось, то отсюда выведем еще точку:

$$y=-b+\lambda/2; \quad z=c+l_0; \quad v=-d+\lambda_1/2 \qquad \text{(c)}$$

Возвратившись к первоначальным координатам, найдем:

$$y=-b+\lambda/2; \quad z=c+2l_0; \quad v=-d+\lambda_1/2 \qquad \text{(d)}$$

Из выражения (d) усматриваем, что в данном случае имеется равнодействующая винтовая ось, параллельная оси z. Предположив, что мы придем к ней, перемещая оси координат по оси y на величину l и по оси v на величину l_1, легко найдем, что в данном случае $l=\lambda/4$, $l_1=\lambda_1/4$; а так как двойная винтовая ось, параллельная z, может иметь величину хода только $\lambda_0/2$, то $l_0=\lambda_0/4$.

Отсюда видим, что в данном случае все оси равнозначны. Чтобы лучше выразить эту равнозначность, мы опять по-

местим начало координат в точке, удаленной от всех осей на расстояние четверти соответственных наименьших поступаний совмещения.

Процесс вывода аналитического выражения совершенно аналогичен процессу вывода уравнений (6′), а именно: перенеся координаты по направлению v на величину $\lambda_1/4$, для точки (b, c, d) получим выражение:

$$y = b; \quad z = c; \quad v = d - \lambda_1/4 \tag{a}$$

Приняв теперь ось y за винтовую ось, найдем:

$$y = b + j\lambda/2; \quad z = n^j c; \quad v = n^j (d - \lambda_1/4) \tag{b}$$

Перенеся координаты по v на величину обратную и по z на величину $\lambda_0/4$, из выражения (b) выведем:

$$y = b + j\lambda/2; \quad z = n^j c - \lambda_0/4; \quad v = n^j d + (1 - n^j)\lambda_1/4 \tag{c}$$

Приняв теперь ось v за винтовую, найдем:

$$y = n^k b + j\lambda/2; \quad z = n^{j+k} c - n^k \lambda_0/4$$
$$v = n^j d + (1 - n^j)\lambda_1/4 + k\lambda_1/2 \tag{d}$$

Возвратившись к первоначальным координатам, получим:

$$y = n^k b + j\lambda/2; \quad z = n^{j+k} c + (1 - n^k)\lambda_0/4$$
$$v = n^j d + (1 - n^j)\lambda_1/4 + k\lambda_1/2 \tag{e}$$

а принимая во внимание тождество (A), получим окончательно:

$$y = n^k b + j\lambda/2; \quad z = n^{j+k} c + k\lambda_0/2;$$
$$v = n^j d + (j + k)\lambda_1/2 \tag{8 a}$$

В предположении, что направления всех трех осей координат суть направления сопряженные, уравнения (8 a) и выразят новую систему: [1]

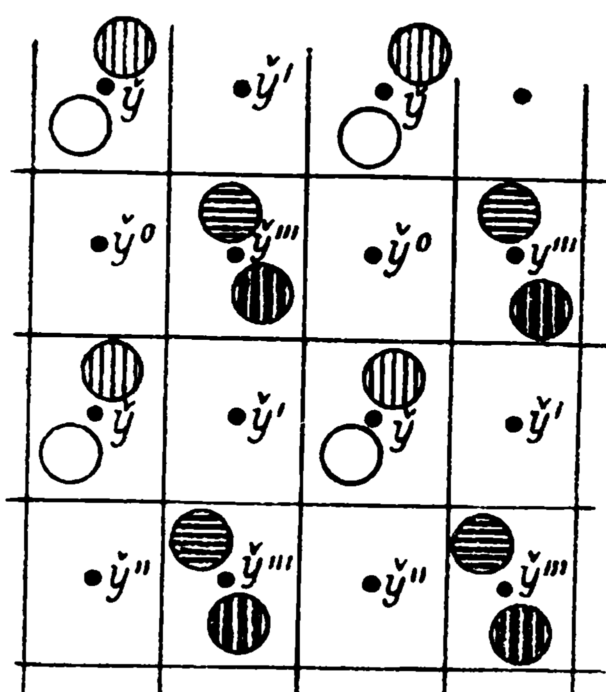
[1] Зонке, 14.

Табл. III фиг. 8. В этом случае все равнодействующие оси также винтовые (фиг. 3).

В предположении иных элементарных поступаний совмещения мы придем лишь к одной из уже выведенных систем.

7. Гемиморфия

Системы, сюда относящиеся, могут быть выведены лишь из системы (1а) с присоединением аналогической ей, получающейся из нее посредством плоскости симметрии, параллельной винтовым осям.



Фиг. 3.

Для того, чтобы совмещение осей обеих аналогических простых систем (1а) было возможно, необходимо, чтобы в расположении этих осей были соблюдены известные условия, а именно: ближайшие оси должны располагаться, как ребра прямоугольных или ромбических призм.

Приняв винтовую ось y, взяв, в предположении прямоугольности призм, за оси z и v прямые пересечения двух перпендикулярных граней призмы с плоскостью, перпендикулярною к оси y, и присоединяя плоскость симметрии yv, найдем систему:

$$y = b + j\lambda / 2; \quad z = n^k c + \lambda_0; \quad v = n^j d + \lambda_1 \qquad (9\text{ а})$$

Плоскость yz в этом случае есть плоскость скольжения, направление коего — ось y, а величина — $\lambda / 2$.

Если одну из аналогических простых систем мы подвергнем поступанию по направлению оси y на величину $\lambda / 2$, то на основании теоремы 8 получим другую систему с плоскостью симметрии, перпендикулярною к оси v, и, значит, получим систему, равнозначную системе (9 а). Поэтому

для получения новых систем остаются возможными лишь образующие поступания в плоскости, перпендикулярной к оси y.

Таким образом выведем еще 3 системы:

$$1)\quad \left.\begin{aligned} &y = b + j\lambda/2; \quad z = n^k c + (j + k)\,\lambda_0/2 \\ &v = n^j d + \lambda_1 \end{aligned}\right\} \qquad (10\,\text{a})$$

В этом случае также имеются плоскости симметрии, перпендикулярные к оси z, но они находятся посредине между винтовыми осями.

$$2)\quad \left.\begin{aligned} &y = b + j\lambda/2; \quad z = n^k c + \lambda_0; \\ &v = n^j d + (j + k)\,\lambda_1/2 \end{aligned}\right\} \qquad (11\,\text{a})$$

В этом случае плоскость скольжения случая (9 а) перемещается в параллельном положении по направлению оси v на величину $\lambda_1/4$.

$$3)\quad \left.\begin{aligned} &y = b + j\lambda/2; \quad z = n^k c + (j + k)\,\lambda_0/2 \\ &v = n^j d + (j + k)\,\lambda_1/2 \end{aligned}\right\} \qquad (12\,\text{a})$$

В этом случае плоскости симметрии случая (10 а) становятся плоскостями скольжения, коего направление ось v и величина $\lambda_1/2$.

Теперь рассмотрим второе предположение, по которому оси располагаются, как ребра ромбических призм. Тут опять одну из осей примем за y, а за оси z и v — прямые пересечения плоскости, перпендикулярной к оси y, с диагональными плоскостями призмы.

Введя снова плоскость симметрии, перпендикулярную к оси z, найдем систему:

$$y = b + j\lambda/2; \quad z = n^k c + f\lambda_0/2; \quad v = n^j d + f\lambda_1/2 \qquad (13\,\text{a})$$

На основании теоремы 8 заключаем, что образующее поступание по направлению оси y не приводит к новым, неравнозначным системам.

Образующее поступание по одной из осей z и v теперь также приводят лишь к системе, равнозначной с системой (13 а).

Следовательно, никаких новых, сюда относящихся, систем мы уже не выведем.

8. Голоэдрия

Системы этого случая выводятся из систем, относящихся к гемиэдрии, присоединением аналогических систем, получающихся из них с помощью плоскости симметрии, перпендикулярной к одной из осей, например y.

Так как, присоединяя такую плоскость симметрии, мы получаем непосредственно совпадение осей совмещения обеих простых систем, то прежде всего из системы (4 а) выведем новую:

$$y = n^{k+l} b + j\lambda/2; \quad z = n^{k+j} c + \lambda_0; \quad v = n^j d + \lambda_1 \qquad (14\,\text{а})$$

или, сделав понятное сокращение, выражения

$$y = n^j b + l\lambda/2; \quad z = n^k c + \lambda_0; \quad v = n^l d + \lambda_1 \qquad (14\,\text{а}')$$

Из этого упрощенного выражения особенно ясно усматривается присутствие двух плоскостей симметрии, перпендикулярных осям y и z. Параметр l выражает плоскость скольжения, перпендикулярную к оси v; направление скольжения — ось y, а величина $\lambda/2$.

На основании теоремы 8 заключаем, что образующее поступание по направлению y не приведет к новым системам, а даст лишь систему равнозначную, с плоскостью симметрии, перпендикулярною к оси v вместо оси z.

Поэтому из (14 а′) выведем еще лишь 3 следующие:

$$1)\quad \left.\begin{aligned} y = n^j b + l\lambda/2; \quad z = n^k c + (j + k + l)\lambda_0/2;\\ v = n^l d + \lambda_1 \end{aligned}\right\} \qquad (15\,\text{а})$$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси z и находящаяся посредине между ближайшими осями, y или v.

$$2)\quad \left. \begin{array}{l} y = n^j b + l\lambda/2; \quad z = n^k c + \lambda_0; \\ v = n^l d + (j + k + l)\lambda_1/2 \end{array} \right\} \quad (16\,\text{a})$$

В этом случае плоскость, перпендикулярная к оси z, есть плоскость скольжения, имеющего направление оси v и величину $\lambda_1/2$.

$$3)\quad \left. \begin{array}{l} y = n^j b + l\lambda/2; \quad z = n^k c + (j + k + l)\lambda_0 \\ v = n^l d + (j + k + l)\lambda_1/2 \end{array} \right\} \quad (17\,\text{a})$$

В этом случае плоскость симметрии случая (15 а) заменяется плоскостью скольжения, коего направление — ось v и величина $\lambda_1/2$.

Аналогично этому, из системы (5 а) выведем 2 новые:

$$1)\quad y = n^j b + l\lambda/2; \quad z = n^k c + f\lambda/2; \quad v = n^l d + f\lambda_1/2 \quad (18\,\text{a})$$

В этом случае так же, как в случае (14 а′), имеются две группы плоскостей симметрии, аналогично расположенные.

$$2)\quad \left. \begin{array}{l} y = n^j b + f\lambda/2; \quad z = n^k c + (f + j + k + l)\lambda_0/2; \\ v = n^l d + f\lambda_1/2 \end{array} \right\} \quad (19\,\text{a})$$

В этом случае имеется лишь одна группа плоскостей симметрии, расположенная аналогично случаю (15 а).

Подобно этому, присоединяя плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y, к системе (6 а′), найдем новую:

$$\left. \begin{array}{l} y = n^j b + f\lambda/2; \quad z = n^k c + (f + k + l)\lambda_0/2; \\ v = n^l d + (f + l)\lambda_1/2 \end{array} \right\} \quad (20\,\text{a})$$

В этом случае опять имеются две группы плоскостей симметрии, расположенных аналогично случаю (14 а′).

Из системы (20а) выведем одну новую:

$$\left.\begin{array}{c} y = n^j b + f\lambda / 2; \quad z = n^k c + (f + k + l)\,\lambda_0 / 2 \\ v = n^l d + (f + j + k)\,\lambda_1 / 2 \end{array}\right\} \quad (21\text{ a})$$

В этом случае плоскость скольжения есть плоскость zv, направление скольжения — ось v и величина его $\lambda_1 / 1$. Присоединяя плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y, в случае системы (7 а) получаем:

$$y = n^j b + \lambda; \quad z = n^k c + l\lambda_0 / 2; \quad v = n^l d + k\lambda_1 / 2 \quad (22\text{ a})$$

Присоединяя сюда все возможные образующие поступания, выведем еще 5 систем:

$$1) \quad \left.\begin{array}{c} y = n^j b + \lambda; \quad z = n^k c + (j + k)\,\lambda_0 / 2 \\ v = n^l d + k\lambda_1 / 2 \end{array}\right\} \quad (23\text{ a})$$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси v (на основании теоремы 8), а именно плоскость yz.

$$2) \quad \left.\begin{array}{c} y = n^j b + \lambda; \quad z = n^k c + (j + k)\,\lambda_0 / 2 \\ v = n^l d + (j + l)\,\lambda_1 / 2 \end{array}\right\} \quad (24\text{ a})$$

В этом случае имеются плоскости симметрии, перпендикулярные к осям z и v и пересекающиеся в равнодействующих двойных осях симметрии y.

$$3) \quad \left.\begin{array}{c} y = n^j b + (j + k + l)\,\lambda/2; \quad z = n^k c + l\lambda_0 / 2 \\ v = n^l d + k\lambda_1 / 2 \end{array}\right\} \quad (25\text{ a})$$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y, находящаяся в расстоянии $\lambda / 4$ от начала, т. е. посредине между двумя плоскостями, в которых пересекаются двойные винтовые оси z и v.

$$4) \quad \left.\begin{array}{c} y = n^j b + (j + k + l)\,\lambda / 2 \\ z = n^k c + (j + k)\,\lambda_0 / 2; \quad v = n^l d + k\lambda_1 / 2 \end{array}\right\} \quad (26\text{ a})$$

В этом случае плоскость симметрии случая (23 а) становится плоскостью скольжения, направление коего — ось y, а величина $\lambda / 2$.

$$\left.\begin{aligned} 5)\quad & y = n^j b + (j + k + l)\,\lambda / 2 \\ z = n^k c + (j + k)\,\lambda_0 / 2; & \quad v = n^l d + (j + l)\,\lambda_1 / 2 \end{aligned}\right\} \quad (27\,\text{a})$$

В этом случае плоскости симметрии случая (24 а) становятся плоскостями скольжения, направление коего — ось y, а величина $\lambda / 2$.

Присоединяя плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y, в случае системы (8 а), найдем:

$$\left.\begin{aligned} y = n^j b + l\lambda / 2; \quad & z = n^k c + (k + l)\,\lambda_0 / 2 \\ v = n^l d & + k\lambda_1 / 2 \end{aligned}\right\} \quad (28\,\text{a})$$

Так как образующие поступания по направлениям осей y и v приводят к системам, равнозначным с (28 а), то остается лишь такое поступание по направлению оси z. как приводящее к новой системе:

$$y = n^j b + l\lambda / 2; \quad z = n^k c + j\lambda_0 / 2; \quad v = n^l d + k\lambda_1 / 2 \quad (29\,\text{a})$$

В этом случае плоскость симметрии предыдущего становится плоскостью скольжения, направление коего — ось z и величина $\lambda_0 / 2$.

Тетрагональная система

9. Пирамидальная гемиморфия

Так как в этом отделении имеются лишь параллельные четверные оси совмещения, то для вывода асимморфических систем остается только принять их за винтовые с ходом $\lambda / 4$ или $\lambda / 2$.

В предположении, что первоначальные четверные винтовые оси с ходом $\lambda / 4$ имеют направление, сопряженное с перпендикулярною к ним плоскою сеткою, и приняв одну из

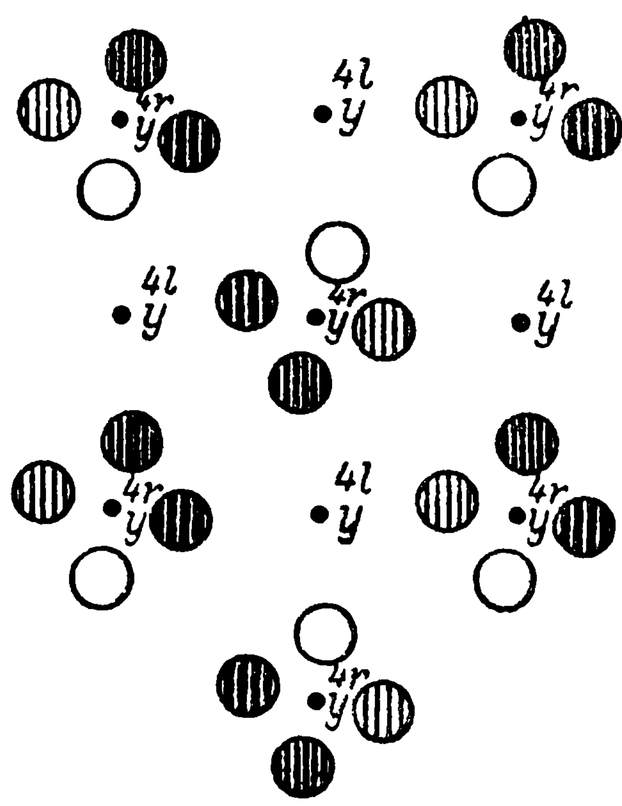
них за ось y, получим две системы, аналогические, но не равнозначные, — с правыми и левыми осями, а именно: [1]

$$y = b - i\lambda / 4; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (30\,a)$$

и

$$y = b + i\lambda / 4; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (31\,a)$$

Табл. III фиг. 30 и 31.



Фиг. 4.

В этих случаях имеются равнодействующие четверные винтовые оси, правая или левая, а также двойные винтовые оси.

В предположении, что направление оси y не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, выведем еще лишь одну систему: [2]

$$y = b + (2f + i)\lambda / 4;$$

$$y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0 / 2$$

$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + f\lambda_0 / 2 \qquad (32\,a)$$

Табл. III фиг. 32.

Если первоначальные оси мы примем за правые, то равнодействующие теперь будут левыми, и наоборот; в самом деле, к слагающей величине, например $+\lambda / 4$ в равнодействующей оси присоединяется еще величина $\pm\lambda / 2$; $+\lambda / 4 + \lambda / 2 - \lambda = -\lambda / 4$ и $+\lambda / 4 - \lambda/2 = -\lambda / 4$. Кроме осей противоположного знака в этом случае имеются еще равнодействующие двойные оси симметрии, так как четверные винтовые оси суть в то же время и двойные винтовые (фиг. 4).

[1] Зонке, 26 и 27.

[2] Зонке, 28.

В предположении, что первоначальные четверные винтовые оси с ходом $\lambda/2$ имеют направление, сопряженное с перпендикулярною к ним плоскою сеткою, выведем еще систему [1])

$$y = b + i\lambda/2;\quad y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0;\quad y_1 = \overset{4}{b_{i+1}} + \lambda_0 \qquad (33\,a)$$

В этом случае имеются равнодействующие четверные винтовые оси с ходом $\lambda/2$, а также равнодействующие двойные оси симметрии, так как четверные винтовые оси с ходом $\lambda/2$ в то же время и двойные оси симметрии. Табл. III фиг. 33.

Если бы мы предположили, что направление осей не есть сопряженное с перпендикулярною к ним плоскою сеткою, то получили бы систему симморфическую.

10. Гемиморфия

Системы этого отделения могут быть выведены из систем предыдущего, присоединяя к ним аналогические системы, связанные с первоначальными плоскостями симметричности, параллельными оси y.

Так как с правыми осями симметрично могут быть связаны лишь левые оси, и наоборот, то из тех простых систем, каковы (30 а) и (31 а), в которых имеются лишь оси одного знака, двойных систем вывести невозможно.

Из системы (32 а) можно вывести новую систему, вводя какую-нибудь из относящихся сюда плоскостей симметрии и присоединяя такое образующее поступание, чтобы две явившиеся аналогические системы совпали в одну. Для этого можно взять плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y_1, а самую ось — за направление образующего поступания.

---

[1]) Зонкс, 29.

Находим систему:

$$y = b + (2f + i)\,\lambda/4;\quad y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n}{}^{k} + (f + k)\,\lambda_0/2 \qquad (34\ \text{а})$$

Ясно, что в этом случае имеются взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся в равнодействующих двойных осях симметрии.

Присоединяя к системам (34 а) еще образующее поступание по направлении оси y, мы получим систему:

$$\left.\begin{aligned} y = b + (2f + 2k + i)\,\lambda/4;\quad y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0/2 \\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n}{}^{k} + (f + k)\,\lambda_0/2 \end{aligned}\right\}\qquad (35\ \text{а})$$

В этом случае плоскости симметрии предыдущего становятся плоскостями скольжения, коего направление — ось y, а величина $\lambda/2$.

К системе (33 а) мы можем непосредственно присоединить плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y_1, и получим систему:

$$y = b + i\lambda/2;\quad y_0 = b_i + \lambda_0;\quad y_1 = b_{i+n}{}^{k} + \lambda_0 \qquad (36\ \text{а})$$

В этом случае имеются перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся как в винтовых, так и в равнодействующих двойных осях симметрии.

Присоединяя образующее поступание по направлению оси y, найдем систему:

$$y = b + (i + k)\,\lambda/2;\quad y_0 = b_i + \lambda_0;\quad y_1 = b_{i+n}{}^{k} + \lambda_0 \qquad (37\ \text{а})$$

В этом случае, на основании теоремы 9, имеются взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся исключительно в винтовых осях (диагональные).

Присоединяя к системе (37 а) образующее поступание, приводящее винтовую ось в совмещение с равнодействующею, ей одновременною, осью, найдем еще:

$$y = b + (i + k)\lambda/2;\ y_0 = \overset{4}{b}_i + k\lambda_0/2;\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + k\lambda_0/2 \quad (38\,а)$$

В этом случае имеются взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся исключительно в равнодействующих двойных осях симметрии (диагональные).

Наконец, присоединяя еще к последней системе образующее поступание по направлению y, найдем:

$$y = b + i\lambda/2;\ y_0 = \overset{4}{b}_i + k\lambda_0/2;\ \ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + k\lambda_0/2 \quad (39\,а)$$

В этом случае плоскости симметрии предыдущего становятся плоскостями скольжения, коего направление — ось y, а величина $\lambda/2$.

12. Бипирамидальная гемиэдрия

Присоединяемая аналогическая система должна выводиться из одной из систем пирамидальной гемиморфии с присоединением плоскости симметричности, перпендикулярной к осям.

Из систем (30 а) и (31 а) новых вывести, очевидно, нельзя по причине, упомянутой в предыдущем отделении.

Из системы (32 а) выведем новую:

$$\left.\begin{aligned} y = n^k b + (2f + i)\lambda/4;\ \ y_0 = \overset{4}{b}_i + f\lambda_0/2 \\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + (f + k)\lambda_0/2 \end{aligned}\right\} \quad (40\,а)$$

В этом случае имеется плоскость скольжения, перпендикулярная к оси y; направление скольжения и ее величина определяются слагающими $(0, 0, \lambda_0/2)$.

Из системы (33 а) выведем две новые:

1) $y = n^k b + i\lambda/2;\ \ y_0 = \overset{4}{b}_i + \lambda_0;\ \ y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + \lambda_0$ (41 а)

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y.

2) $y = n^k b + i\lambda / 2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + k\lambda_0 / 2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+1} + k\lambda_0 / 2$ (42 a)

В этом случае плоскость симметрии предыдущего становится плоскостью скольжения, направление коего и величина определяются слагающими $(0, \lambda_0 / 2, \lambda_0 / 2)$.

13. Трапецоэдрическая гемиэдрия

За первоначальные оси в этом случае можно принять две двойные оси, пересекающиеся между собою под углом 45°. Примем одну из них за ось координат y_0, а другую—z_0 поместим как равноделящую осей y_0 и y_1.

Сначала допустим, что обе эти оси пересекаются, а притом ось y_0 — ось винговая, а ось z_0 — ось симметрии.

В таком случае из точки (b, b_0, b_1) и оси y_0 выведем точку:

$$y = -b; \quad y_0 = b_0 + \lambda_0 / 2; \quad y_1 = -b_1 \tag{a}$$

Из точки (a) и оси z_0 выведем другую:

$$y = b; \quad y_0 = -b_1; \quad y_1 = b_0 + \lambda_0 / 2 \tag{b}$$

Из выражения (b) легко усмотреть, что в этом случае имеется четверная ось симметрии, параллельная оси y, но не пересекающаяся с только что упомянутыми осями. Допустив, что для перехода от оси y к равнодействующей четверной оси нужно произвести поступание по направлению y_0 на величину l_0 и по направлению y_1, на величину l_1, переместив согласно с этим оси координат, найдем для точки (b, b_0, b_1) выражение:

$$y = b; \quad y_0 = b_0 - l_0; \quad y_1 = b_1 - l_1 \tag{c}$$

а повернув теперь около оси y на угол 90°, найдем точку:

$$y = b; \quad y = -b_1 + l_1; \quad y_1 = b_0 - l_0 \tag{d}$$

Возвратившись к первоначальным координатам, получим окончательно:

$$y = b; \quad y_0 = -b_1 + l_0 + l_1; \quad y_1 = b_0 - l_0 + l_1 \qquad \text{(e)}$$

Сравнивая (e) с (b), найдем: $l_0 = -\lambda_0/4$; $l_1 = +\lambda_0/4$.

Так как в этом случае равнодействующая четверная ось пересекается с равнодействующими двойными винтовыми осями, параллельными осям z_0 и z_1, то, для простоты выражения, мы примем последние за оси y_0, y_1, а четверную ось за ось y, и получим[1] Табл. III фиг. 43.

$$y = n^k b + \lambda; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + (f + k)\lambda_0/2$$

$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad \text{(43 a)}$$

В этом случае имеются равнодействующие четверные и двойные оси симметрии, параллельные y, равнодействующие оси симметрии и винтовые y_0 и y_1, и винтовые, параллельные осям (z).

Предположив, что направление оси y не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, получим симморфическую систему.

Допустить обе первоначальные двойные оси винтовыми нет основания, так как, в числе равнодействующих, по крайней мере параллельные одной из них будут осями симметрии.

Поэтому остается рассмотреть случаи непересечения первоначальных двойных осей, которые мы примем сначала за оси симметрии, и притом одну из них за ось y_0, а прямую кратчайшего расстояния между ними за ось y.

Из точки (b, b_0, b_1) и оси y_0 выведем точку:

$$y = -b; \quad y_0 = b_0; \quad y_1 = -b_1 \qquad \text{(a)}$$

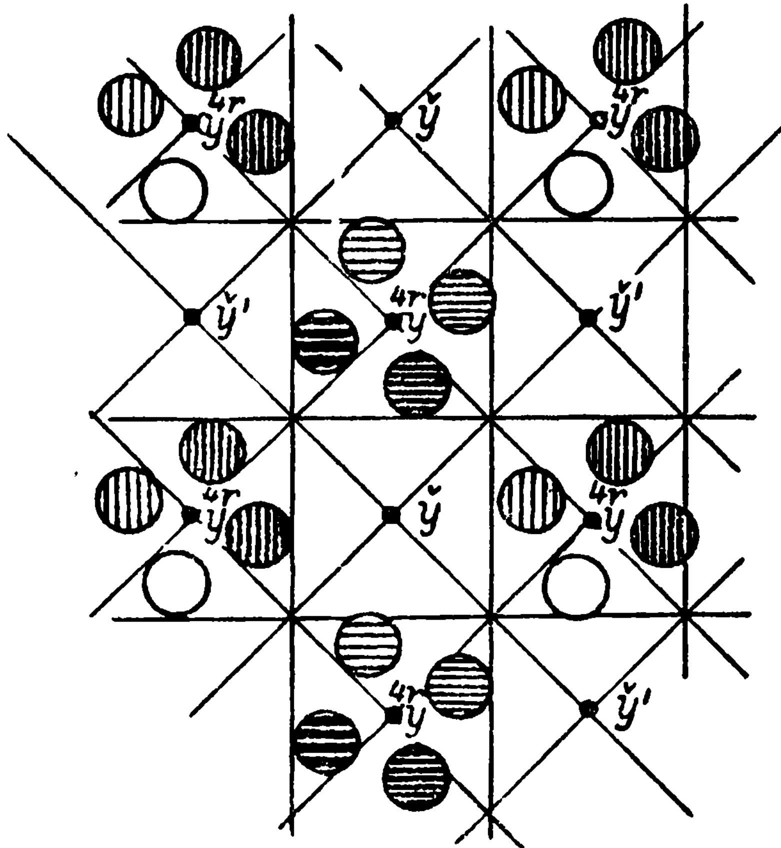
[1] Зонке, 41.

Перенесем оси координат по направлению оси y на величину l кратчайшего расстояния; теперь точка (a) выразится:

$$y = -b - l;\quad y_0 = b_0;\quad y_1 = -b_1 \tag{b}$$

Из точки (b) и оси симметрии z_0 выведем точку:

$$y = b + l;\quad y_0 = -b_1;\quad y_1 = b_0 \tag{c}$$



Фиг. 5.

а возвратившись к первоначальным координатам, получим:

$$y = b + 2l;\qquad y_0 = -b_1;\qquad y_1 = b_0 \tag{d}$$

Это выражение показывает присутствие равнодействующей четверной винтовой оси с ходом $2l$, совпадающей с осью y (т. е. прямою кратчайшего расстояния).

Но так как четверная ось может иметь ход $\lambda/4$ и $\lambda/2$, то получаем два случая:

1-й случай. Винтовая ось y имеет ход $\lambda/4$, $l = \lambda/8$.

В предположении сопряженности направления оси y с перпендикулярною ей плоскою сеткою, получаем 2 аналогические, но неравнозначные системы[1]):

$$y = n^k b - i\lambda/4;\quad y_0 = \overset{4}{b}_i + \lambda_0;\quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \tag{44 a}$$

и

$$y = n^k b + i\lambda/4;\quad y_0 = \overset{4}{b}_i + \lambda_0;\quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \tag{45 a}$$

[1]) Зонке, 32 и 33.

В этом случае имеются равнодействующие четверные и двойные винтовые оси, параллельные y, двойные оси симметрии, параллельные осям y_0, y_1, и двойные оси симметрии и винтовые, параллельные осям (z). Табл. III фиг. 44 и 45.

В предположении, что направление оси y не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, получим еще систему[1])

$$y = n^k b + (2f + i)\lambda / 4; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + f\lambda_0 / 2$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2 \qquad (46\ \text{a})$$

В этом случае имеются равнодействующие четверные винтовые оси противоположного знака и двойные оси симметрии, параллельные оси y, двойные оси симметрии и винтовые, параллельные как осям y_0 и y_1, так и осям (z). Табл. III фиг. 46.

2-й случай. Винтовая ось y имеет ход $\lambda / 2$; $l = \lambda / 4$.

В предположении сопряженности направления оси y с перпендикулярной к ней плоскою сеткою, получаем еще систему:[2])

$$y = n^k b + i\lambda / 2; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + \lambda_0; \ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \quad (47\ \text{a})$$

В этом случае имеются равнодействующие винтовые четверные с ходом $\lambda / 2$ и двойные оси симметрии, параллельные оси y, двойные оси симметрии, параллельные осям y_0 и y_1, и двойные оси симметрии и винтовые, параллельные осям (z). Табл. III фиг. 47.

В предположении, что направление оси y не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, получим равнодействующую четверную ось симметрии, пересекающуюся с двойными осями симметрии, т. е. придем к системе симморфической.

Теперь сделаем последнее возможное допущение, что одна из первоначальных двойных осей, например y_0, есть

---

[1]) Зонке, 34.

[2]) Зонке, 35.

ось винтовая. Приняв снова прямую кратчайшего расстояния за ось y, из точки (b, b_0, b_1) и оси y_0 выведем точку:

$$y = -b; \quad y_0 = b_0 + \lambda_0/2; \quad y_1 = -b_1 \tag{a}$$

Перенеся теперь оси координат по направлению оси y на величину кратчайшего расстояния l, для той же точки (a) найдем выражение:

$$y = -b - l; \quad y_0 = b_0 + \lambda_0/2; \quad y_1 = -b_1 \tag{b}$$

Повернув около оси z_0, найдем еще точку:

$$y = b + l; \quad y_0 = -b_1; \quad y_1 = b_0 + \lambda_0/2 \tag{c}$$

а возвратившись к первоначальным осям координат, получим окончательно:

$$y = b + 2l; \quad y_0 = -b_1; \quad y_1 = b_0 + \lambda_0/2 \tag{d}$$

Из этого выражения заключаем о присутствии четверной винтовой оси, параллельной y. Положение этой оси получится из сравнения этого выражения (d) с выведенным выше выражением (c), а именно: $l_0 = -\lambda_0/4$; $l_1 = +\lambda_0/4$. Кроме того, так как четверная ось может иметь ход $\lambda/4$ и $\lambda/2$, то получаем 2 случая: $l = \lambda/8$ и $l = \lambda/4$.

1-й случай. Винтовая ось, параллельная y, имеет ход $\lambda/4$. В этом случае $l = \lambda/8$. Так как ось y пересекается с равнодействующими винтовыми осями, параллельными (z), то мы, аналогично случаю (43 a), переменим оси координат, приняв равнодействующую четверную винтовую ось за ось y, а одну из пересекающихся с нею винтовых осей, параллельных осям (z), — за ось y_0.

Выводим две аналогические системы:[1]

$$y = n^k b - i\lambda/4; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + (k + f)\lambda_0/2$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \tag{48 a}$$

[1] Зонке, 38 и 39.

$$y = n^k b + i\lambda / 4; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + (k + f)\lambda_0 / 2$$

$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2 \qquad (49\,\text{a})$$

В этом случае вообще все равнодействующие оси винтовые, за исключением некоторых равнодействующих осей, параллельных осям y_0 и y_1 и пересекающихся с двойною винтовою осью, параллельною y. Табл. III фиг. 48 и 49.

В предположении, что направление оси y не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, придем к случаю уже выведенной (46) системы.

2-й случай. Винтовая ось, параллельная y, имеет ход $\lambda / 2$. В этом случае $l = \lambda/4$. Легко видеть, что в этом случае получим выражение новой системы,[1] вполне аналогичное предыдущим, а именно:

$$y = n\ \ b + i\lambda / 2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + (k + f)\lambda_0 / 2$$

$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2 \qquad (50\,\text{a})$$

В этом случае имеются равнодействующие четверные винтовые оси с ходом $\lambda/2$ и двойные оси симметрии, параллельные y, а также равнодействующие оси симметрии и винтовые, параллельные осям y_0 и y_1, и только винтовые оси, параллельные осям (z). Табл. III фиг. 50.

В предположении, что направление оси y не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, придем к системе симморфической.

14. Скаленоэдрическая гемиэдрия

Системы, сюда относящиеся, могли бы быть выведенными из асимморфических систем (4) — (8), присоединением к ним аналогической системы, выведенной посредством плоскости симметрии (диагональной), параллельной одной из осей и Табл. III фиг. 4, 5, 6, 8.

---

[1] Зонке, 40.

делящей пополам угол между двумя другими, если только при этом совпадение осей совмещения обеих систем произойдет при возможном образующем поступании. Так как для систем (4 а), (5 а), (6 а) и (8 а) за такое поступание пришлось бы принять поступание по направлению оси y на величину $\lambda / 4$ (предполагая равными величины λ_0 и λ_1 этих систем), то и вывести из этих систем новые оказывается невозможным. Исключение представляет случай (6 а), для которого половинное поступание, имеющее на осях слагающие ($\lambda / 4$, $\lambda_0 / 4$, $\lambda_0 / 4$), параллельное плоскости симметрии, приводит систему осей к совпадению, если плоскости симметричности придать положение AA'.

Табл. III фиг. 6. Для того, чтобы вывести аналитическое выражение этого случая, заметим, что параметр i выражает некоторую четверную ось сложной симметрии, параллельную осям (y); параметр k выражает двойную ось симметрии, параллельную y_0.

Нетрудно доказать, что в этом случае двойная ось симметрии y есть в то же время и ось сложной симметрии, а плоскость сложной симметрии — плоскость перпендикулярная, отстоящая от начала на расстояние $\lambda_0 / 8$. В самом деле, приняв эту ось за ось координат (y) и переместив координаты по направлению оси y_0 на величину $\lambda_0 / 4$, для точки (b, b_0, b_1) получим выражение:

$$y = b; \qquad y_0 = b_0 - \lambda_0 / 4; \qquad y_1 = b_1 \qquad \text{(a)}$$

Подвергши точку (а) повороту около двойной оси симметрии y_1, получим другую точку:

$$y = -b; \qquad y_0 = -b_0 + \lambda_0 / 4; \qquad y_1 = b_1 \qquad \text{(b)}$$

а подвергши точку (b) процессу скольжения по данной плоскости, найдем еще точку:

$$y = -b + \lambda / 4; \quad y_0 = b_1 + \lambda_0 / 4; \qquad y_1 = -b_0 + \lambda_0 / 2$$

а возвратившись к первоначальным координатам, получим окончательно:

$$y = -b + \lambda/4; \qquad y_0 = b_1 + \lambda_0/2; \qquad y_1 = -b_0 + \lambda_0/2 \quad (c)$$

Уравнения (с) и служат доказательством сказанного выше. На этом основании мы непосредственно выводим уравнения данной системы:

$$y = n^{i+k}b + (2f + i)\lambda/4; \quad y_0 = \overset{4}{b_i} + (f + k)\lambda_0/2$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \qquad (51\,a)$$

В случае системы (7 а) мы, очевидно, можем непосредственно присоединить плоскость симметрии. Если такая плоскость проходит чрез оси y и y''', то равнодействующие оси y' и y'' будут четверными осями сложной симметрии.

В самом деле, приняв, например, ось y'' за ось координат, а за плоскость координат плоскость винтовых осей z и v, мы, переместив оси координат по направлению осей z и v на величину $\lambda_0/4$, из точки (b, b_0, b_1) выведем точку: Табл. III фиг. 7

$$y = b; \qquad y_0 = b_0 + \lambda_0/4; \qquad y_1 = b_1 - \lambda_0/4 \qquad (a)$$

Из точки (a) и винтовой оси y_0 выведем точку:

$$y = -b; \qquad y_0 = b_0 - \lambda_0/4; \qquad y_1 = -b_1 + \lambda_0/4 \qquad (b)$$

Из точки (b) и данной плоскости симметрии выведем еще точку:

$$y = -b; \qquad y_0 = -b_1 + \lambda_0/4; \qquad y_1 = b_0 - \lambda_0/4$$

Наконец, возвратившись к первоначальным осям координат, получим окончательно:

$$y = -b; \qquad y_0 = -b_1; \qquad y_1 = b_0 \qquad (c)$$

что и требовалось доказать.

На этом основании мы можем выразить систему уравнениями:

$$y = n^{i+k} b + \lambda; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + k\lambda_0 / 2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + k\lambda_0 / 2 \qquad (52\,a)$$

В этом случае взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии пересекаются в осях y и y'''.

Произведя образующее поступание по направлению, перпендикулярному к одной из плоскостей симметрии, мы, очевидно, придем к системе равнозначной.

Остается случай образующего поступания по направлению оси y, который приводит к системе:

$$y = n^{i+k} b + (i+k) i\lambda / 2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + k\lambda_0 / 2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + k\lambda_0 / 2 \qquad (53\,a)$$

В этом случае плоскости симметрии предыдущего заменяются плоскостями скольжения, направление коего ось y и величина $\lambda / 2$.

15. Голоэдрия

Системы, сюда относящиеся, могут быть выведены из систем (43 а) — (50 а) присоединением систем аналогических при посредстве каких-либо плоскостей симметрии, параллельных двум из осей системы.

Из систем (44 а), (45 а), (48 а) и (49 а) как имеющих только правые или левые винтовые оси, очевидно, никаких, сюда относящихся, систем вывести невозможно.

Прибавляя к системе (43 а) плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y, мы получаем непосредственно:

$$y = n^{k+l} b + \lambda; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + (f+k)\lambda_0 / 2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2 \qquad (54\,a)$$

Табл. III фиг. 43. В этом случае имеются три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся в равнодействующих двойных осях симметрии.

Произведя образующее поступание по направлению одной из осей, найдем систему:

$$\left.\begin{array}{l} y = n^{k+l} b + \lambda; \qquad y_0 = \overset{4}{b}_i + (f + k)\,\lambda_0/2 \\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + (f + l)\,\lambda_0/2 \end{array}\right\} \qquad (55\text{ a})$$

В этом случае имеется по 4 плоскости симметрии, пересекающихся под углом 45° в оси y и равнодействующих четверных осях.

Произведя образующее поступание по направлению оси y, выведем из (54 a) новую:

$$\left.\begin{array}{l} y = n^{k+l} b + l\lambda/2; \qquad y_0 = \overset{4}{b}_i + (f + k)\,\lambda_0/2 \\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0/2 \end{array}\right\} \qquad (56\text{ a})$$

В этом случае имеются только плоскости симметрии, перпендикулярные к оси y и находящиеся посредине между ближайшими центрами симметрии.

Наконец, произведя то же поступание, выведем из (55 a):

$$\left.\begin{array}{l} y = n^{k+l} b + l\lambda/2; \qquad y_0 = \overset{4}{b}_i + (f + k)\,\lambda_0/2 \\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + (f + l)\,\lambda_0/2 \end{array}\right\} \qquad (57\text{ a})$$

В этом случае плоскости симметрии случая (55 a) становятся плоскостями скольжения, коего направление — ось y и величина $\lambda/2$.

Прибавляя к системе (46 a) плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y, мы вместе с тем должны подвергнуть аналогическую систему образующему поступанию по направлению одной из осей, y_0 или y_1. Таким образом найдем систему:

$$\left.\begin{array}{l} y = n^{k+l} b + (2f + i)\,\lambda/4; \qquad y_0 = \overset{4}{b}_i + f\lambda_0/2 \\ y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + (f + l)\,\lambda_0/2 \end{array}\right\} \qquad (58\text{ a})$$

В этом случае имеются взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся в равнодействующих двойных осях симметрии.

Присоединяя образующее поступание по направлению оси y, получим еще систему:

$$\left.\begin{aligned} y=n^{k+l}b+(2f+2l+i)\lambda/4; \quad y_0=\overset{4}{b}_i+f\lambda_0/2 \\ y_1=\overset{4}{b}_{i+n^k}+(f+l)\lambda_0/2 \end{aligned}\right\} \tag{59 a}$$

В этом случае плоскости симметрии предыдущих становятся плоскостями скольжения, коего направление — ось y и величина $\lambda/2$.

Прибавляя к системе (47 а) плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y, мы непосредственно получим новую:

$$y=n^{k+l}b+i\lambda/2; \quad y_0=\overset{4}{b}_i+\lambda_0; \quad y_1=\overset{4}{b}_{i+n^k}+\lambda_0 \tag{60 a}$$

В этом случае имеются 3 плоскости симметрии, перпендикулярные к осям координат.

Производя образующее движение по направлению оси y, получим новую систему:

$$y=n^{k+l}b+(i+l)\lambda/2; \quad y_0=\overset{4}{b}_i+\lambda_0; \quad y_1=\overset{4}{b}_{i+n^k}+\lambda_0 \tag{61a}$$

В этом случае имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y, проходящая через двойные оси симметрии (z), а вместе с тем и диагональные плоскости симметрии, проходящие чрез эти оси и ось y.

Производя образующее поступание по направлению оси z_0, получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} y=n^{k+l}b+(i+l)\lambda/2; \quad y_0=\overset{4}{b}_i+l\lambda_0/2 \\ y_1=\overset{4}{b}_{i+n^k}+l\lambda_0/2 \end{aligned}\right\} \tag{62 a}$$

В этом случае имеются диагональные плоскости симметрии, пересекающиеся в равнодействующих двойных осях симметрии.

Наконец, снова произведя образующее поступание по направлению оси y, мы получим систему:

$$y = n^{k+l} b + i\lambda / 2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + l\lambda_0 / 2; \quad y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + l\lambda_0 / 2 \qquad (63\,\text{а})$$

В этом случае плоскости симметрии предыдущего становятся плоскостями скольжения, направление коего — ось y, а величина $\lambda / 2$.

Прибавляя плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y, из системы (50 а) выводим непосредственно:

$$y = n^{k+l} b + i\lambda / 2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + (k + f)\lambda_0 / 2$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2 \qquad (64\,\text{а})$$

В этом случае имеются 3 плоскости симметрии, перпендикулярные к осям координат: одна допущенная, а 2 другие — пересекающиеся в равнодействующей двойной оси симметрии y.

Произведя образующее поступание по направлению оси y_1, получим из (64 а) систему:

$$y = n^{k+l} b + i\lambda / 2; \quad y_0 = b_i + (k + f)\lambda_0 / 2$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + (f + l)\lambda_0 / 2 \qquad (65\,\text{а})$$

В этом случае имеются плоскости симметрии, перпендикулярные к осям y_0 и y_1, и пересекающиеся в четверных винтовых осях.

Произведя образующее поступание по направлению оси y, получим (64 а) систему:

$$y = n^{k+l} b + (i + l)\lambda / 2; \quad y_0 = \overset{4}{b}_i + (k + f)\lambda_0 / 2$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 2 \qquad (66\,\text{а})$$

В этом случае имеются плоскости симметрии, перпендикулярные к оси y и находящиеся посредине между плоскостями, содержащими оси симметрии y_0 и y_1 — в плоскости винтовых осей.

Произведя то же образующее поступание, из системы (65 а) выведем еще новую:

$$y = n^{k+l}\, b + (i + l)\,\lambda/2;\; y_0 = \overset{4}{b}_l + (k + f)\,\lambda_0/2;$$
$$y_1 = \overset{4}{b}_{i+n^k} + (f + l)\,\lambda_0/2 \qquad (67\ \text{a})$$

В этом случае на основании теоремы 9 имеются диагональные плоскости симметрии, пересекающиеся в четверных винтовых осях.

Гексагональная система

16. Пирамидальная тетартоморфия

В этом случае можно сделать лишь одно предположение, а именно, что первоначальные тройные оси суть оси винтовые, правая или левая. Соответственно этому, выводим 2 аналогические системы:[1]

$$y = b - i\lambda\,/\,3;\; y_0 = \overset{3}{b}_l + \lambda_0;\; y_1 = \overset{3}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (68\ \text{a})$$

$$y = b + i\lambda\,/\,3;\; y_0 = \overset{3}{b}_l + \lambda_0;\; y_1 = \overset{3}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (69\ \text{a})$$

Табл. III фиг. 68 и 69. Предположить, что направление оси y не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, нельзя по той же причине, что и для систем симморфических.

17. Тетартоморфия

Асимморфические системы, сюда относящиеся, могли бы быть выведены из предыдущих, присоединяя к одной из них систему аналогическую, которая как таковая будет иметь

[1] Зонке, 15 и 16.

винтовые оси противоположного знака, а, следовательно, совпадение системы одинаковых осей произойти не может, и, значит, невозможны и самые системы.

18. Бипирамидальная тетартоэдрия

Асимморфические системы, сюда относящиеся, тоже невозможны по той же причине, что и для предыдущего отделения.

19. Трапецоэдрическая тетартоэдрия

В этом случае за первоначальные можно принять двойные оси, образующие между собою угол 60°. Так как в этом случае, в числе первоначальных или равнодействующих осей, непременно будут и оси симметрии, то для вывода всех возможных систем достаточно допустить две непересекающиеся двойные оси симметрии.

Нетрудно убедиться, что в этом случае мы получим равнодействующие тройные винтовые оси, правые или левые, а потому в предположении элементарного поступания по направлению двойных осей выведем 2 аналогические системы:[1]

$$y = n^k b - i\lambda / 3;\quad y_0 = \overset{3}{b}_i + f\lambda_0 / 3;\quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 3 \qquad (70\,a)$$

и

$$y = n^k b + i\lambda / 3;\quad y_0 = \overset{3}{b}_i + f\lambda_0 / 3;\quad y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + f\lambda_0 / 3 \qquad (71\,a)$$

В этих случаях и равнодействующими будут соответственно лишь правые или левые тройные винтовые оси, а равнодействующие двойные винтовые оси располагаются аналогично симморфической системе (44). Табл. III фиг. 70 и 71.

[1] Зонке, 23 и 24.

Предположив, что элементарные поступания не совпадают с двойными осями, получим еще 2 аналогические системы:[1]

$$y = n^k - i\lambda / 3;\ y_0 = \overset{3}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (72\text{ a})$$

и

$$v = n^k + i\lambda / 3;\ y_0 = \overset{3}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (73\text{ a})$$

Табл. III фиг. 72 и 73. В этом случае равнодействующие двойные винтовые оси располагаются аналогично симморфической системе (45).

20. Гемиэдрия

Сюда относящиеся системы могли бы быть выведены из систем предыдущего отделения, присоединяя к такой системе ей аналогическую. Но так как в системах предыдущего отделения имеются только правые или только левые оси, то ясно, что аналогических им систем с одинаково расположенными одинаковыми осями вывести невозможно.

21. Пирамидальная гемиморфия

Системы, сюда относящиеся, мы получим, предполагая первоначальные оси этого случая винтовыми, и притом последовательно с ходом $\lambda / 6$, $\lambda / 3$ и $\lambda / 2$.

В первом предположении выводим две аналогические системы с правыми и левыми осями:[2]

$$y = b - i\lambda / 6;\ y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (74\text{ a})$$

и

$$y = b + i\lambda / 6;\ y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (75\text{ a})$$

Табл. III фиг. 74 и 75. В этих случаях имеются равнодействующие винтовые оси: тройные, правые или левые, и двойные.

---

[1] Зонке, 19 и 20.

[2] Зонке, 42 и 43.

Во втором предположении снова выведем 2 аналогические системы с правыми и левыми осями:[1]

$$y = b - i\lambda / 3;\ y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (76\text{ a})$$

и

$$y = b + i\lambda / 3;\ y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (77\text{ a})$$

В этих случаях имеются равнодействующие оси: тройные винтовые, правые или левые, и двойные оси симметрии. Табл. III фиг. 76 и 77.

В третьем предположении выведем еще систему:[2]

$$y = b + i\lambda / 2;\ y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0 \qquad (78\text{ a})$$

В этом случае имеются равнодействующие оси: тройные оси симметрии и двойные винтовые оси. Табл. III фиг. 78.

22. Гемиморфия

Сюда относящиеся системы, очевидно, могут быть выведены лишь из системы (78 а) предыдущего отделения, присоединяя плоскость симметрии, параллельную осям.

Присоединяя плоскости симметрии, перпендикулярные к направлениям элементарного поступания в плоскости $y_0\ y_1$, из (78) выведем систему:

$$y = b + i\lambda / 2;\ y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (79\text{ a})$$

Так как шестерная винтовая ось с ходом $\lambda / 2$ есть в то же время и винтовая двойная, то, подвергнув одну из простых систем, слагающих (79 а), образующему поступанию по направлению оси y на величину $\lambda / 2$, на основании теоремы 9 найдем теперь, что плоскости симметрии, пересекающиеся в той же оси, перпендикулярны к плоскостям симметрии предыдущего случая, и вместе с тем получим систему:

$$y = b + (i + k)\lambda / 2;\ y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\ v_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (80\text{ a})$$

---

[1] Зонке, 44 и 45.

[2] Зонке, 46.

Никакие другие образующие поступания невозможны для этого отделения.

24. Бипирамидальная гемиэдрия

Сюда относящиеся системы, очевидно, также могут быть выведены лишь из системы (78 а), присоединяя плоскость симметрии, перпендикулярную к оси y. Получаем:

$$y = n^k b + i\lambda / 2;\ y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b_{i+1}} + \lambda_0 \qquad (81\,a)$$

25. Трапецоэдрическая гемиэдрия

Рассуждениями, совершенно аналогичными приведенным для трапецоэдрической тетартоэдрии, легко докажем, что в этом случае за первоначальные оси можно принять лишь 2 двойные, непересекающиеся, оси симметрии, образующие между собою угол 30°, причем равнодействующей является шестерная винтовая ось, расположенная как прямая кратчайшего расстояния между ними.

Приняв сначала эту ось за винтовую, правую или левую с ходом $\lambda / 6$, получим две системы:[1]

$$y = n^k b - i\lambda / 6;\ y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b_{i+n^k}} + \lambda_0 \qquad (82\,a)$$

и

$$y = n^k b + i\lambda / 6;\ y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b_{i+n^k}} + \lambda_0 \qquad (83\,a)$$

Табл. III фиг. 82 и 83. В этом случае равнодействующие оси, параллельные y, расположены как в случаях (74 а) и (75 а), а параллельные осям y_0 и y_1 — аналогично симморфической системе (54).

Приняв ту же ось за винтовую, правую или левую, с ходом $\lambda / 3$, получим еще две системы:[2]

$$y = n^k b - i\lambda / 3;\ y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b_{i+n}^{k}} + \lambda_0 \qquad (84\,a)$$

---

1) Зонке, 48 и 49.

2) Зонке, 50 и 51.

и

$$y = n^k b + i\lambda / 3;\; y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0;\; y_1 = \overset{6}{b_{i+n^k}} + \lambda_0 \qquad (85\,а)$$

В этом случае равнодействующие оси, параллельные y_1, расположены, как в случаях (76 а) и (77 а), а параллельные осям y_0 и y_1 — аналогично предыдущему. Табл. III фиг. 84 и 85.

Наконец, приняв ту же ось за винтовую шестерную ось с ходом $\lambda/2$, получим еще систему:[1]

$$y = n^k b + i\lambda / 2;\; y = \overset{6}{b_i} + \lambda_0;\; y_1 = \overset{6}{b_{i+n^k}} + \lambda_0 \qquad (86\,а)$$

В этом случае равнодействующие оси, параллельные y, расположены, как в случае (78 а), а параллельные y_0 и y_1 — аналогично предыдущему. Табл. III фиг. 86.

26. Скаленоэдрическая гемиэдрия

Очевидно, что и в этом случае системы, которые должны выводиться из систем (70 а) — (73 а) присоединением аналогических систем в одну двойную систему, так же невозможны, как и в случае гемиэдрии.

27. Голоэдрия

Очевидно, что сюда относящиеся системы могут быть выведены только из случая (86 а) присоединением плоскости симметрии, например перпендикулярной оси y.

Таким образом непосредственно выводим систему:

$$y = n^{k+l} b + i\lambda / 2;\; y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0;\; y_1 = \overset{6}{b_{i+n^k}} + \lambda_0 \qquad (87\,а)$$

В этом случае имеются, кроме плоскости симметрии, перпендикулярной к оси y, еще 3, пересекающиеся в оси y и проходящие через оси y_0, y_1.

---

[1] Зонке, 52.

Произведя образующие поступания по направлению оси y, получим еще систему:

$$y = n^{k+l} b + (i + l) \lambda / 2; \; y_0 = \overset{6}{b_i} + \lambda_0; \; y_1 = \overset{6}{b}_{i+n^k} + \lambda_0 \qquad (88\,a)$$

В этом случае, кроме плоскости симметрии, перпендикулярной к оси y и проходящей через оси (z), имеются еще плоскости симметрии, пересекающиеся в оси y и проходящие чрез оси (z).

Кубооктаэдрическая система

28. Тетартоэдрия

Для этого отделения за первоначальные оси можно принять тройную ось O и двойную ось x_2. Так как в числе равнодействующих или первоначальных всегда будут находиться тройные оси симметрии, то здесь мыслимо лишь 3 случая:

1) Тройная ось симметрии пересекается с винтовой осью x_2; 2) та же ось не пересекается с двойною осью симметрии x_2, и 3) та же ось не пересекается с двойною винтовою осью x_2.

Однако первый случай приведет лишь к выведенной уже симморфической системе (60 s), для которой мы имеем такое пересечение.

Для исследования сначала третьего предположения допустим, что кратчайшее расстояние по направлению x_1 между осью O и x_2 есть l_1, и поместим притом начало координат по оси O. В таком случае, для точки (a_0, a_1, a_2), переместив координаты по направлению оси x_1, на величину l_1, найдем выражение:

$$x_0 = a_0; \; x_1 = a_1 - l_1; \; x_2 = a_2 \qquad (a)$$

Из точки (a) и двойной винтовой оси x_2 выведем точку:

$$x_0 = - a_0; \quad x_1 = - a_1 + l_1; \quad x_2 = a_2 + \lambda / 2 \qquad (b)$$

Возвратившись к первоначальным координатам:

$$x_0 = -a_0; \quad x_1 = -a_1 + 2l_1; \quad x_2 = a_2 + \lambda / 2$$

а повернув около оси O, найдем еще точку:

$$x_0 = -a_1 + 2l_1; \quad x_1 = a_2 + \lambda / 2; \quad x_2 = -a_0 \qquad \text{(c)}$$

Из выражения (c) усматриваем присутствие некоторой винтовой тройной оси, параллельной O_1. Чтобы определить ее положение, допустим сначала, что ось эта пересекает плоскость x_0x_1 в точке (L_0, L_1, O).

Перенеся сначала соответственным образом оси координат для точки (a_0, a_1, a_2), найдем выражение:

$$x_0 = a_0 - L_0; \quad x_1 = a_1 - L_1; \quad x_2 = a_2 \qquad \text{(d)}$$

Повернув теперь около правой винтовой оси O_1, найдем точку:

$$x_0 = -a_1 + L_1 - \lambda / 3; \quad x_1 = a_2 + \lambda / 3$$
$$x_2 = -a_0 + L_0 + \lambda / 3 \qquad \text{(e)}$$

а возвратившись к первоначальным координатам, получим окончательно:

$$x_0 = -a_1 + L_0 + L_1 - \lambda / 3; \quad x_1 = a_2 + L_1 + \lambda / 3$$
$$x_2 = -a_0 + L_0 + \lambda / 3 \qquad \text{(f)}$$

Сравнивая выражения (f) и (c), найдем:

$$L_0 = -\lambda / 3; \quad L_1 = \lambda / 6; \quad l_1 = -\lambda / 4$$

Для того, чтобы получить аналитическое выражение этой системы, заметим, что полною комбинациею осей совмещения, согласно уравнениям (17) конечных фигур, будут в данном случае тройная ось симметрии O, которой соответствует параметр i, и двойные винтовые оси x_0 и x_1, которым соответствуют параметры k и j. Но так как две последние оси не пересекаются с первою, то с винтовым движением по этим осям связано некоторое поступание, величину которого легко определим на основании теоремы 2;

величина эта вдвое больше расстояния начала от соответственных осей. Сообразно этому получаем для этой
Табл. III фиг. 89. системы:[1]

$$\left.\begin{aligned} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (j+k)\lambda/2; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + j\lambda/2 \\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2} + k\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (89\,a)$$

В этом случае все двойные оси винтовые. Тройные оси, как во всех случаях кубооктаэдрической системы, как оси симметрии, так и винтовые, правые и левые.

При выводе системы (89 а) мы допустили сопряженность направлений x_0, x_1 и x_2. Если допустим, что направление оси x_2 не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, получим еще систему:[2]

$$\left.\begin{aligned} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (f+j+k)\lambda/2; \; x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + (f+j)\lambda/2 \\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2} + (f+k)\lambda/2 \end{aligned}\right\} (90\,a)$$

В этом случае двойные оси расположены совершенно
Табл. III фиг. 90. аналогично случаю (6 а), а тройные оси одинаково с предыдущим. Этот случай, очевидно, и соответствует приведенному выше 2-му предположению.

Наконец, если бы мы допустили, что и в плоской сетке $(x_0 x_1)$ направления осей x_0 и x_1 не были сопряженные, то получили бы равнодействующие двойные оси, например параллельные x_1, пересекающимися с тройными осями симметрии O_1 O_2 и пр., словом пришли бы к одной из выведенных симморфических систем.

29. Додекаэдрическая гемиэдрия

Системы, сюда относящиеся, могут быть выведены из систем предыдущего отделения, присоединяя плоскость

[1] Зонке, 58.
[2] Зонке, 57.

симметричности, перпендикулярную какой-нибудь оси, например x_2. Легко видеть, что совпадение первоначальных осей произойдет при образующем поступании, имеющем направление, например, оси x_0 и величину $\lambda/2$.

Поэтому из системы (89 а) выведем новую:

$$x_0 = n^j a_i + l\lambda/2; \quad x_1 = n^k a_{i+1} + j\lambda/2$$
$$x_2 = n^l a_{i+2} + k\lambda/2 \qquad (91a)$$

В этом случае плоскость $x_0\ x_1$ есть плоскость скольжения, коего направление есть ось x_0 и величина $\lambda/2$.

Возможно еще присоединить образующее поступание, коего слагающие ($\lambda/2$, $\lambda/2$, $\lambda/2$); сложив это поступание со сделанным, получим поступание (O, $\lambda/2$, $\lambda/2$). Последняя из этих слагающих переносит вторую плоскость симметрии по направлению оси x_2 на величину $\lambda/4$, а вторая из них выражает скольжение по направлению оси x_1. Одинаковость всех условий образования этой системы свидетельствует об ее равнозначности с системою (91 а).

Также из системы (90 а) выведем:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (f + l)\lambda/2; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + (f + j)\lambda/2 \\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2} + (f + k)\lambda/2 \end{array}\right\} \quad (92\,a)$$

В этом случае также плоскость $x_0 x_1$ есть плоскость скольжения, коего направление есть ось x_0, а величина $\lambda/2$.

И здесь опять поступание ($\lambda/2$, $\lambda/2$, $\lambda/2$) приводит к системе равнозначной.

30. Тетраэдрическая гемиэдрия

Исследование образующего поступания в данном случае весьма близко с тем, которое привело к системе (51 а). Однако единственное возможное для последнего случая обра-

зующее поступание, имеющее слагающие ($\lambda/4$, $\lambda/4$, $\lambda/4$), в рассматриваемом отделении из (90 а) дает систему

$$\left.\begin{aligned} x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2 + f\lambda/4;\quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^l} + \\ + (f+k)\lambda/2 + l\lambda/4;\quad x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2n^l} + \\ + (f+j)\lambda/2 + l\lambda/4 \end{aligned}\right\} \quad (103\,\text{a})$$

31. Гироэдрическая гемиэдрия

Для этого отделения за первоначальные оси можно принять одну из тройных осей, например O, и одну из додекаэдрических двойных осей, например z_0. Так как, в числе равнодействующих или первоначальных всегда будут находиться и оси симметрии обоих родов, то единственное предположение, которое мы можем сделать в этом случае, — допустить непересечение первоначальных осей симметрии.

Примем кратчайшее расстояние между ними по направлению оси x_0 за ось координат и величину его означим чрез L_0; начало, как всегда, поместим на оси O.

При этом предположении, сделав сначала соответствующее перемещение координат, получим для точки (a_0, a_1, a_2) выражение:

$$x_0 = a_0 - L_0;\quad x_1 = a_1;\quad x_2 = a_2 \quad (\text{a})$$

Приняв теперь во внимание проходящую чрез начало ось, параллельную оси z_0, из точки (а) выведем другую:

$$x_0 = a_1;\quad x_1 = a_0 - L_0;\quad x_2 = -a_2 \quad (\text{b})$$

Произведя обратное перемещение координат, найдем:

$$x_0 = a_1 + L_0;\quad x_1 = a_0 - L_0;\quad x_2 = -a_2 \quad (\text{c})$$

Наконец, повернув около оси O, получим еще точку:

$$x_0 = a_0 - L_0;\quad x_1 = -a_2;\quad x_2 = a_1 + L_0 \quad (\text{d})$$

Из выражения (d) заключаем о присутствии равнодействующей четверной винтовой оси с ходом L, не проходящей чрез начало и параллельной оси x_0.

Чтобы найти положение этой оси, подвергнем сначала оси координат соответствующему перемещению, причем для точки (a_0, a_1, a_2) получим выражение:

$$x_0 = a_0; \quad x_1 = a_1 - l_1; \quad x_2 = a_2 - l_2 \qquad \text{(e)}$$

Приняв, что теперь ось x_0 есть четверная винтовая ось, из точки (e) выведем новую:

$$x_0 = a_0 + L; \quad x_1 = -a_2 + l; \quad x_2 = a_1 - l_1$$

Возвратившись к первоначальным координатам, получим окончательно:

$$x_0 = a_0 + L; \quad x_1 = -a_2 + l_1 + l_2; \quad x_2 = a_1 - l_1 + l_2 \qquad \text{(f)}$$

Сравнивая (f) с (d), находим:

$$l_1 = -L_0/2; \quad l_2 = +L_0/2 \quad \text{и} \quad L = -L_0$$

Так как ход четверной оси может быть $\lambda/4$ и $\lambda/2$, то отсюда выводим 2 случая:

$$1) \quad L = \lambda/4; \quad l_1 = +\lambda/8; \quad l_2 = -\lambda/8$$

и

$$2) \quad L = \lambda/2; \quad l_1 = +\lambda/4; \quad l_2 = -\lambda/4$$

1-й с л у ч а й. На основании только что выведенных условий и в предположении сопряженности направлений осей x_0, x_1 и x_2 мы получаем вполне определенную систему, а именно: имеются только правые (или только левые) четверные оси (x) с ходом $\lambda/4$ и параллельные им равнодействующие двойные винтовые оси. Табл. III фиг. 93.

Для того, чтобы вывести аналитическое выражение этого случая аналогично выражению (19) для фигур конечных, замечу, что в последнем параметр i выражает тройную

ось O, параметр l — двойную ось z_4, j и k — двойные оси x_1 и x_0.

Сообразно с этим, для системы с правыми осями найдем:[1]

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = n^{j+l}\overset{3}{a}_i + (k+l)\lambda/2 - j\lambda/4; \quad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+n^l} + \\ \qquad + (j+l)\lambda/2 + k\lambda/4 \\ x_2 = n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2n^l} + l\lambda/2 + (j-k)\lambda/4 \end{array}\right\} \quad (93\,\text{a})$$

Переместим начало координат в точку $(\lambda/4, \lambda/4, \lambda/4)$. Для того, чтобы точка (a_0, a_1, a_2) сохранила эти координаты при новой системе осей, мы заменим ее точкою

$$(a_0 + \lambda/4; \quad a_1 + \lambda/4; \quad a_2 + \lambda/4).$$

Получаем

$$x_0 = n^{j+l}\overset{3}{a}_i + (n^{j+l} - 1)\lambda/4 + (k+l)\lambda/2 - j\lambda/4$$

$$x_1 = n^{k-l}\overset{3}{a}_{i+n^l} + (n^{k+l} - 1)\lambda/4 + (j+l)\lambda/2 + k\lambda/4$$

$$x_2 = n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2n^l} + (n^{j+k+l} - 1)\lambda/4 + l\lambda/2 + (k-j)\lambda/4$$

Заметив, что $n^{j+l} = 1 - 2(j+l)$ и т. д., мы напишем те же уравнения в виде:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = n^{j+l}\overset{3}{a}_i + k\lambda/2 + j\lambda/4; \quad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+n^l} + \\ \qquad + j\lambda/2 - k\lambda/4 \\ x_2 = n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2n^l} - (k-j)\lambda/4 \end{array}\right\} \quad (93\,\text{a}')$$

Из уравнений (93 a′), в которых отсутствует параметр l в элементах поступаний, заключаем, что теперь тройная ось O в начале координат пересекается с двойною осью z_4. Так как последняя ось перпендикулярна к оси O, то уравнения представляют выражение того, что фигуры, входя-

[1] Зонке, 65.

щие в состав системы, имеют симметрию трапецоэдрической тетартоэдрии гексагональной системы. Для симметрии связи остаются параметры j и k, и, значит, симметрия эта соответствует системе (8 а).

То, что сейчас выведено аналитически, нетрудно и прямо усмотреть из чертежа. Табл. III фиг 93.

Аналогично этому для системы с левыми осями найдем:[1]

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^{j+l}\overset{3}{a}_i + (k+l)\lambda/2 + j\lambda/4; \\ x_1 &= n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+n^l} + (j+l)\lambda/2 - k\lambda/4 \\ x_2 &= n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2n^l} + l\lambda/2 + (k-j)\lambda/4 \end{aligned}\right\} \qquad (94\text{ a})$$

а соответственно изменив координаты, получим

$$x_0 = n^{j+l}\overset{3}{a}_i + k\lambda/2 - j\lambda/4; \qquad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+n^l} + j\lambda/2 + k\lambda/4$$

$$x_2 = n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2n^l} + (j-k)\lambda/4 \qquad (94\text{ a}')$$

Так как для вывода этой системы в отличие от предыдущей нужно взять $L = -\lambda/4$ или $L_0 = \lambda/4$, то, значит, эти обе системы связаны между собою как в первоначальных, так, следовательно, и во всех остальных осях совмещения плоскостью симметрии, проходящею через ось (координат) x_2 и ось O; симметрия эта прямо усматривается и из чертежа. Табл. III фиг. 94.

В предположении, что направление одной из осей, например x_2, не есть сопряженное с перпендикулярною к ней плоскою сеткою, выведем из (93 а) новую систему,[2]

---

[1] Зонке, 66.

[2] Зонке, 62.

имеющую вид выведенной из (94 а′):

$$x_0 = n^{j+l}\overset{3}{a}_i + (f+k)\lambda/2 - j\lambda/4$$

$$x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+n^l} + (f+j)\lambda/2 + k\lambda/4$$

$$x_2 = n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2n^l} + f\lambda/2 + (j-k)\lambda/4 \qquad (95\text{ a})$$

или, что все равно

$$x_0 = n^{j+l}\overset{3}{a}_i + f\lambda/2 + j\lambda/4; \quad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+n^l} + f\lambda/2 - k\lambda/4$$

$$x_2 = n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2n} + f\lambda/2 + (k-j)\lambda/4$$

Табл. III фиг. 95.

Эта система отличается от предыдущей присутствием равнодействующих двойных осей симметрии (x), вследствие чего симметрия связи соответствует системе (6a). В этом случае имеются одновременно правые и левые винтовые оси; тождественность выражения найденного и того, которое получилось бы из (94 а), показывает, что системы, выведенные как из правой, так и из левой, тождественны.

Наконец в предположении, что и в плоских сетках, перпендикулярных к осям, направления этих осей не суть сопряженные, мы получим еще системы:[1]

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^{j+l}\overset{3}{a}_i + f\lambda/2 - j\lambda/4; \quad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+n^l} + g\lambda/2 + k\lambda/4 \\ x_2 &= n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2n^l} + (f+g+l)\lambda/2 + (k-j)\lambda/4 \end{aligned}\right\} (96\text{ a})$$

Табл. III фиг. 96.

Здесь опять имеются одновременно правые и левые четверные оси (x). Особым отличием этого случая является пересечение тройных осей симметрии O с двойными равнодействующими осями симметрии (x). В этом случае, следовательно, фигуры, входящие в состав системы, имеют симметрию тетартоэдрии кубооктаэдрической системы, а симметрией связи служат оси (z).

[1] Зонке, 63.

Самая система может быть выражена поэтому уравнениями: [1]

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^{j+l}\overset{3}{a}_i + f\lambda/2 + l\lambda/4; \quad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+nl} + \\ &\qquad\qquad + g\lambda/2 + l\lambda/4 \\ x_2 &= n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2nl} + (f+g)\lambda/2 + l\lambda/4 \end{aligned}\right\} \quad (96\,a')$$

2-й с л у ч а й. Система вполне определяется условиями: $L=\lambda/2$; $l_1=+\lambda/4$; $l_2=-\lambda/4$. В этом случае нет правых или левых винтовых осей (x), а имеются лишь четверные винтовые оси с ходом $\lambda/2$; кроме того, одна из осей z_4 пересекается с осью O. Поэтому получаем выражение: [2]

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^{j+l}\overset{3}{a}_i + j\lambda/2; \quad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+nl} + k\lambda/2 \\ x_2 &= n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2nl} + (j+k)\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (97\,a)$$

В этом случае фигуры системы имеют симметрию трапецоэдрической тетартоэдрии гексагональной системы; симметрия связи соответствует уже симморфической системе (9 s). Табл. III фиг. 97.

Перенеся координаты по направлению оси O на величину, слагающие которой на осях $(\lambda/4, \lambda/4, \lambda/4)$, и заменив вместе с тем точку (a_0, a_1, a_2) точкою $(a_0+\lambda/4, a_1+\lambda/4, a_2+\lambda/4)$, получим выражение:

$$\begin{aligned} x_0 &= n^{j+l}\overset{3}{a}_i + l\lambda/2; \quad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+nl} + l\lambda/2 \\ x_2 &= n^{j+k+l}\overset{3}{a}_{i+2nl} + l\lambda/2 \end{aligned} \quad (97a')$$

Из выражения (97a′) ясно усматриваем, что в этом случае фигуры, входящие в состав системы, могут иметь также симметрию тетартоэдрии кубооктаэдрической системы,

---

[1] Выводится из (96 a′) аналогично тому, как (93 a′) из (93 a), перенося координаты на величину $(\lambda/8, \lambda/8, \lambda/8)$.

[2] З о н к е, 64.

причем симметрией связи служат уже пересекающиеся попарно оси (z).

При выводе (97а) предполагалась сопряженность направлений x_0, x_1 и x_2. Если же принять их несопряженными, то, как легко убедиться, получится система симморфическая.

32. Голоэдрия

Системы, сюда относящиеся, могут быть выведены из систем предыдущего отделения, если удастся найти такие плоскости симметрии или скольжения, присоединив которые, мы получим совпадение всех осей совмещения, и притом величина скольжения должна быть равна половине величины поступания совмещения в том же направлении.

Из систем (93 а) и (94 а) как содержащих исключительно правые или левые оси, очевидно, никаких новых, относящихся сюда, случаев вывести нельзя.

Табл. III фиг. 95. В случае системы (95 а), прибавляя плоскость симметрии, перпендикулярную к оси x_2 и отстоящую от начала на расстоянии — $\lambda/8$, мы вместе с тем должны подвергнуть одну из аналогических систем образующему поступанию по направлению оси x_1, а потому и получаем систему:

$$x_0 = n^{j+l}\overset{3}{a}_i + f\lambda/2 + j\lambda/4; \quad x_1 = n^{k+l}\overset{3}{a}_{i+nl} + (f+m)\lambda/2 - k\lambda/4$$
$$x_2 = n^{j+k+l+m}\overset{3}{a}_{i+2nl} + (2f + k - j - m)\lambda/4$$

Подставим в эти уравнения

$$l = m'; \quad j = j' - m'; \quad k = k' - m'; \quad m = l' + m' - j' - k' \quad (А)$$

Сделав сокращения и отбросив значки, получим окончательно уравнения, аналогичные (34) для конечных фигур:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^j\overset{3}{a}_l + (f + l)\lambda/2 - (m - j)\lambda/4 \\ x_1 &= n^k\overset{3}{a}_{i+n^m} + (f + j)\lambda/2 - (m - k)\lambda/4 \\ x_2 &= n^j\overset{3}{a}_{i+2nm} + (f + k)\lambda/2 - (m - l)\lambda/4 \end{aligned}\right\} \quad (98\text{ а})$$

В этом случае плоскости симметрии отсутствуют, а положение плоскостей скольжения нетрудно вывести из самих уравнений.

В случае системы (96 а) мы можем плоскость координат x_0x_1 принять за плоскость скольжения, слагающие коего на осях x_0 и x_1 имеют величину $\lambda/4$. Введя в уравнения (96 а) это выражение и произведя изменение букв по формулам (A), найдем:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2 + (l-k)\lambda/4 \\ x_1 &= n^k \overset{3}{a}_{i+nm} + g\lambda/2 + (j+l)\lambda/4 \\ x_2 &= n^l \overset{3}{a}_{i+2nm} + (f+g)\lambda/2 + (k-j)\lambda/4 \end{aligned}\right\} \quad (99\,a)$$

Из этого выражения усматриваем, что чрез начало координат, а следовательно и чрез ось, проходит плоскость симметрии, которой соответствует параметр m. В оси O, а также в оси x_0, и вообще во всех осях (O) и (x) пересекаются равные плоскости симметрии, как это характерно для тетраэдрической гемиэдрии.

Чтобы нагляднее выразить это, перенесем начало координат в точку ($\lambda/8$, $\lambda/8$, $\lambda/8$), в которой пересекаются плоскости симметрии всех направлений. Находим:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^j \overset{3}{a}_i + f\lambda/2 + (j-k+l)\lambda/4 \\ x_1 &= n^k \overset{3}{a}_{i+nm} + g\lambda/2 + (j+k+l)\lambda/4 \\ x_2 &= n^l \overset{3}{a}_{i+2nm} + (f+g)\lambda/2 + (-j+k+l)\lambda/4 \end{aligned}\right\} \quad (99\,a')$$

Сделав $l=j+k$, мы получим уравнения, тождественные с (67 s), и, значит, симморфическая система (67 s), относящаяся к тетраэдрической гемиэдрии, заключается как часть в системе (99 a').

Наконец, введя образующее поступание, имеющее слагающие (λ / 2, λ / 2, λ / 2), получим еще систему:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^j \overset{3}{a}_i + (f + m)\lambda/2 - (j \quad k + l)\lambda/4 \\ x_1 &= n^k \overset{3}{a}_{i+nm} + (g + m)\lambda/2 - (j + k + l)\lambda/4 \\ x_2 &= n^l \overset{3}{a}_{i+2nm} + (f + g + m)\lambda/2 - (-j + k - l)\lambda/4 \end{aligned}\right\} \quad (100\,a)$$

В этом случае плоскости симметрии отсутствуют.

Остается вывести новые системы из (97 a').

В этом случае плоскость осей x_0, x_1 можно принять за плоскость симметрии; получаем систему:

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + m\lambda/2; \quad x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+nm} + m\lambda/2$$

$$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2nm} + m\lambda/2 \qquad (101\,a)$$

Из уравнений (101 a) непосредственно заключаем о присутствии всех элементов симметрии додекаэдрического отделения: сделав $m=0$, получим уравнения, тождественные с (62 s), а это показывает, что приведенная система заключается в системе (101a) как ее часть.

Наконец, произведя образующее поступание, имеющее слагающие (λ / 2, λ / 2, λ / 2), найдем еще систему:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= n^j \overset{3}{a}_i + (j + k + l)\lambda/2; \\ x_1 &= n^k \overset{3}{a}_{i+nm} + (j + k + l)\lambda/2 \\ x_2 &= n^l \overset{3}{a}_{i+2nm} + (j + k + l)\lambda/2 \end{aligned}\right\} \quad (102\,a)$$

В этом случае, сделав $l = j + k$, мы имеем случай системы (65 s) как части системы (102 a).

Этим вывод правильных систем исчерпывается.

Стереоэдры асимморфических систем

Аналогично тому, как мы поступали при выводе стереоэдров гемисимморфических систем, мы можем поступить и здесь, а именно: приняв за исходную данную асимморфическую систему, прибавить к ней одну или несколько равных в таком расчете, чтобы новая совокупность составила собою симморфическую систему. Нетрудно видеть даже, в чем вообще будет состоять прибавление новых систем. В самом деле, асимморфическая система тем существенно отличается от симморфической, что первоначальные ее оси, одна или обе, винтовые, или же оси эти не пересекаются, хотя и представляют оси симметрии; значит, при переходе от асимморфической системы к симморфической, по отношению к которой первая составляет лишь ее часть, необходимо прибавить одну или обе первоначальные оси симметрии — последнее в том случае, если все оси асимморфической системы винтовые, — и притом в таком положении, чтобы в результате явилась система симморфическая (т. е. такая правильная система, для которой можно принять пересекающимися обе первоначальные оси симметрии).

Однако, в способе прибавления новых осей симметрии лежит некоторая произвольность, которая и может иметь в результате разнообразные решения одной и той же задачи. Для примера возьмем случай системы (7 а). Чтобы от нее перейти к системе симморфической, мы можем прибавить двойную ось симметрии z или v так, чтобы она пересекалась с одною из осей симметрии y. Если прибавим одну такую ось в плоскости осей координат z и v (т. е. в плоскости O), то придем к системе (10 s) и соответствующим ей параллелоэдрам и стереоэдрам. Если же прибавим одну такую ось в плоскости (1), т. е. например на $\lambda/4$ выше, то получим систему (11 s) и соответствующие ей другие параллелоэдры и стереоэдры. Отнимая снова прибавленные системы, мы возвратимся к первоначальной правильной

системе точек с разными соответствующими ей системами сложных стереоэдров, подразумевая теперь под этим термином фигуру, соответствующую параллелоэдру симморфической системы.

Таблица правильных систем фигур

Системы кристаллографические	Правильные системы фигур			
	симморфные	гемисимморфные	асимморфные	Сумма
A. Триклиноэдрическая система				
1. Гемиэдрия	1	—	—	1
2. Голоэдрия	1	—	—	1
Итого	2	—	—	2
B. Моноклиноэдрическая система				
3. Гемиморфия	2	—	1	3
4. Гемиэдрия	2	2	—	4
5. Голоэдрия	2	2	2	6
Итого	6	4	3	13
C. Ромбическая система				
6. Гемиэдрия	4	—	5	9
7. Гемиморфия	5	12	5	22
8. Голоэдрия	4	8	16	28
Итого	13	20	26	59
D. Тетрагональная система				
9. Пирамидальная гемиморфия	2	—	4	6
10. Гемиморфия	2	4	6	12
11. Тетартоэдрия	2	—	—	2
12. Бипирамидальная гемиэдрия	2	1	3	6

Системы кристаллографические	Правильные системы фигур			
	симморф-ные	гемисим-морфные	асимморф-ные	сумма
13. Трапецоэдрическая гемиэдрия	2	—	8	10
14. Скаленоэдрическая гемиэдрия	4	5	3	12
15. Голоэдрия	2	4	14	20
Итого	16	14	38	68
E. Гексагональная система				
16. Пирамидальная тетартоморфия	2	—	2	4
17. Тетартоморфия	3	3	—	6
18. Бипирамидальная тетартоэдрия	1	—	—	1
19. Трапецоэдрическая тетартоэдрия	3	—	4	7
20. Гемиэдрия	2	2	—	4
21. Пирамидальная гемиморфия	1	—	5	6
22. Гемиморфия	1	1	2	4
23. Ромбоэдрическая тетартоэдрия	2	—	—	2
24. Бипирамидальная гемиэдрия	1	—	1	2
25. Трапецоэдрическая гемиэдрия	1	—	5	6
26. Скаленоэдрическая гемиэдрия	3	3	—	6
27. Голоэдрия	1	1	2	4
Итого	21	10	21	52
F. Кубооктаэдрическая система				
28. Тетартоэдрия	3	—	2	5
29. Додекаэдрическая гемиэдрия	3	2	2	7
30. Тетраэдрическая гемиэдрия	3	2	1	6
31. Гироэдрическая гемиэдрия	3	—	5	8
32. Голоэдрия	3	2	5	10
Итого	15	6	15	36
Всего систем	73	54	103	230

Объяснение таблиц вклеек

Таблица I

Здесь показаны характеристичные элементы симметрии (оси, плоскости симметрии, а также оси и плоскости сложной симметрии) для всех 32 отделений кристаллографических систем, выведенных А. В. Гадолиным. Выставленные №№ соответствуют №№ текста, а также и №№ таблицы правильных систем (стр. 250).

Таблицы II и III

Здесь показаны оси совмещения всех 65 (выведенных Зонке) простых правильных систем, а именно. на табл. II — для систем симморфических, на табл. III — для систем асимморфических.

Положение осей определяется точкою их пересечения с плоскостью проекции. Превышение осей, параллельных плоскости проекции, над этою плоскостью означается цифрою в скобках, причем для гексагональной системы величина поступания совмещения λ, перпендикулярного к плоскости проекции, принята за 6, а для всех остальных систем — за 4.

Названия осей одинаковы с принятыми для аналитических выражений систем. Двойные и тройные винтовые оси перенесены в верхнюю часть таблиц с целью упростить самые таблицы.

Приняты еще следующие обозначения:

y, z, v — двойные оси симметрии.

$\smile{y}, \smile{z}, \smile{v}$ — » винтовые оси.

$\overset{3}{y}, O, O_1, O_2, O_3$ — тройные оси симметрии.

$\overset{3r}{y}, O^r, O_1^r, O_2^r, O_3^r$ — тройные правые винтовые оси.

$\overset{3l}{y}, O^l, O_1^l, O_2^l, O_3^l$ — тройные левые винтовые оси.

$\overset{4}{y}, \overset{4}{x_0}, \overset{4}{x_1}, \overset{4}{x_2}$ — четверные оси симметрии.

$\overset{4r}{y}, \overset{4r}{x_0}, \overset{4r}{x_1}, \overset{4r}{x_2}$ — четверные правые винтовые оси с ходом $\lambda/4$.

$\overset{4l}{y}, \overset{4l}{x_0}, \overset{4l}{x_1}, \overset{4l}{x_2}$ — четверные левые винтовые оси с ходом $\lambda/4$.

$\overset{4v}{y}, \overset{4v}{x_0}, \overset{4v}{x_1}, \overset{4v}{x_2}$ — четверные винтовые оси с ходом $\lambda/2$.

$\overset{6}{y}$ — шестерная ось симметрии.

$\overset{6r}{y}$ — шестерная правая винтовая ось с ходом $\lambda/6$.

$\overset{6l}{y}$ — то же левая.

$\overset{\underline{6r}}{y}$ — шестерная правая винтовая ось с ходом $\lambda/3$.

$\overset{\underline{6l}}{y}$ — то же левая.

$\overset{6v}{y}$ — шестерная винтовая ось с ходом $\lambda/2$.

Названия осей кубооктаэдрической системы показаны на фиг. *O* в табл. III. №№ соответствуют №№, выставленным при аналитических выражениях.

Таблицы IV и V

Здесь показаны параллелоэдры всех симморфических систем и их разделения на стереоэдры. №№ соответствуют №№ правильных систем точек, выставленным при их аналитических уравнениях в тексте.

ПОПРАВКА К СОЧИНЕНИЮ
„СИММЕТРИЯ ПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ ФИГУР"

(Из протокола заседания С.-Петербургского минералогического общества от 16 октября 1890 г.)

Действительный член Е. С. Федоров сделал нижеследующие заявления:

При пересмотре недавно вышедшего в отдельных оттисках его сочинения „Симметрия правильных систем фигур"

им замечен пропуск одной гемисимморфической системы, а именно:

$$y = n^j b + g\lambda/2 + (j + k + l)\lambda/4;\ z = n^k c + (f + g)\lambda_0/2 + (j + k + l)\lambda_0/4;\ v = n^l d + f\lambda_1/2 + (j + k + l)\lambda_1/4 \quad (16\,h)$$

Эта система составляет особый случай при выводе из (21 s), а именно выводится из нее совершенно аналогично тому, как система (17 h) выводится из (17 s).

При этом нужно иметь в виду, что система, выведенная раньше под номером (16 h), равнозначна с системою, выведенною под номером (17 s).

Если принять во внимание, что на стр. 132 того же сочинения оказалась пропущенною еще система:

$$x_0 = n^j a_i + f\lambda/2 + l\lambda/4;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+nl} + (f + k)\lambda/2 + l\lambda/4$$

$$x^2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2nl} + (f + j)\lambda/2 + l\lambda/4 \quad (103\,a)$$

то сообразно с этим становится необходимо изменить некоторые цифры в таблице упомянутого сочинения референта, на стр. 142—143, а именно:

С. Ромбическая система

	Сим-морф.	Геми-симморф.	Асим-морф.	Сумма
7. Гемиморфия	5	12	5	22
8. Голоэдрия	4	8	16	28

F. Кубооктаэдрическая система

	Сим-морф.	Геми-симморф.	Асим-морф.	Сумма
30. Тетраэдрическая гемиэдрия . . .	3	2	1	6
Общая сумма всех систем . . .	73	54	103	230

Затем референт упомянул о лестном внимании, оказываемом его сочинению, напечатанному только на русском языке, за границею. Несмотря на небольшой промежуток времени, истекший с момента появления означенного сочинения, с ним уже успел ознакомиться немецкий ученый Шенфлис, специально занимающийся тем же предметом. Он письменно известил референта о своем согласии с указанными его (Шенфлиса) ошибками и вообще о том, что в настоящее время признает полное свое согласие с выводами референта.

Виды симметрии всех подразделений кристаллографических систем Таблица I

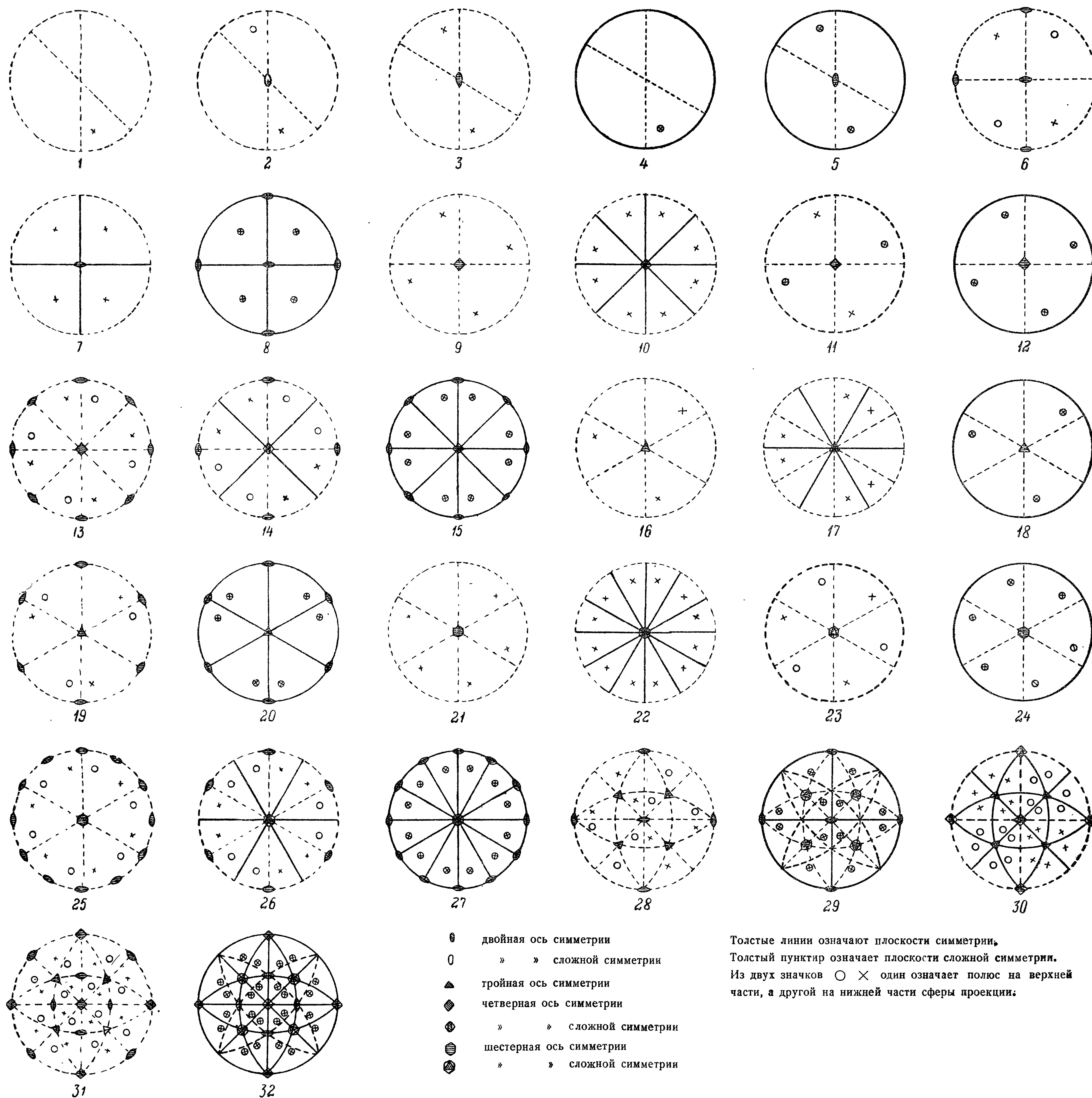
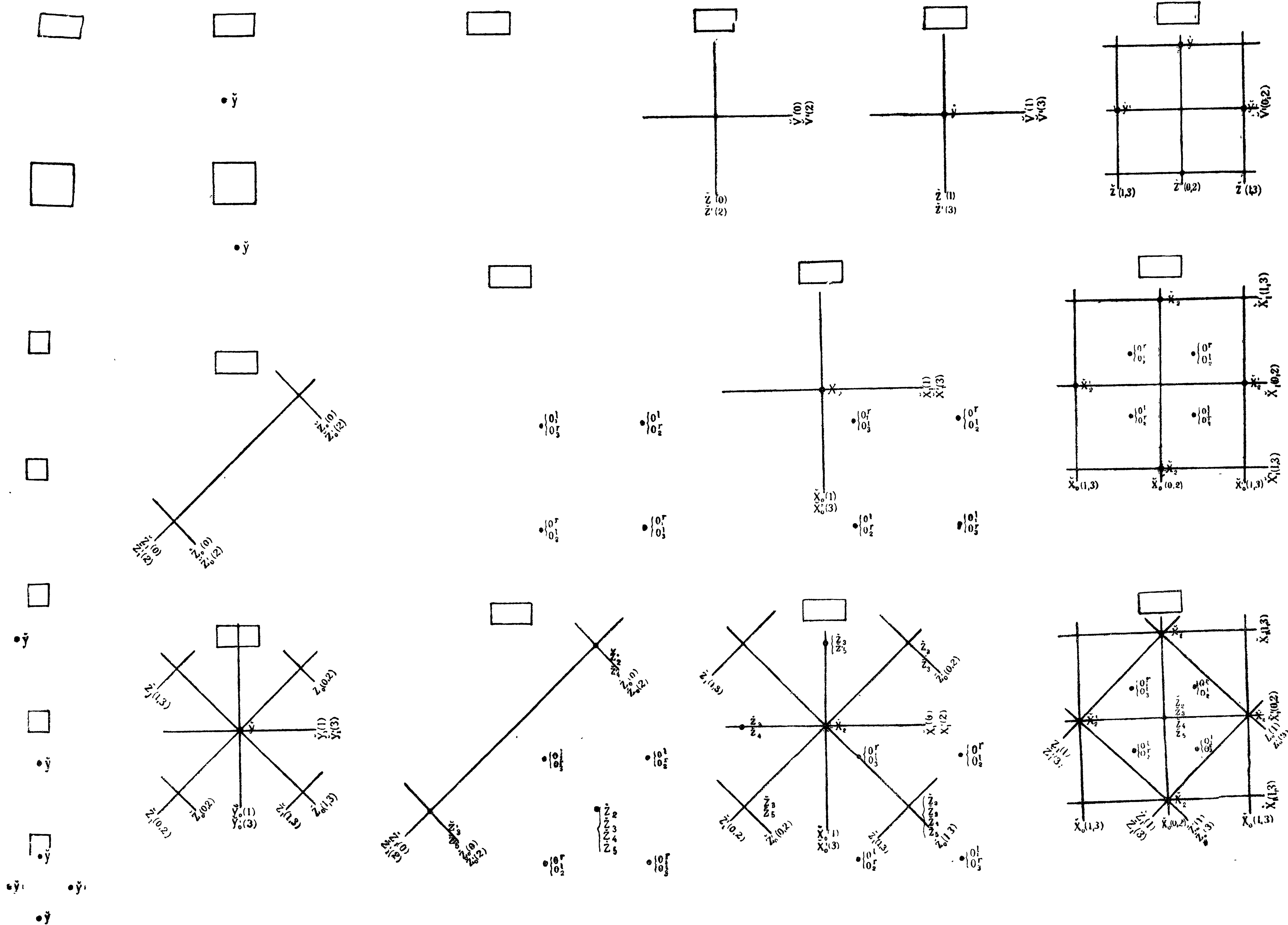
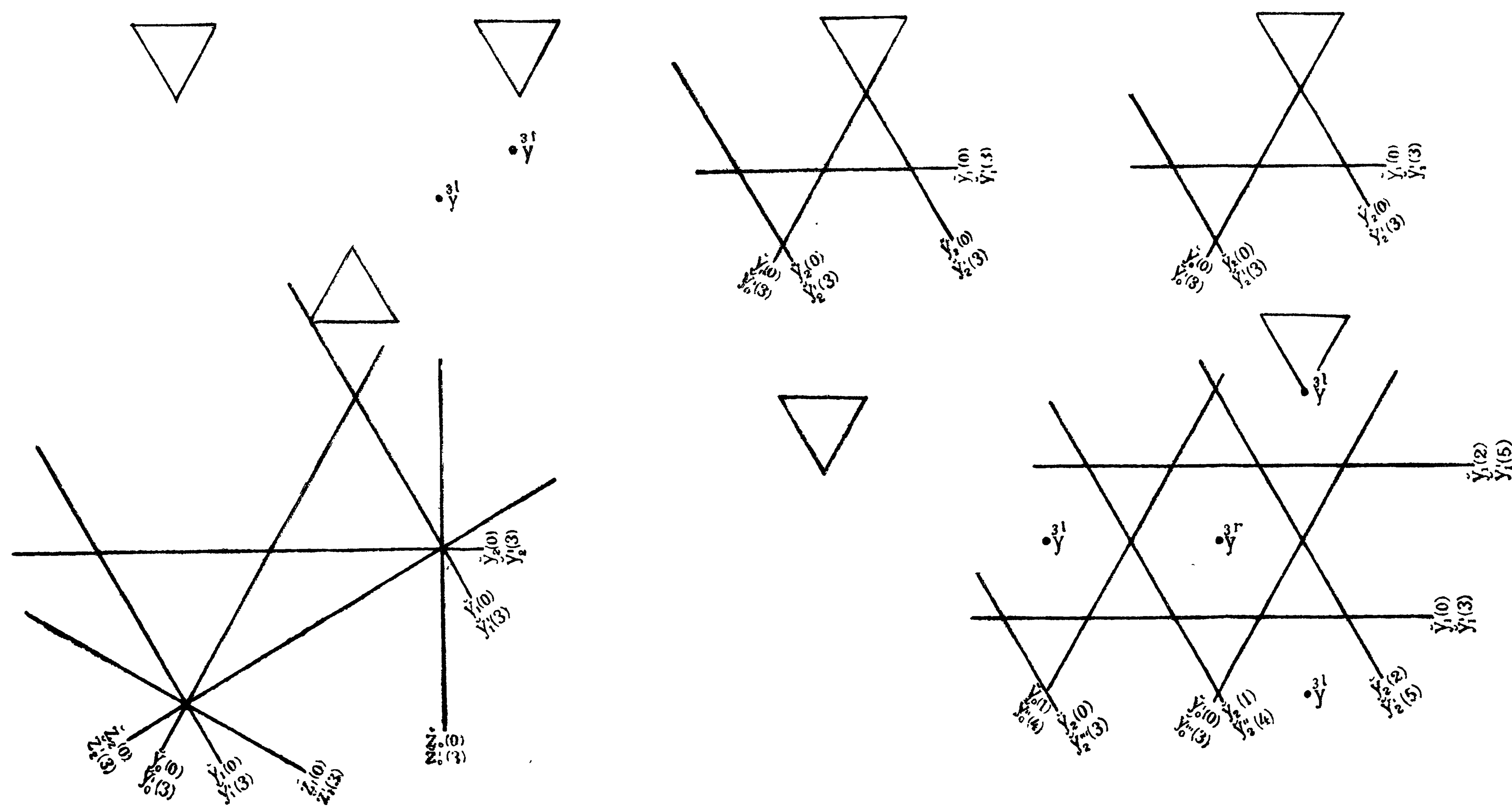
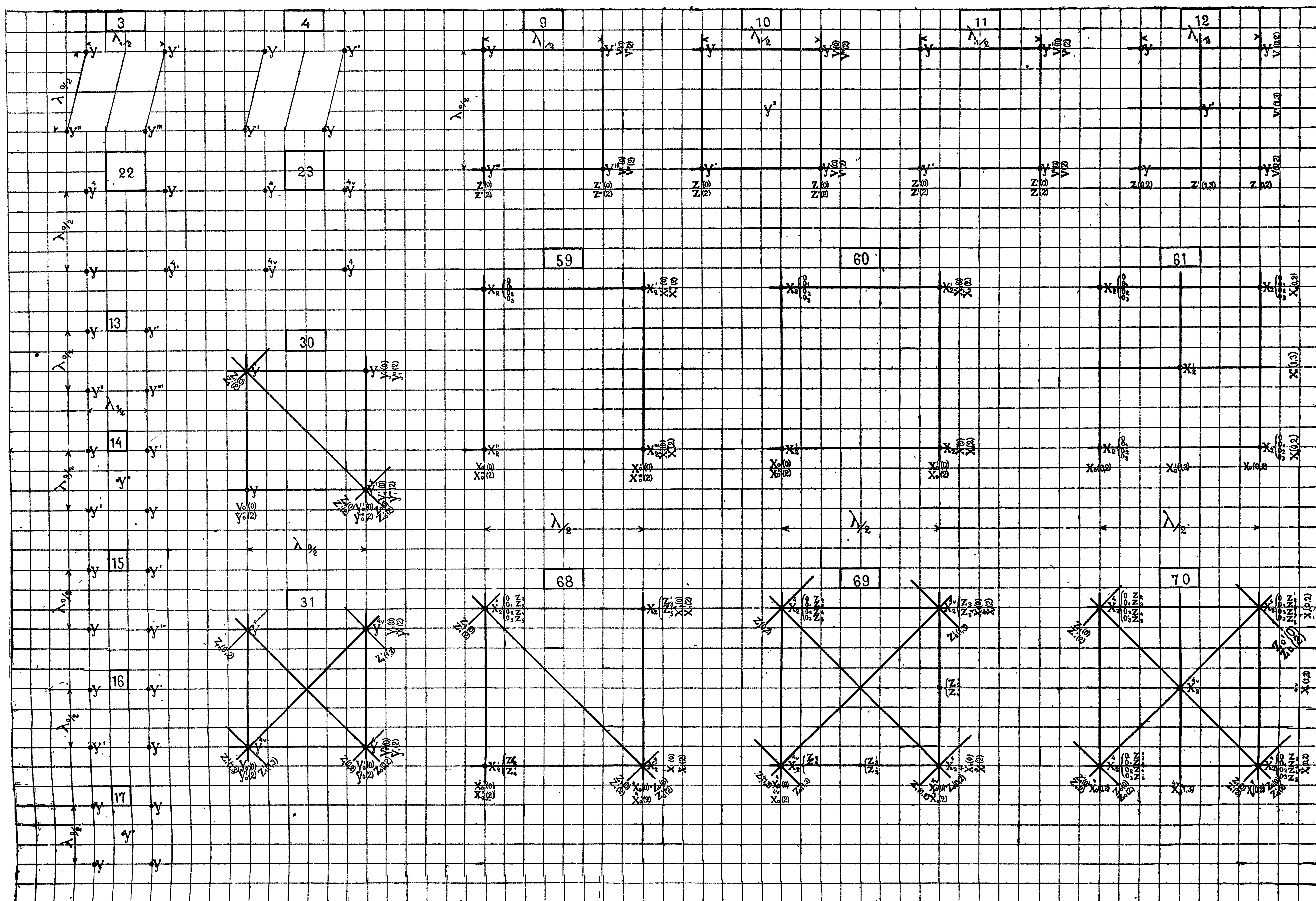
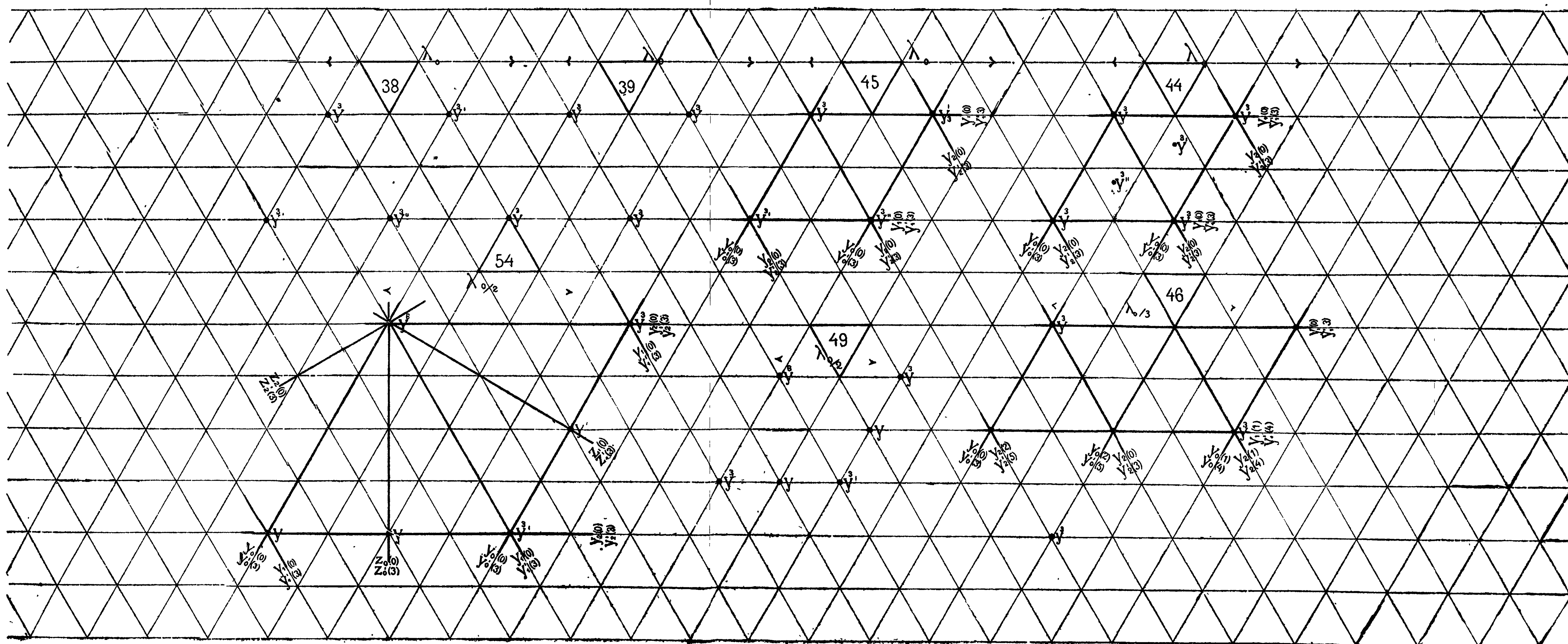


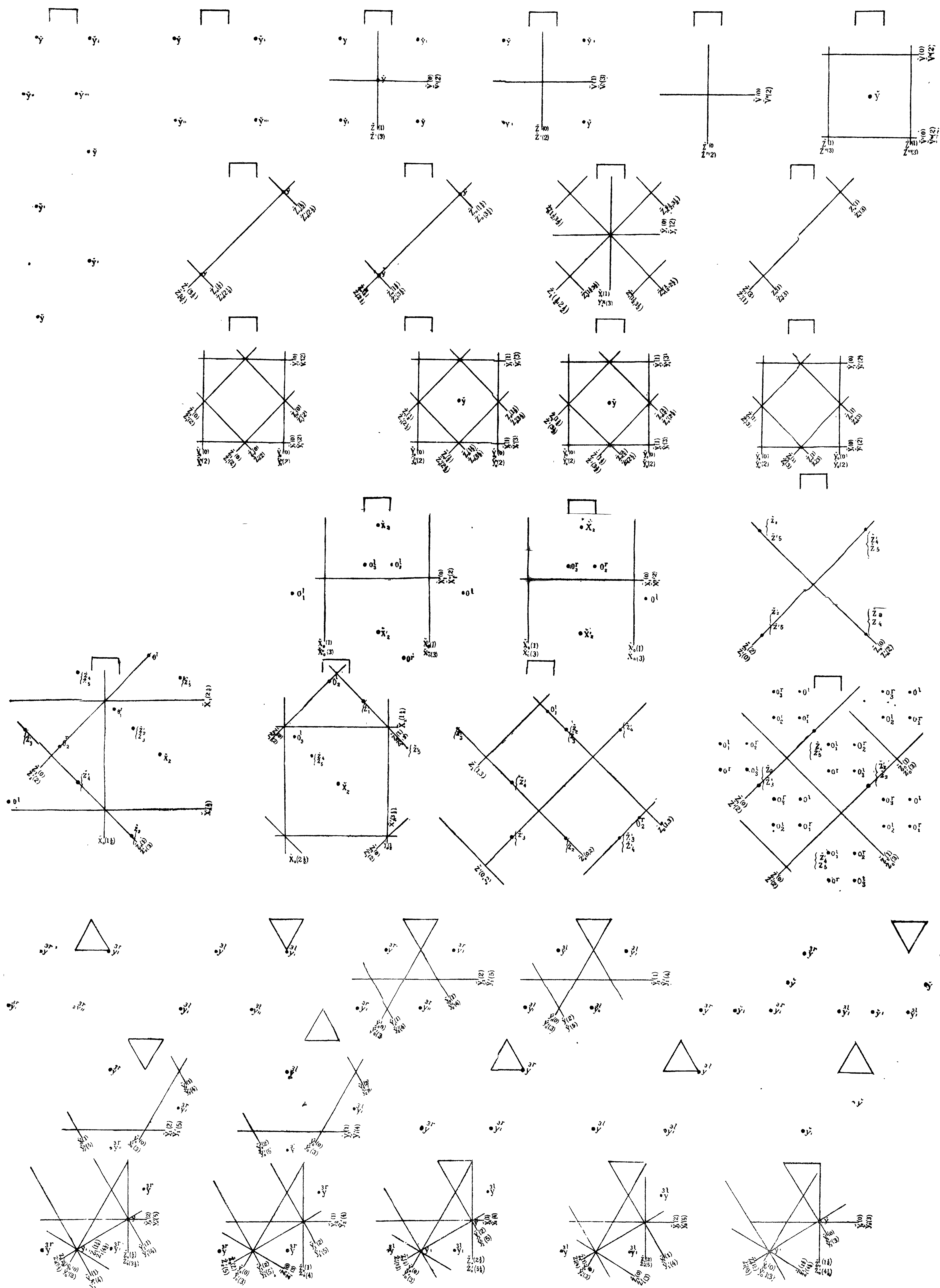
Таблица II а

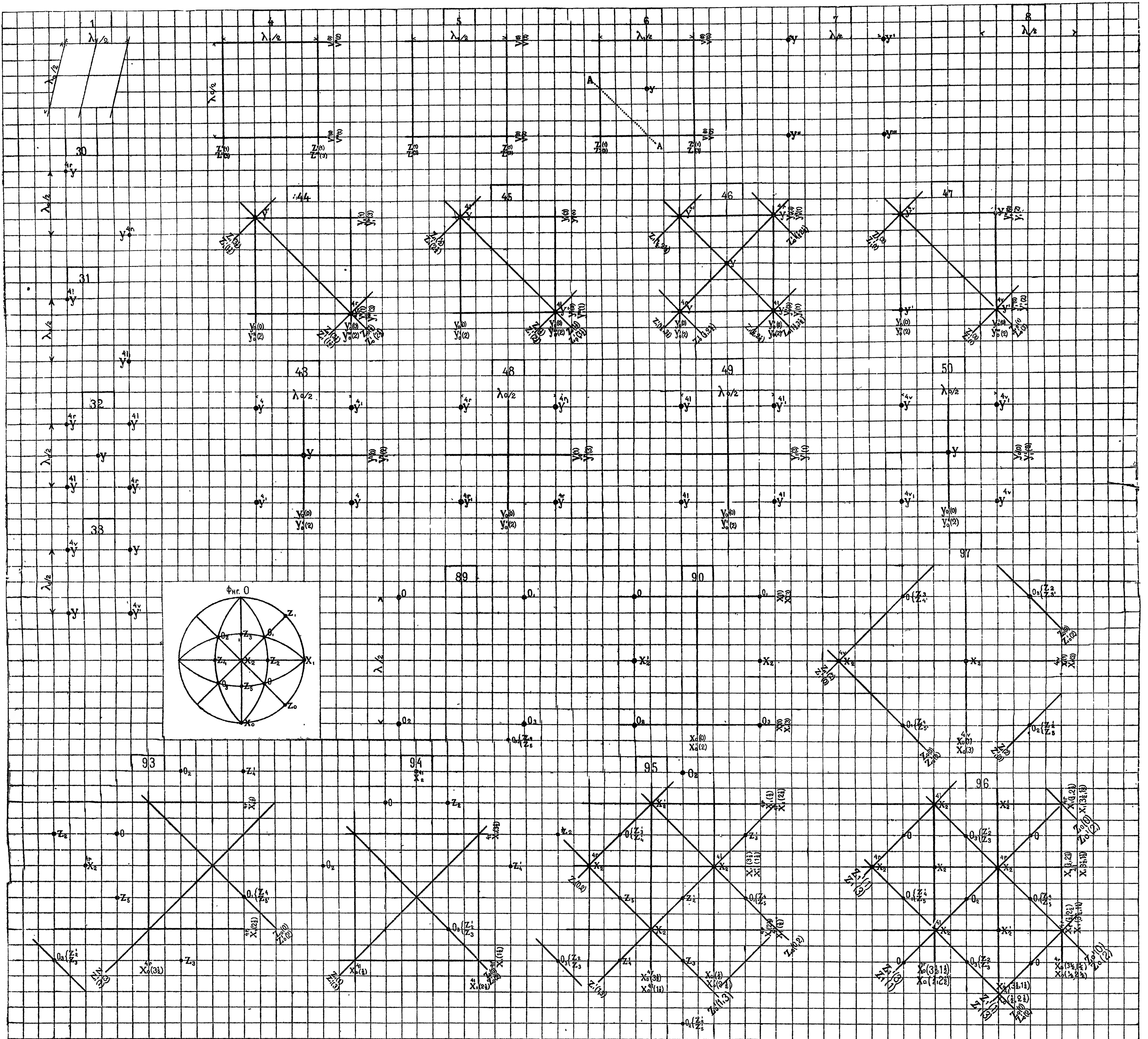





3
4
9
10
11
12
22
23
59
60
61
13
30
14
15
31
68
69
70
16
17


38
39
45
44
54
46
49




1
4
5
6
7
8
30
31
32
33
44
45
46
47
43
48
49
50
89
90
97
Фиг. 0
93
94
95
96

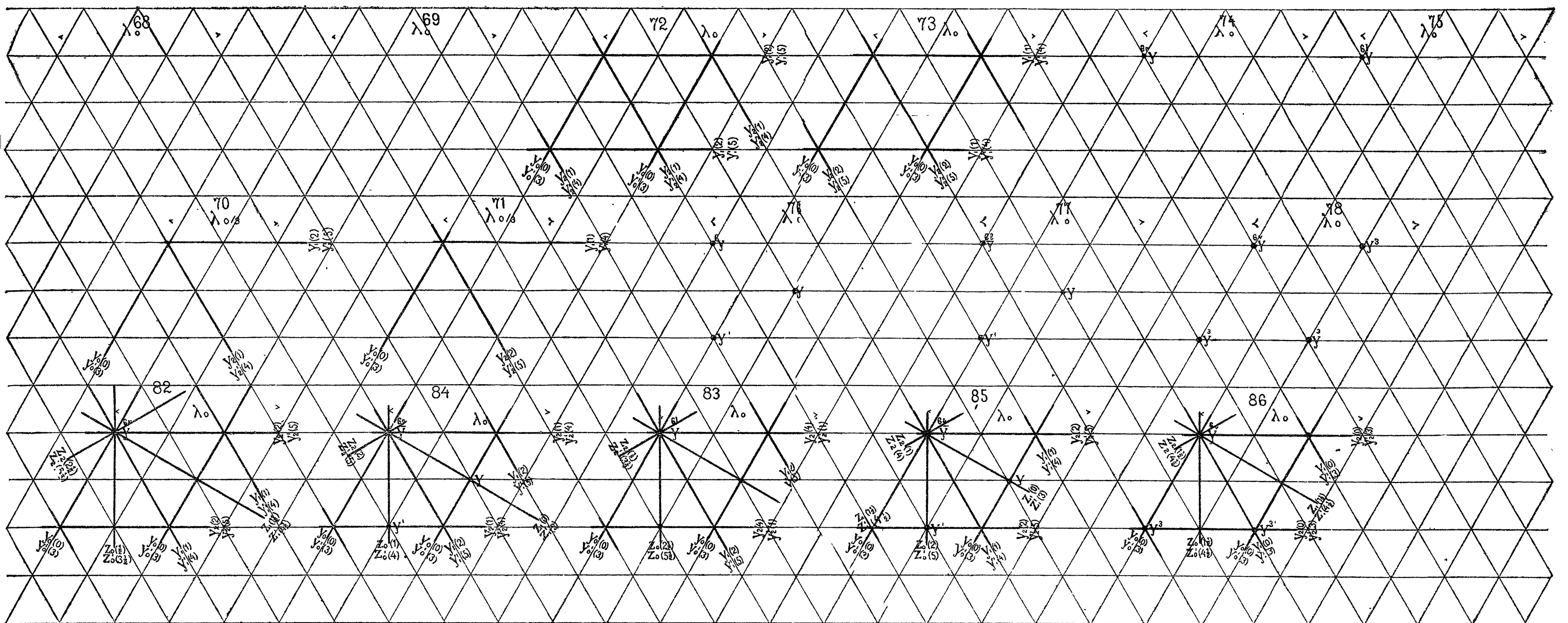

68
69
72
73
74
75
70
71
76
77
78
82
84
83
85
86

Таблица IV

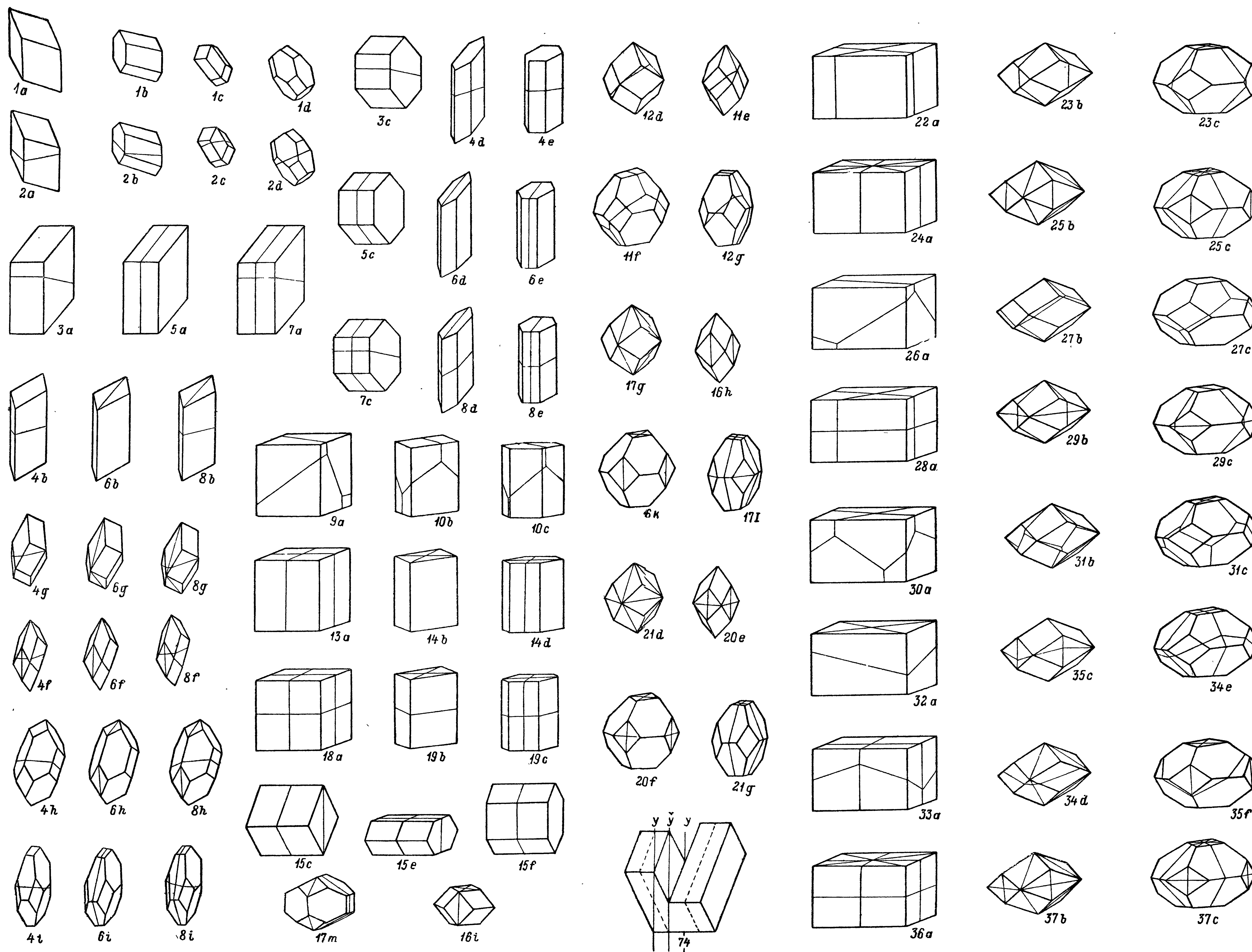
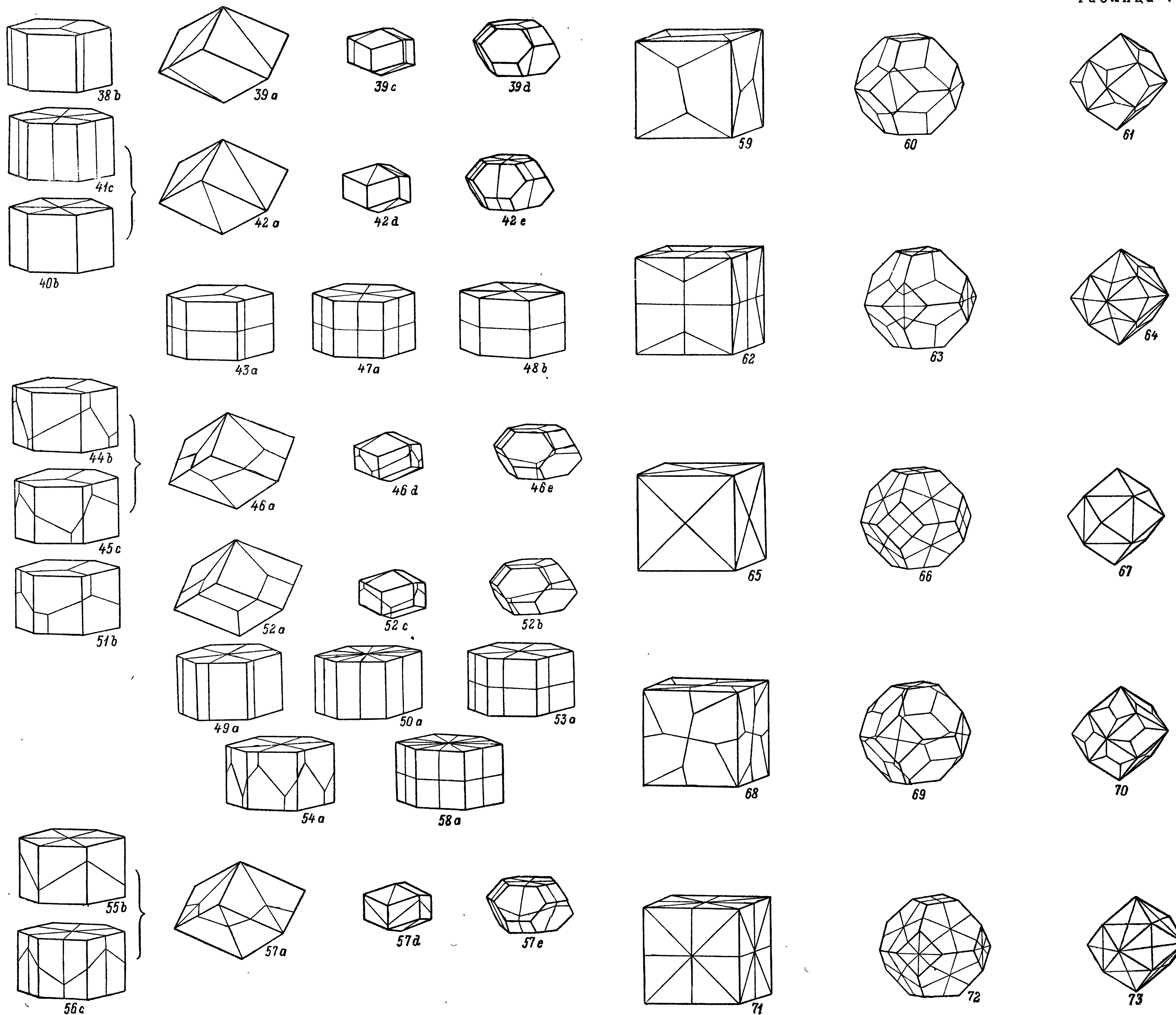

1a
1b
1c
1d
3c
4d
4e
12d
11e
22a
23b
23c
2a
2b
2c
2d
5c
6d
6e
11f
12g
24a
25b
25c
3a
5a
7a
26a
27b
27c
7c
8d
8e
17g
16h
4b
6b
8b
28a
29b
29c
9a
10b
10c
6k
17I
30a
31b
31c
4g
6g
8g
13a
14b
14d
21d
20e
4f
6f
8f
35c
34e
32a
4h
6h
8h
18a
19b
19c
20f
21g
33a
34d
35f
15c
15e
15f
y y̌ y
4i
6i
8i
17m
16i
74
36a
37b
37c

Таблица V



38 b
39 a
39 c
39 d
59
60
61
41c
40b
42 a
42 d
42 e
43 a
47 a
48 b
62
63
64
44 b
45 c
46 a
46 d
46 e
65
66
67
51 b
52 a
52 c
52 b
49 a
50 a
53 a
68
69
70
54 a
58 a
55 b
56 c
57 a
57 d
57 e
71
72
73

СОПОСТАВЛЕНИЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ Г-НА ШЕНФЛИСА С МОИМИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Только что появилась капитальная книга д-ра А. Шенфлиса „Кристаллические системы и кристаллические структуры“, автор которой уже раньше был известен целым рядом статей на ту же тему.[1] Уже с самого начала эти работы привлекли мое внимание, которое еще более усилилось после опубликования статьи о правильных делениях пространства, потому что в этой статье автор решительно встал на тот путь, по которому шел и я в моей научной деятельности. В то же время Шенфлис еще совсем не был знаком с моими, написанными по-русски трудами, в одном из которых, уже задолго до появления статьи Шенфлиса, было изложено ее содержание.[2] Мы продолжали нашу научную деятельность почти независимо друг от друга, и вот теперь, когда мы оба опубликовали первые результаты этой

---

[1] Ueber Gruppen von Bewegungen. Mathem. Ann., Bd. 28, S. 319; Bd. 29, S. 50. Ueber reguläre Gebietstheilungen des Raumes. Götting. Nachr., 1888, Nr 9; Beitrag zur Theorie d. Kristallstructur (ebenda, S. 483). Ueber das gegenseitige Verhältniss der Theorien über die Struktur d. Kristalle (ebenda, 1890, Nr 6). Ueber Gruppen von Transformationen des Raumes in sich (Math. Ann., Bd. 34, S. 172).

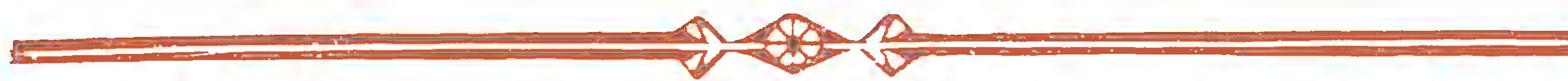
[2] Этому вопросу посвящен четвертый отдел моей книги „Начала учения о фигурах“, которая была закончена уже в 1881 г. В том же году я положил деление пространства в основу новой теории структуры кристаллов (Зап. Мин. общ., т. XVII, стр. 381 и т. XVIII, стр. 281).

деятельности, обнаружилось чрезвычайно удивительное обстоятельство, а именно, такое совпадение в работе двух исследователей, какое быть может никогда еще не наблюдалось в истории науки. Для того, чтобы дать читателям ясное представление о степени совпадения, мне хотелось бы указать на то, что самое существенное, составляющее второй отдел новой книги Шенфлиса (свыше 400 страниц), можно рассматривать как наши совместные выводы, которые в большей своей части до сих пор никем еще не были опубликованы. Совпадение имеется и в содержании первого отдела книги, но заключающиеся в нем выводы были известны уже давно, и их можно рассматривать лишь как подтверждение выводов некоторых более ранних авторов.

Несмотря на чрезвычайное сходство наших выводов, самостоятельность нашей работы явственно обнаруживается в очень большом внешнем различии наших трудов.

Эти совпадения по существу, наряду с второстепенными различиями, побудили меня написать настоящую статью, в которой по возможности кратко и просто будут сопоставлены важнейшие пункты, в которых наши выводы сходятся, а вместе с тем будут изложены и различия между ними. К этому я хочу присовокупить краткий очерк того, что известным образом связано с этими выводами, отчасти это давно уже было опубликовано мною, но не вошло в круг исследований Шенфлиса.

Свою работу я разделил на четыре главы; первые две соответствуют двум отделам книги Шенфлиса; третья посвящена особенно важному для кристаллографии специальному вопросу, которого исследования Шенфлиса коснулись лишь вкратце и мимоходом, а именно вопросу о правильных делениях пространства. В четвертой главе, наконец, я вкратце изложу некоторые применения теории к минералогии.



I. О СИММЕТРИИ

Понятие о симметрии является основным как в исследованиях Шенфлиса, так и в моих собственных. Определение этого основного понятия, данное Шенфлисом, я могу считать тождественным с моим собственным определением: „Существуют фигуры, говорит он на стр. 9, особенностью которых является то, что они различным образом могут быть либо совместимо, либо отраженно равны самим себе. Такие фигуры называются симметричными".

Это основное определение должно привести всякого исследователя, идущего в своих работах строго математически-дедуктивным путем, к определению всех видов симметрии конечных фигур, так же как и всех правильных систем. Вот почему не удивительно, что в нашем случае мы пришли к идентичным результатам. Тем не менее уже в самом начале нашего пути у нас обнаружились некоторые разногласия.

На вопрос, какие элементы симметрии можно вывести из основного определения, я совершенно строго отвечаю, что их существует всего три.

1) Фигура путем вращения вокруг некоторой оси совмещается сама с собою. Это случай *оси симметрии*.

2) Фигуру можно совместить саму с собой посредством отражения в плоскости. Это случай *плоскости симметрии*.

3) Совмещения не удается достигнуть ни путем операции 1), ни путем операции 2), если они берутся в отдельности, но оно наступает при одновременном использовании обеих операций, т. е. когда мы вращаем фигуру вокруг некоторой оси и отражаем ее в плоскости. Это случай *сложной симметрии.*

Соответственную ось и плоскость я называю осью и плоскостью сложной симметрии. Известно, что они должны быть взаимно перпендикулярны.

Подразделение понятия симметрии у Шенфлиса получается более сложным. Кроме осей симметрии, являющихся элементами операций совмещения, или симметрических операций первого рода (по моей терминологии симметрии совмещения), Шенфлис объединяет все остальные элементы в понятии симметрических операций второго рода (прямая симметрия, или собственно симметрия). В качестве подразделений последнего у него фигурируют следующие простые типы: а) инверсия, в) зеркальное отражение и с) совмещение с отражением.

Создавая это более сложное представление, Шенфлис руководствовался практическими соображениями, а именно: „С одной стороны эти операции, если мы будем иметь в виду их наглядность, гораздо проще, чем зеркально-поворотная симметрия, с другой же стороны, и это самое главное, мы в большинстве случаев вполне можем обойтись при помощи зеркального отражения и инверсии“ (стр. 30).

Должен заметить по этому поводу, что при этом определении вовсе не следовало бы говорить „в большинстве случаев“. Иногда достаточно одного случая, чтобы доказать недостаточность любых основных определений. Именно такой случай имел место по отношению к основным определениям Браве, с помощью которых удалось вывести 31 из возможных видов симметрии кристаллов, в то же время один случай вовсе не выводился из этих определений. Совершенно прав был Шенфлис, заметивший по этому поводу, что „исходная

точка его (Браве) рассуждений носит еще эмпирический характер" (стр. 18).

Я не могу рассматривать „инверсионный центр" как отдельный элемент симметрии, это весьма старое понятие теснейшим образом связано с геометрической теорией подобия и относится к крайнему случаю инверсионного подобия, при котором коэффициент пропорциональности равен 1.

Вот почему я счел возможным связать с *центром симметрии* другое понятие, а именно точку пересечения всех элементов симметрии данной фигуры. Центр симметрии Браве с этой точки зрения представляет собой лишь частный случай (точку пересечения двойных осей и плоскостей сложной симметрии).

Понятие зеркально-поворотной симметрии и ей соответствующей оси симметрии второго рода (называемой также *смешанной симметрией*, стр. 43) в точности соответствуют моей сложной симметрии.[1] Однако особенное предпочтение, которое при этом оказывается оси по сравнению с плоскостью, по-моему, ничем не оправдывается. Мои более ранние обозначения оси и плоскости сложной симметрии в этом смысле безупречны. Применяемое Шенфлисом обозначение „смешанная симметрия" мне представляется неправильным, потому что оно указывает скорее на соединение оси симметрии с плоскостью симметрии, т. е. как раз на противоположное тому, что это слово должно выразить.

Кроме вышеназванных элементов симметрии конечных фигур, следует различать еще элементы симметрии правильных систем (т. е. пространственных групп), и здесь мы

---

[1] Шенфлис неправ, когда он писал о сложной симметрии: „Гадолин и Федоров говорили о сфеноидальной симметрии". Гадолин еще ничего не знал о сложной симметрии, а связывал с вышеупомянутым словом только один частный случай. Что же касается меня, то я начиная с 1889 г. говорил не „сфеноидальная симметрия", а „сложн

опять вполне сходимся. Системы обладают еще следующими элементами симметрии: а) *винтовыми осями* (этот элемент симметрии был введен еще Зонке); б) *плоскостями скользящего отражения* или *плоскостями скользящей симметрии* (например стр. 404). Под этим словом мы понимаем такой элемент симметрии, который состоит одновременно из плоскости симметрии и трансляции, параллельной этой плоскости.

Каждый возможный вид симметрии представляет собою лишь комбинацию элементов симметрии, и ближайшей задачей учения о симметрии является полный вывод всех этих комбинаций.

Но большинство авторов, в том числе и Шенфлис, шло другим путем. Они с самого начала ограничивают эту общую, хотя и весьма простую, задачу эмпирическим законом, законом рациональных индексов. Тем самым они исследуют лишь те виды симметрии, которые свойственны формам, удовлетворяющим этому закону; таковы возможные виды симметрии в кристаллографии.

Гессель, а позднее и я (независимо от Гесселя, потому что я лишь недавно получил удовольствие познакомиться с его работами и заняться их изучением) пошли другим, а именно следующим путем: сначала мы занялись общим выводом всех вообще существующих видов симметрии конечных пространственных фигур и лишь в дальнейшем, посредством привлечения специального закона („Gerengesetz“ Гесселя) или исследования главных свойств правильных систем, пришли к тому же ограничению.[1]

Благодаря этому методу достигаются различные упрощения и обобщения, а именно: а) достигнута возможность дать общую и простую номенклатуру всех вообще видов симметрии. Если я, например, говорю „бипирамидальная

---

[1] В кратком недавно вышедшем руководстве по кристаллографии сам автор следовал этому пути

гемиэдрия", то я при этом понимаю комбинацию четной оси симметрии с перпендикулярной ей плоскостью симметрии, а под „трапецоэдрической" гемиэдрией я понимаю комбинацию четной оси, например, $2p$-значной симметрии, с $2p$ перпендикулярными к ней двойными осями симметрии, образующими между собой угол $\pi / 2p$, при любой величине числа p.

б) При этом становятся невозможными лишенные всякого общего смысла обозначения, как, например, „квадратная" система, которые встречаются даже еще у Гадолина. Так же, как и гораздо раньше Гессель, я пришел к „гексагональной", „тетрагональной", а также и „дигональной" системе, о которой, кроме нас, никто не упоминает лишь потому, что никто в этом вопросе не становился на общую точку зрения.

в) Под словом „дигональная система" объединяются в одно целое прежние ромбическая, моноклинная и триклинная системы, с таким же правом, с каким к тетрагональной системе причисляются все ее семь подразделений. Каждое подразделение трех выше перечисленных систем является также подразделением дигональной системы, являющейся аналогичной любой из систем, образующих бесконечный ряд. Например, бипирамидальной гемиэдрии общей системы соответствует голоэдрия моноклинной системы, потому что в бипирамидальной гемиэдрии мы имеем комбинацию оси симметрии второго порядка и перпендикулярной к ней плоскости симметрии. Также трапецоэдрическая гемиэдрия дигональной системы есть не что иное, как гемиэдрия ромбической системы, ибо здесь мы имеем комбинацию оси двойной симметрии с двумя перпендикулярными к ней тоже двойными осями симметрии.

Наконец, д) название „правильная" система является невозможным потому, что из общего учения о симметрии нам известны две правильные системы, а именно а) кубооктаэдрическая или тессеральная система и б) додекаэдро-

икосаэдрическая система. Следовательно, говоря о „правильной“ системе, можно понимать под этим две разные вещи. Тем самым это название является двойственным.[1]

Прежде чем перейти к систематическому выводу видов симметрии, надо в достаточной степени усвоить себе два вспомогательных понятия, а именно эквивалентности и самого вида симметрии.

Первое понятие основывается на том факте, что две любые произведенные друг с другом симметрические операции эквивалентны новой операции, т. е. могут быть заменены ею одною. Шенфлис обозначил комбинации различных операций как произведение и на этом основывал сходство симметрических операций.

В простейшем случае, когда действуют только оси симметрии, сложение основывается на известном кинематическом положении Эйлера относительно поворота, являющегося результатом двух данных поворотов. В учении о симметрии исследуются также равнодействующие элементы симметрии, возникающие из двух заданных различных элементов симметрии; поэтому Шенфлис принимает в расчет также различные симметрические операции.[2] Возьмем простейший пример. Если S — зеркальное отражение и U — вращение вокруг двойной оси симметрии, перпендикулярной к плоскости симметрии, а I — инверсия, то (ст. 36)

$$I = SU = US$$

Моя терминология несколько иная. Я просто говорю, что существование любых двух первичных осей симметрии обусловли-

[1] Это замечание было сделано уже в „Началах учения о фигурах“, стр. 129.

[2] В случае осей симметрии сложение элементов симметрии основывается на учении о квадратичных формах Гамильтона. Тем самым понятие сложения во всех других случаях следует рассматривать как развитие и обобщение этого принципа. Но я должен при этом заметить, что Шенфлис употребляет только произведение и степень.

вает существование тех или иных различных равнодействующих осей. симметрии. Например, две пересекающиеся под углом в 45° двойные оси симметрии обусловливают существование группы осей симметрии, которая характеризует трапецоэдрическую гемиэдрию тетрагональной системы и между прочим существование четверной оси симметрии, перпендикулярной к обеим первичным осям симметрии. Вполне аналогичным образом я говорю о равнодействующих плоскостях симметрии или об оси и плоскости сложной симметрии. Теперь перейдем к другому понятию: вида симметрии. Шенфлис называет это группой. Под этим он разумеет конечный ряд неэквивалентных операций, обладающих тем особенным свойством, что произведение любых двух из них всегда эквивалентно какой-либо операции этого ряда (стр. 54). С этим определением я не согласен только лишь потому, что считаю излишним слово „конечный", так как виды симметрии конуса и шара представляют собою как раз бесконечный ряд таких операций.[2] Правда, определение Шенфлиса охватывает все 32 кристаллографических вида симметрии. Ограничившись этими предварительными замечаниями, я теперь перейду к изложению результатов. Эти результаты надо теперь считать окончательными ввиду того, что разные исследователи, применявшие различные методы исследования, всегда приходили к одним и тем же результатам, при условии, если в их исследованиях не было ошибок. Все вообще возможные виды симметрии конечных фигур были выведены:

Гесселем	в 1829 г.
Федоровым	в 1883 г.
Кюри	в 1884 г.

При этом все три автора пришли к тождественным ре-

---

1) Начала учения о фигурах, §§ 45 и 54.

зультатам. [1] Одни только кристаллографические виды симметрии были выведены полностью и безошибочно:

Гадолиным	в 1867 т.
Миннигероде	в 1887 г.
Шенфлисом	в 1891 г.

Кроме того, еще и другие авторы получали не вполне верные и полные результаты; к ним относятся Браве и Мебиус.

Таким образом, вывод 32 определенных видов симметрии в кристаллографии следует считать установленным с такой же степенью достоверности, как и всякую вообще математическую дедукцию. Остается сказать еще несколько слов по поводу способов обозначения. Различные авторы предложили также различные методы обозначения выведенных видов симметрии. Наиболее распространенным (по крайней мере у французских авторов) является метод Браве.

Но так как Браве, с одной стороны, пренебрег одним из элементов симметрии (сложной симметрией), с другой же стороны принял существование излишнего вида симметрии, то его метод приходится считать недостаточным. К тому же его обозначения как символы слишком сложны. Символы Гесселя свободны от этих недостатков, но, пожалуй, не так наглядны. Символы Шенфлиса, во всяком случае, самые простые.

Однако, помимо символов, виды симметрии можно выразить и посредством алгебраических уравнений. Впервые на это было указано в моей работе „Симметрия конечных фигур". Однако это оказалось возможным лишь после того,

[1] Кюри упоминает еще один вид симметрии, не данный другими: 1 сферический тип, 1° тип без симметрии, ∞L^{∞}. Пример: сфера, наполненная жидкостью, обладающая вращательной способностью (Bull. de la Soc. min. de Fr., t. 7, 443). Но с этим я не согласен.

как самое понятие координат в аналитической геометрии подверглось обобщению.

Особенные преимущества алгебраических уравнений по сравнению с условными символами, думается мне, мало-помалу станут ясными и для читателей, даже если они не поймут этого сразу. Мне придется начать с некоторых деталей элементарных алгебраических соображений, потому что эти детали в дальнейшем окажутся необходимыми для понимания наших рассуждений.

Элементарная алгебра учит нас, что система n линейных уравнений с n неизвестными приводит к совершенно определенному решению. Этого решения можно достигнуть различными путями, между прочим n уравнений можно свести сначала к трем с тремя неизвестными. Окончательное решение будет тем самым независимо от того, какой бы метод мы ни избрали. Следовательно и смысл полученного решения всегда один и тот же и не зависит от метода.

С точки зрения геометрической интерпретации мы легко найдем, что три неизвестных обозначают три координаты какой-либо точки в пространстве и что уравнения выражают условия, которым должны удовлетворять величины координат. Таким образом, с геометрической точки зрения три линейных уравнения с тремя неизвестными следует рассматривать как уравнения определенной точки. Но так как смысл решения должен остаться неизвестным, если мы эти три редуцированных уравнения заменим первоначальными n уравнениями, то ясно, что и n линейных уравнений с n неизвестными можно рассматривать как уравнения какой-либо точки.

Но именно с последним случаем мы имеем дело в учении о симметрии. Пусть дана p-значная ось симметрии; если мы возьмем эту ось y и перпендикулярную ей прямую y_0 за координатные оси, то получим после поворота прямой y_0 вокруг оси симметрии $\left(\text{на элементарный угол } \frac{2\pi}{p}\right)$ новое

положение y_1. Но так как, согласно определению оси симметрии, при этом повороте ничего не изменяется, то y_1 следует также рассматривать как координатную ось. Таким образом мы получим целый ряд осей y_0, y_1, $y_2, \ldots$, которые должны быть приняты за координатные оси. Число их теперь равно p (кроме самой оси симметрии). Каждая точка определяется теперь $p+1$ уравнением с $p+1$ неизвестным.

С другой стороны, если y является p-значной осью симметрии, то некоторая точка допускает возможность образования группы точек, лежащих на одной и той же окружности, через центр которой проходит ось симметрии y. Совокупность этих точек можно очень просто выразить посредством уравнений

$$y=b; \quad y_0=\overset{p}{b}_s; \quad y_1=\overset{p}{b}_{s+1} \qquad \text{(A)}$$

где b и b_s являются соответственными координатами данной точки по осям y и y_s.

Вышеприведенные буквы должны также напоминать, что s и p могут принимать различные значения: 0, 1, 2, ..., $p-1$.

Уравнения (A) следует рассматривать как уравнения p-значной оси симметрии, так как они из одной заданной точки позволяют вывести как раз ту самую точку из p точек, которые выводятся и с помощью оси y, являющейся p-значной осью симметрии.

Обычная прямоугольная система координат не дает возможности задать величины координат в любом количестве.

Эта возможность получается с помощью следующего простого построения.

Из некоторой точки, принимаемой за начало координат, проводим любое число p координатных осей и перпендикулярно к каждой из них строим плоскости, проходящие через ту точку, координаты которой определяются. Отсекаемые этими плоскостями величины отрезков на коорди-

натных осях и являются соответственными величинами координат определяемой точки.

Ко всему этому следует еще добавить, что если даны координаты точек (b_0, b_1, b_2), то можно легко получить величины координат b_s при помощи формулы:

$$b_s \operatorname{Sn}(y_0y_1y_2) = b_0 \operatorname{Sn}(y_sy_1y_2) + b_1 \operatorname{Sn}(y_0y_sy_2) + b_2 \operatorname{Sn}(y_0y_1y_s) \tag{B}$$

где Sn является функцией синуса телесного угла.[1]

Так, например (если мы нормали к плоскостям y_1y_2, y_2y_0, y_0y_1 обозначим через n_0, n_1, n_2),

$$\operatorname{Sn}(y_0y_1y_2) = \operatorname{Sn}(y_0y_1)\cdot \operatorname{cs}(n_2y_2) = \ldots =$$
$$= \operatorname{Sn}(y_1y_2) \operatorname{Sn}(y_2y_0) \operatorname{Sn}(n_0n_1) = \ldots$$

В особом случае (который, кстати, часто встречается), когда оси координат лежат в плоскости, перпендикулярной p-значной оси симметрии, можно применить гораздо более простую формулу:

$$b_s \operatorname{sn} \alpha = - b_0 \operatorname{sn}(s-1)\alpha + b_1 \operatorname{sn} s\alpha, \tag{C}$$

где b_0 и b_1 — две данные координаты точек, а $\alpha = \frac{2\pi}{p}$.

Думаю, что приведенных объяснений достаточно для того, чтобы читателю стали понятны уравнения видов симметрии, помещенные в нижеследующей таблице. Этими новыми уравнениями можно оперировать так, как и обычными уравнениями аналитической геометрии. Тем самым они открывают дорогу для дальнейших исследований.

Я ограничиваюсь лишь тем, что дает ясное представление читателю о видах симметрии. Что касается терминоло-

---

[1] Штаудт назвал эту функцию „синусом трехстороннего пространственного угла“, но это неверно, потому что, как я уже показал, синус, как вполне определенная функция имеет совсем другое значение. См. например, мои „Этюды по аналитической кристаллографии“, этюд второй (Горн. журн., 1886).

гии, то я пытался достигнуть наибольшей универсальности, внося, по возможности, наименьшее количество изменений в ранее существовавшие обозначения.

I. Таблица кристаллографических видов симметрии

№	Символ Гесселя	Название	Символ фигуры	Аналитическое выражение[1])	Символ Шенфлиса
		I. Триклинная система			
1	1^1u^1	Гемиэдрия[2]) $S=1$	$(m\,n\,r)$	$y=b;\ z=c;\ v=d$	C_1
2	1^1g^1	Голоэдрия $S=1+1$	$(m\,n\,r)$	$y=n^kb;\ z=n^kc$ $v=n^kd$	S_2
		II. Моноклинная система			
3	1^1u^2	Гемиморфия $S=2$	$(\underline{m}\,n\,\underline{r})$	$y=n^kb;\ z=c_2$ $v=u^kd$	C_2
4	1^1G^1	Гемиэдрия $S=1+1$	$(m\,n\,r)$	$y=b;\ z=n^kc$ $v=d$	S
5	1^1G^2	Голоэдрия $S=2+2$	$(\underline{m}\,n\,\underline{r})$	$y=n^kb;\ z=b^jc$ $v=n^kd$	C_2^h
		III. Ромбическая система			
6	$1^1\varepsilon^2$	Гемиэдрия $S=4$	$(\underline{m}\,\underline{n}\,\underline{r})$	$y=n^jb;\ z=n^{k+j}c$ $v=n^kd$	V
7	1^2u^2	Гемиморфия $S=2+2$	$(m\,n\,r)$	$y=b;\ z=n^kc$ $v=n^jd$	C_2^v
8	1^2G^2	Голоэдрия $S=4+4$	$(m\,n\,r)$	$v=n^jb;\ z=n^kc$ $v=n^ld$	V^h

[1]) В уравнениях n обозначает —1 (отрицательную единицу), а параметры j, k, l, m одно из чисел, 0 или 1.

[2]) Обозначения подразделений систем I, II, III взяты мною из труда А. В. Гадолина (Зап. Мин. общ., 4, 112).

№	Символ Гесселя	Название	Символ фигуры	Аналитическое выражение	Символ Шенфлиса
		IV. Тетрагональная система			
9	1^1u^4	Пирамидальная гемиморфия	$(m'n'r')_2$	$y=b$	C_4
		$S=4$		$y_0=\overset{4}{b}_s;\ y_1=\overset{4}{b}_{s+1}$	
10	1^2u^4	Гемиморфия	$(\underline{m}\,\underline{n}\,r)_2$	$y=b$	C_4^v
		$S=4+4$		$y_0=\overset{4}{b}_s.\ y_1=\overset{4}{b}_{s+n^k}$	
11	1^1g^2	Тетартоэдрия	$(m\,n\,r')_2$	$y=n^s b$	$S_4=\overline{C}_4$
		$S=2+2$		$y_0=\overset{4}{b}_s;\ y_1=\overset{4}{b}_{s+1}$	
12	1^1G^4	Бипирамидальная [1] гемиэдрия	$(m'\,n'\,r)_2$	$y=n^k b$	C_4^h
		$S=4+4$		$y_0=\overset{4}{b}_s;\ y_1=\overset{4}{b}_{s+1}$	
13	$1^1\varepsilon^4$	Трапецоэдрическая гемиэдрия	$(m'\,n'\,\underline{r})_2$	$y=n^k b$	D_4
		$S=8$		$y_0=\overset{4}{b}_s;\ y_1=\overset{4}{b}_{s+n^k}$	
14	1^2g^2	Скаленоэдрическая гемиэдрия	$(\underline{m\,n\,r})_2$	$y=n^{s+k}b$	$S_4^u=V^d$
		$S=4+4$		$y_0=\overset{4}{b}_s.\ y_1=\overset{4}{b}_{s+n^k}$	
15	1^2G^4	Голоэдрия	$(\underline{m}\,\underline{n}\,r)_2$	$y=n^{k+l}b$	D_4^h
		$S=8+8$		$y_0=\overset{4}{b}_s;\ y_1=\overset{4}{b}_{s+n^k}$	
		V. Гексагональная система			
16	1^1u^3	Пирамидальная тетартоморфия	$(m\,n\,r)_3$	$y=b$	C_3
		$S=3$		$y_0=\overset{3}{b}_s;\ y_1=\overset{3}{b}_{s+1}$	
17	1^2u^3	Тетартоморфия	$(\underline{m\,n\,r})_3$	$y=b$	C_3^v
		$S=3+3$		$y_0=\overset{3}{b}_s;\ y_1=\overset{3}{b}_{s+n^k}$	

[1] Обозначение по Науманну „пирамидальная" по-моему следовало изменить, так как а) относящиеся сюда формулы являются не „пирамидами", а „бипирамидами" и б) так как следует подчеркнуть отличие этих фигур от фигур подразделения 9 (пирамид).

№	Символ Гесселя	Название	Символ фигуры	Аналитическое выражение	Символ Шенфлиса
18	1^1G^3	Бипирамидальная тетартоэдрия $S=3+3$	$\{m\ n\ r\}_3$	$y=n^k b$ $y_0=\overset{3}{b}_s;\ y_1=\overset{3}{b}_{s+1}$	C_3^h
19	$1^1\varepsilon^3$	Трапецоэдрическая тетартоэдрия $S=6$	$(m'\ n',\ r')_3$	$y=n^k b$ $y_0=\overset{3}{b}_s;\ y_1=\overset{3}{b}_{s+n^k}$	D_3
20	1^2G^3	Гемиэдрия $S=6+6$	$\{\underline{m\ n\ r}\}$	$y=n^{k+l} b$ $y_0=\overset{3}{b}_s;\ y_1=\overset{3}{b}_{s+n^k}$	D_3^h
21	1^1u^6	Пирамидальная гемиморфия $S=6$	$\pm(m\ n\ r)_3$	$y=b$ $y_0=\overset{6}{b}_s;\ y_1=\overset{6}{b}_{s+1}$	C_6
22	1^2u^6	Гемиморфия $S=6+6$	$\pm(\underline{m\ n\ r})_3$	$y=b$ $y_0=\overset{6}{b}_s;\ y_1=\overset{6}{b}_{s+n^k}$	C_6^v
23	1^1g^3	Ромбоэдрическая тетартоэдрия $S=3+3$	$\mid m\ n\ r\mid_3$	$y=n^s b$ $y_0=\overset{6}{b}_s;\ y_1=\overset{6}{b}_{s+1}$	$S_6=C_3^i$
24	1^1G^6	Бипирамидальная гемиэдрия $S=6+6$	$\pm\mid m\ n\ r\mid_3$	$y=n^k b$ $y_0=\overset{6}{b}_s;\ y_1=\overset{6}{b}_{s+1}$	C_6^h
25	$1^1\varepsilon^6$	Трапецоэдрическая гемиэдрия $S=12$	$\pm(m'\ n'\ r')_3$	$y=n^k b$ $y_0=\overset{6}{b}_s;\ y_1=\overset{6}{b}_{s+n}\ k$	D_6
26	1^2g^3	Скаленоэдрическая гемиэдрия $S=6+6$	$\mid\underline{m\ n\ r}\mid_3$	$y=n^{s+k}\ b$ $y_0=\overset{6}{b}_s;\ y_1=\overset{6}{b}_{s+nk}$	$S_6^u=D_3^d$
27	1^2G^6	Голоэдрия $S=12+12$	$\pm\mid\underline{m\ n\ r}\mid_3$	$y=n^{k+l}\ b$ $y_0=\overset{6}{b}_s;\ y_1=\overset{6}{b}_{s+n}\ k$	D_6^h

№	Символ Гесселя	Название	Символ фигуры	Аналитическое выражение	Символ Шенфлиса
		VI. Тессеральная система			
28	$4^1 u^3$	Тетартоэдрия	$(m\,n\,r)_4$	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1}$	T
		$S = 12$		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2}$	
29	$4^1 g^3$	Додекаэдрическая гемиэдрия	$(\underline{m}\,\underline{n}\,\underline{r})_4$	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1}$	T^h
		$S = 12 + 12$		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2}$	
30	$4^2 u^3$	Тетраэдрическая гемиэдрия	$(\underline{m}\,\underline{n}\,\underline{r})_4$	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n^l}$	T^d
		$S = 12 + 12$		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2n^l}$	
31	$4^1 \varepsilon^3$	Гироэдрическая гемиэдрия	$(m'\,n'\,r')_4$	$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a}_s$	
				$x_1 = n^{k+l} \overset{3}{a}_{s+n^l}$	O
		$S = 24$		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n^l}$	
32	$4^2 g^3$	Голоэдрия	$(\underline{m}\,\underline{n}\,\underline{r})_4$	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s$	
		$S = 24 + 24$		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n^m}$	O^h
				$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n^m}$	

К этой таблице я должен добавить следующее:

1) Символы Гесселя взяты из его труда „О некоторых свойствах пространственных образований“, Марбург, 1852; там же находим достаточно подробное объяснение значения этих символов.

2) Символы фигуры взяты из моей статьи „Попытка выразить кратким знаком символы всех разных направлений данного подразделения системы симметрии“ (Зап. Мин. общ. 1886, 23). Здесь находится полное объяснение этих символов, которые содержат небольшие изменения символов Миллера и включают в себя все возможные изменения.

3) S — означает величину симметрии, состоящую из S_1 — величины симметрии совмещения и S_2 — величины прямой симметрии, S_1 не меньше единицы, S_2 равно 0 или S_1.

Теперь я хочу привести некоторые примеры анализа уравнений, находящихся в пятом столбце.

Уравнения № 1 выражают одну единственную точку, причем наличие одной заданной точки не может привести ни к какой другой. Это, очевидно, случай отсутствия симметрии.

Уравнения № 2 приводят от одной заданной точки к группе двух точек, а именно: при $k=0$ имеем точку $y=b$, $z=c$, $v=d$, или проще (b, c, d), при $k=1$ имеем точку $(-b, -c, -d)$.

Как видно, это случай двойной оси сложной симметрии (инверсия).

Уравнения № 3 приводят к группе из двух точек: при $k=0$ (b, c, d), при $k=1$ $(-b, c, -d)$. В этом случае z является двойной осью симметрии.

Уравнения № 4 дают две точки: при $k=0$ (b, c, d); при $k=1$ $(b, -c, d)$. В этом случае, следовательно, существует плоскость симметрии, перпендикулярная оси z.

Уравнения № 5 дают четыре точки:

$$(b, c, d), \quad (-b, c, -d), \quad (b, -c, d), \quad (-b, -c, -d)$$

В этом случае имеем, следовательно, комбинацию двойной оси симметрии z и перпендикулярной ей плоскости симметрии.

Уравнения № 6 дают четыре точки

$$(b, c, d), \quad (-b, c, -d), \quad (b, -c, -d), \quad (-b, -c, d)$$

В этом случае мы имеем комбинацию трех взаимно-перпендикулярных двойных осей симметрии y, z и v.

Уравнения № 7 дают четыре точки:

$$(b, c, d), \quad (b, -c, d), \quad (b, c, -d), \quad (b, -c, -d)$$

В этом случае две взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии пересекаются вдоль одной двойной оси симметрии y.

Уравнения № 8 дают восемь точек:

$$(b, c, d),\ (-b, c, d),\ (b, -c, d),\ (b, c, -d),\ (b, -c, -d)$$
$$(-b, c, -d),\ (-b, -c, d),\ (-b, -c, -d)$$

В этом случае пересекаются три взаимно-перпендикулярные плоскости симметрии в лежащих под прямыми углами двойных осях симметрии y, z и v.

Уравнения № 9 представляют частный случай вышеприведенных уравнений (А). Таким образом они дают четыре точки:

$$(b, b_0, b_1),\ (b, b_1, b_2),\ (b, b_2, b_3),\ (b, b_3, b_0)$$

Вместе с тем они указывают на присутствие четверной оси y.

Уравнение № 10 дают восемь точек:

$$(b, b_0, b_1),\ (b, b_1, b_2),\ (b, b_2, b_3),\ (b, b_3, b_0) \text{ и } (b, b_0, b_3),\ (b, b_1, b_0),$$
$$(b, b_2, b_1),\ (b, b_3, b_2)$$

(четыре последних при $k = 1$). В этом случае четыре плоскости симметрии пересекаются в четверной оси y.

Уравнения № 11 снова дают четыре точки:

$$(b, b_0, b_1),\ (-b, b_1, b_2),\ (b, b_2, b_3),\ (-b, b_3, b_0)$$

В этом случае мы имеем комбинацию четверной оси y и плоскости сложной симметрии.

Приведенных примеров достаточно, чтобы читатель получил ясное представление относительно приведенных уравнений.

Быть может следует остановиться на случае № 28. В этом случае из одной заданной точки выводится двенадцать точек. При ($s = j = k = 0$) мы имеем заданную точку (a_0, a_1, a_2); если придать параметру j значение 1 и 2, то получим еще две точки (a_1, a_2, a_0) и (a_2, a_0, a_1). Параметр s, следовательно, указывает на тройную (тригональную, октаэдрическую) ось симметрии. Параметры j и k, как видно из примера № 6, выражают двойные оси симметрии x_1 и x_0.

II. ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФИГУР

Оставляя в стороне исторический ход развития идей о структуре кристаллов,[1] я ограничусь лишь замечанием, что этот ход развития привел всех авторов, занимавшихся данным вопросом, к убеждению, согласно которому система возможных видов структур теснейшим образом связана с вопросом о правильной системе точек. Поэтому-то полное решение последнего вопроса оказалось неизбежно назревшей потребностью нашего времени. Лишь когда этот вопрос был вполне разрешен, оказалось возможным начать изучение истинной структуры ряда кристаллов. Ознакомившись со всеми возможными видами структур, мы получили возможность сделать из этого законченного материала новый ряд выводов.

В основе всякой математической теории должно лежать строго определенное и общее определение.

Определение Зонке („Развитие теории структуры кристаллов", стр. 28) гласит: „Правильная система точек—это такая система, в которой пучки прямых, проведенных из любой точки системы ко всем остальным ее точкам, конгруэнтны (совместимо равны) между собой".

В моих „Началах учения о фигурах" (стр. 240), т. е. в 1883 г., я уже указал на то, что это определение противоречит определению правильных систем точек на плоскости, данному самим Зонке. Оно гласит: „Неограниченно протяженную систему точек мы назовем правильной, если исходящие из всех ее точек пучки линий либо все конгруэнтны, либо частично конгруэнтны, частично же симметричны между собой".[2]

---

[1] Достаточно полное историческое введение дано в сочинении Л. Зонке „Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur" (1879).

[2] L. Sohncke. Die regelmässigen ebenen Punktsysteme. (Borhardt's J. für r. und ang. Mathematik, 1874, Bd. 77, S. 48). В новом труде „Симметрия на плоскости", (Зап. Мин. об-ва, ч. 28, 1891, стр. 345—389) я

Необходимость расширить основное определение мало-помалу была признана всеми.

А. Шенфлис дал следующее определение (стр. 239): „Под неограниченно протяженным правильным скоплением молекул мы разумеем скопление молекул, распространяющееся во всех направлениях до бесконечности, состоящее из совершенно однородных молекул и обладающее тем свойством, что каждая молекула одинаковым образом окружена совокупностью всех остальных молекул".

Затем следует параграф, поясняющий смысл этого определения, во избежание двойственного его толкования. При этом особенно подчеркивается равноправность понятий „конгруэнтности" и „зеркального равенства". Это определение совпадает с данным мною:[1]

„Под правильной системой фигур я подразумеваю такую бесконечную во всех направлениях совокупность конечных фигур, что, если мы приведем по законам симметрии в совпадение две из фигур, входящих в состав системы, то совместятся и сами системы". Это определение тотчас же приводит к самому общему понятию о правильных системах точек.[2]

Возьмем любую точку какой-либо фигуры системы и найдем соответственные точки во всех остальных фигурах системы; совокупность полученных таким образом точек будет представлять собою правильную систему точек. При этом я различаю простые системы, когда при выводе их

провел полный вывод всех правильных плоскостных систем и при этом доказал неполноту вывода Зонке.

[1]) Симметрия правильных систем фигур, стр. 10.

[2]) Во многих отношениях выгоднее пользоваться как основой исследования не системой точек, а системой фигур. При этом надлежит представлять себе всякую молекулу в виде фигуры. К этой точке зрения я пришел с 1884 г., когда завершил систематический вывод важнейших правильных систем фигур — параллелоэдров — и сделал ряд различных кристаллографических заключений.

приходится считаться лишь с симметрией совмещения (сюда, следовательно, относятся все системы Зонке), и двойные системы,[1] которые мы можем представить себе как состоящие из двух симметричных друг другу подсистем. Такие подсистемы я называю „аналогичными".

Две аналогичные системы вместе образуют одну правильную, и, следовательно, все элементы симметрии совмещения (оси симметрии и винтовые оси) в них совпадают.

Вывод, что всякая правильная система состоит в общем случае из двух простых, аналогичных, был совершенно определенно высказан и Шенфлисом. На стр. 618 он говорит о расширении теории Зонке, предложенном самим Зонке, следующее:

„Если мы уточним это расширение в том смысле, что примем во внимание две исходные точки построения или две соответственные исходные молекулы в соответственном положении, то мы сможем доказать, что расширенная в этом смысле теория действительно должна привести нас ко всем вообще возможным структурам".

Выяснив таким образом в достаточной мере основные определения, я вкратце хочу изложить также последовательный ряд моих выводов. Прежде всего мной указывается, что „виды симметрии правильных систем представляют собою лишь частные случаи видов симметрии конечных фигур," что „ возможны различные правильные системы,[2] относящиеся к одному и тому же виду симметрии", и что „имеется лишь определенное число S движений совмещения (иначе говоря симметрических операций), которые переводят любое данное направление во все остальные положения. Все ос-

---

1) Начала учения о фигурах, стр. 240; Симметрия правильных систем фигур, стр. 10.

2) При этом было также доказано, что правильные системы можно различать только по элементам симметрии (в широком смысле этого слова, принимая во внимание винтовые оси и плоскости скольжения). В этом согласны все авторы.

тальные операции могут быть выведены из них путем добавления поступаний совмещений."

Сами системы классифицируются по трем группам:

1) „Симморфные" системы характеризуются тем, что их элементарные фигуры принадлежат тому же виду симметрии, как и сами системы.

2) „Гемисимморфные" системы следует рассматривать как две аналогичные симморфные системы, образующие вместе правильную, двойную (не симморфную) систему.

3) Все остальные системы являются „асимморфными".

Из этих определений следует, что всякая фигура симморфной системы обладает точкой, в которой пересекаются все элементы симметрии данной системы.[1] В аналогичной точке фигуры гемисимморфной системы пересекаются лишь элементы симметрии совмещения (т. е. симметрии первого рода). В фигурах асимморфных систем таких точек вовсе нет.

Далее мною доказываются некоторые теоремы, чрезвычайно облегчающие выводы. Сами эти выводы стали возможны лишь благодаря вышеупомянутым теоремам.

Теоремы эти следующие:

1) В правильных системах возможны только двойные, тройные, четверные и шестерные оси симметрии (этой теореме отчасти соответствуют теоремы 8, 9, 10 Зонке).

2) Если существует ось симметрии O, наименования p и поступание совмещения l, то существует также равнодействующая и параллельная ей ось O' того же наименования, занимающая такое положение, что она одинаково отстоит от оси O в ее данном положении и в том положении 1, которое та же ось O займет после поступания совмещения; притом плоскости, проходящие через ось O' и оси O и 1, образуют около O' внутренний угол $2\pi/p$.

---

[1] В узком смысле этого слова, т. е. элементы симметрии конечных фигур.

Эта важная теорема, которую аналогичным образом можно применить и к винтовым осям и к осям сложной симметрии, дает возможность непосредственно находить равнодействующие оси.

(Соответствующие теоремы у Зонке — разумеется лишь для осей симметрии и винтовых осей — находятся под №№ 1—6).

3) Оси симметрии и винтовые оси обязательно совпадают с направлениями поступаний совмещения системы.

(Соответствующие теоремы у Зонке 46—47).

4) Плоскости, перпендикулярные к осям симметрии и винтовым осям, всегда представляют собою плоскости возможных поступаний совмещений.

5) Если существует плоскость симметрии и перпендикулярное к ней поступание совмещения λ, то существует и равнодействующая плоскость симметрии, параллельная первоначальной и находящаяся от нее на расстоянии $\lambda/2$.

6) Плоскости симметрии всегда являются плоскостями поступаний совмещения, а перпендикулярные к ним прямые — направлениями поступаний совмещения.

7) Если направление оси симметрии или винтовой оси не сопряжено с перпендикулярной к ней плоскостью,[1] то слагающая поступания, имеющего сопряженное направление на этой оси, равна половине элементарного поступания на той же оси, если эта ось четного наименования, и одной трети той же величины, если эта ось тройная.

Наконец, 9) Если две аналогичные системы S и S' обладают лежащей в плоскости симметрии винтовой осью с наименьшей компонентой поступания l, то поступание одной системы, например S', в направлении оси приводит к тому же результату, который получился бы, если бы мы создали

---

[1] Под направлением „сопряженным" с заданной плоскостью я подразумеваю направление наименьшего поступания, не параллельного плоскости. Это определение взято из известного труда Браве.

новую систему S, аналогичную и симметричную системе S''. При этом новое положение плоскости симметрии образовало бы с первоначальным угол π/p.

Для частного случая двойной винтовой оси эта же теорема формулируется в виде теоремы 8.

Приведенных теорем вполне достаточно для систематического вывода систем.

Путь Шенфлиса несколько длиннее.

Одно за другим он доказывает различные общие положения о правильных рядах точек, плоских сетках и пространственных решетках. Сначала им даются теоремы о группах трансляций, а затем об операциях, которые не являются трансляциями.

Второй темой служит симметрия. Трактовка ее совпадает с трактовкой Браве. Как на исключение следует указать на то, что у Шенфлиса „три сопряженных ряда" заменены „примитивным тройником". Многие теоремы совпадают и с моими, и я здесь хочу особенно подчеркнуть теоремы третьей главы.

I. Если какая-либо плоская сетка или пространственная решетка, благодаря какой-либо операции, но не трансляции, совмещается сама с собой, то существуют также такие операции совмещения сетки или решетки, которые одну из их точек оставляют неизменной.

II. Каждая правильная плоская сетка путем инверсии в одной из своих точек совмещается сама с собой.

III. Каждая сетка допускает поворот на 180° вокруг проходящей через O[1] перпендикулярной к плоскости сетки двойной оси.

IV. Оси симметрии плоской сетки, стоящие перпендикулярно к плоскости сетки, являются либо двойными, либо четверными, либо шестерными.

---

[1] O — точка, положение которой при операции совмещения сохраняется неизменным.

V. В общем существует четыре различных типа плоских сеток с особой симметрией, а именно: ромбическая сетка, прямоугольная сетка, квадратная и правильная, или равносторонняя, сетка. (Под „правильной“ сеткой Шенфлис разумеет сетку, элементом которой является равносторонний треугольник).

VI. Всякая пространственная решетка путем инверсии в одной из своих точек совмещается сама с собой.

VII. Всякая ось симметрии, проходящая через точку O пространственной решетки, приходится для каждого содержащего точку O примитивного параллелепипеда на одно из его ребер, диагоналей граней или телесных диагоналей.

VIII. Каждая ось симметрии пространственной решетки имеет направление одной из трансляций, принадлежащих решетке.

IX. Каждая плоскость симметрии пространственной решетки имеет направление одной из плоских сеток решетки.

X. Оси симметрии пространственной решетки бывают только двойными, тройными, четверными или шестерными.

XI. Относительно каждой оси симметрии пространственной решетки имеются плоские сетки, перпендикулярные к оси.

После вывода, опять-таки в согласии с Браве, всех видов пространственных решеток, принадлежащих одному типу симметрии, Шенфлис переходит в IV главе к специальному изложению теории Браве.

Полагая, что эта теория известна всем, я здесь ограничусь лишь замечанием, что согласно этой теории всякая точка пространственной решетки должна заменяться группой точек или молекул.

Таким образом из точечной решетки возникает молекулярная решетка, „симметрия которой никогда не бывает выше симметрии соответственной пространственной решетки“ (стр. 308).

„Если G_p — группа симметрии какой-либо пространственной решетки, G_μ — группа симметрии молекулы μ, то сим-

метрия молекулярной решетки будет представлена наибольшей общей подгруппой G_p и G_μ" (стр. 309).

Далее говорится:

„Симметрия молекулярной решетки никогда не бывает выше симметрии молекул".

Это положение как будто противоречит следующему положению Браве (Études cristallographiques, p. 200): „У всех мериэдрических кристаллов часть осей, центр или плоскости симметрии, принадлежащие совокупности точек, отсутствуют в их молекулярных полиэдрах".

Я считаю это противоречие мнимым, потому что в последнем своем положении Браве под „совокупностью" разумеет лишь пространственную решетку, заменяющую молекулярную решетку. Но я хотел бы отметить, что понятию „молекулярной решетки" можно придать более общий смысл, признавая, что хотя центры молекул и образуют обыкновенную пространственную решетку, все же молекулы, замещающие точки решетки, не все обязательно должны быть параллельными или тем более конгруэнтными. Такие молекулы могут быть также зеркально-равными.

Расширенное таким образом понятие молекулярной решетки не было известно еще ни Браве, ни Шенфлису, хотя первое основание этому понятию уже было положено в „Началах учения о фигурах" (благодаря введению понятия „сложного параллелоэдра").

В этом расширенном смысле только что упомянутое положение Шенфлиса представляется неверным; этой темы я коснусь в следующей главе.

Посвятив две дальнейшие главы сложению возможных операций и вспомогательным теоремам из теории групп, Шенфлис переходит к главному предмету своего труда, к систематическому выводу всех пространственных групп. Он начинает свой вывод с простейших и далее постепенно переходит к более сложным случаям. Ввиду того, что как в смысле исходной точки зрения, так даже и в последователь-

ности конечных выводов наши методы очень сходны, я полагаю, что могу теперь перейти к конечным результатам. Для этой цели в следующей объемистой таблице, помещенной на стр. 291—313, сопоставлены выведенные мной системы, точно охарактеризованные алгебраическими уравнениями, с пространственными группами Шенфлиса, обозначенными символами.[1]

Чтобы результаты были еще нагляднее, я при помощи очень простого метода изобразил все простые системы графически.

Мой метод основан на том факте, что в правильных системах имеется лишь незначительное число ориентированных различным образом осей совмещения (т. е. осей симметрии и винтовых осей). Благодаря этому, направление этих осей может быть обозначено точно, а именно буквой, затем остается только обозначить абсолютное положение каждой оси в пространстве. Я это делаю посредством плоскости проекции, пересекающей все непараллельные ей оси в некоторых точках x. Эти точки и определяют совершенно точно искомое положение.

Оси, параллельные плоскости проекции, я проектирую при помощи прямых, перпендикулярных этой плоскости. Расстояние от последней я обозначаю в скобках на концах этих прямых. При этом в качестве единицы принимается четверть трансляции системы (или пространственной группы), перпендикулярной к плоскости проекции (в уравнениях трансляция обозначается буквой λ). Лишь в случаях, относящихся к гексагональной системе, за единицу берется $\lambda / 6$.

---

[1] Быть может следует еще отметить недостаточность определения пространственной группы (стр. 359). Шенфлис полагает главную суть в том, что в противоположность „точечной группе“ „пространственная группа“ содержит бесконечную совокупность пространственных операций. Я уже отмечал, что основное различие состоит не в этом: гораздо больше пространственную группу характеризуют трансляции.

Кроме того, над буквой ставится порядок и особенные свойства оси.

Так, например, $\overset{4}{y}$ обозначает четверную ось симметрии y; $\overset{3r}{O_1}$ обозначает правую, а $\overset{3l}{O_1}$ левую тройную винтовую ось O_1; $\overset{4v}{x_1}$ обозначает четверную винтовую ось x_1 с компонентой поступания $\frac{\lambda}{2}$ (одновременно эта ось является двойной осью симметрии); таким же образом $\overset{v}{z}$ или $\overset{v}{v}$ обозначают двойные винтовые оси.

Этих объяснений достаточно для того, чтобы сделать ясными и приведенные ниже примеры.

В качестве первого примера[1] возьмем (9 s) или $\mathfrak{B}^1$ (см. табл., фиг. 1). При более подробном рассмотрении соответствующих уравнений мы видим, что имеем дело с видом симметрии 6 (табл. на стр. 291—313). Таким образом, совершенно ясно, что (9 s) принадлежит к гемиэдрии ромбической системы.

Мы видим далее, что в центре координат пересекаются три двойные оси симметрии. Если бы это было не так, то соответствующий параметр (k или j) находился бы среди трансляционных членов уравнений. Величины трансляций λ, λ_0 и λ_1 [2] ясно показывают, что имеется налицо система равных параллельных осей с кратчайшими расстояниями λ, λ_0 и λ_1 в направлении соответствующих координатных осей.

Кроме того, как уже известно и как нетрудно доказать, помимо этих осей существуют еще и равнодействующие оси (согласно теореме 2). Я хочу воспользоваться этим

---

1) Очень простые уравнения (1 s) — (3 a) понятны сами по себе: (1 a), например, показывает, что через центр проходит двойная винтовая ось z; (1 h) отмечает проходящую через центр плоскость скольжения (yv) с поступанием $\lambda_1/2$ в направлении оси v, и т. д.

2) При этих членах предполагаются в качестве коэффициентов любые целые числа $+\infty \ldots -\infty$.

примером, чтобы познакомить читателя с трактовкой подобных вопросов. Пусть координаты трансформируются путем поступания центра в направлении оси y на величину $\lambda/2$. Ясно, что при таком центре координат мы должны заменить величины координат (b, c, d) данной точки величинами ($b+\lambda/2$, c, d) для того, чтобы при новом положении центра величины координат сохранили свое значение b, c, d.

После трансформации мы, следовательно, получаем:

$$y = n^k(b + \lambda/2) + \lambda - \lambda/2; \quad z = n^{k+j}c + \lambda_0; \quad v = n^j d + \lambda_1.$$

Но так как параметр k может получить только два значения: 0 или 1, то $n^k - 1 = -2k$, и мы снова приходим к уравнениям, тождественным с (9s). Следовательно и теперь опять три оси симметрии второго порядка проходят через центр, несмотря на его новое положение. В качестве второго примера возьмем уравнения (8a) или $\mathfrak{B}^4$. Сразу видно, что эта система принадлежит к тому же виду симметрии, что и предыдущая.

Это доказывает тождественность первых членов уравнений с соответствующими членами предыдущего случая. Далее мы знаем, что в этих уравнениях параметр k выражает ось второго порядка v, а параметр j — ось второго порядка y. Так как теперь первое уравнение содержит член $j^{\lambda}/_2$, то к вращению вокруг оси y присоединяется еще поступание вдоль этой оси, следовательно эта ось должна быть винтовой осью (см. табл. фиг. 2). Кроме этого она не проходит через центр координат, потому что к вышеупомянутым движениям присоединяется еще трансляция $\lambda_1/2$ вдоль оси v. Согласно теореме 2, винтовая ось должна находиться в плоскости yv и притом на расстоянии $\lambda_1/4$ от центра координат, что, впрочем, явствует уже из самой фигуры. Из этих уравнений, кроме того, можно заключить, что v также является винтовой осью второго порядка. Она тоже не проходит через центр координат, а лежит в плоскости осей zv, на расстоянии $\lambda_0/4$ от этого центра.

Вследствие того, что оси симметрии здесь не только не пересекаются в одной точке, но и вовсе не существуют, элементарные фигуры этой правильной системы — асимметричны, а сама система является асимморфной.

В качестве более сложного примера мы рассмотрим еще (32а) или $\mathfrak{G}_4^6$ (см. табл., фиг. 3). Сравнение с (9) табл. I показывает, что мы имеем здесь дело с пирамидальной гемиморфией тетрагональной системы.

Но теперь, как показывает первое уравнение, к повороту вокруг четверной оси y (что выражено параметром s) добавлен перенос на $\lambda/4$ вдоль этой оси.

Таким образом эта ось является четверной винтовой осью с ходом $\lambda/4$; она является левой, так как здесь в первом уравнении параметру s приписан знак $+$. Кроме того, имеется трансляция с компонентами $\lambda/2$, $\lambda_0/2$, $\lambda_0/2$, которая выражена параметром f. Согласно теореме 2 заключаем, что здесь имеется равнодействующая четверная ось, лежащая в плоскости yy_0 на расстоянии $\lambda_1/2$ от центра. Этой оси соответствует теперь перенос $+\lambda/4+\lambda/2$, или, что то же самое — $\lambda/4$. Таким образом равнодействующая ось является правой, что, впрочем, также выясняется из соответственного преобразования координат.

Теперь я обращусь к сложнейшим случаям простых систем, например, случаям (93а) или (94а), т. е. O^6 или O^7. Так же, как и в предыдущих примерах, находим и здесь путем сравнения с (31) по табл. I, что данный случай относится к гироэдрической гемиэдрии тессеральной системы. Прежде всего мы должны получить теперь ясное понятие относительно значений параметров j, k, l. Легко видеть, что j выражает двойную ось x_1, k — двойную ось x_0, l — двойную ось z_4 и s — тройную ось O.[1]

[1] На фиг. 4 (табл.) даны наименования тех осей, которые изображены на фиг. 5 и 6. На обеих последних, ради простоты, опущены двойные и тройные винтовые оси. В оригинале они даны на особой таблице (напечатанной на прозрачной бумаге).

Приняв теперь во внимание коэффициенты переносов уравнений, мы найдем, что в (93 а) и (94 а) — s и l в качестве таких коэффициентов отсутствуют. Итак, упомянутые оси являются осями симметрии и проходят при этом через центр (табл. фиг. 5 и 6). Параметр k в первом уравнении (93 а) и (94 а) показывает, что соответствующей оси отвечает перенос $\lambda/2$. Ось является таким образом двойной винтовой осью. Наличие коэффициента k в обоих других уравнениях ясно показывает, что эта ось не проходит через центр, но должна рассматриваться как сдвинутая в точку $(O, -\lambda/8, +\lambda/8)$ в случае (93 а) или в точку $(O, +\lambda/8, -\lambda/8)$ в случае (94 а). Таким образом становится очевидным, что ось, отвечающая параметру j, также является двойной винтовой осью и не проходит через начало координат, а сдвинута в другие точки, координаты которых легко выводятся из уравнений.

Оси, параллельные осям x_0, x_1 и x_2, следует принять за четверные, если их рассматривать как равнодействующие двух других.

Например, обеим осям, которым отвечают параметры j и l, эквивалентна равнодействующая четверная ось, параллельная x_0; она является винтовой осью с компонентой переноса $\lambda/4$, как это видно из первого уравнения. Точно так же для осей, выраженных через k и l, эквивалентной равнодействующей является четверная ось, параллельная оси x_1, а также винтовая ось с компонентой переноса $\lambda/4$, как это видно из второго уравнения. Можно еще детальней исследовать этот вопрос и, например, установить, что в случае (93 а) эти оси являются правыми, а в случае (94 а) — левыми. Я думаю ограничиться приведенными простыми системами с тем, чтобы добавить еще некоторое пояснение о двойных системах.

В обоих случаях, (93 а) и (94 а), мы имеем пересечение тройной оси симметрии с тремя ей перпендикулярными двойными осями симметрии, что характеризует трапецо-

эдрическую тетартоэдрию гексагональной системы. Итак правильная система различно ориентированных трапецоэдрическо-тетартоэдрическо-гексагональных элементарных фигур образует здесь асимморфную гироэдрически-тессеральную правильную систему.

II. Таблица правильных систем (пространственные группы)

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		I. Триклинная система		
		Симморфные системы		Гемиэдрия
$\mathfrak{C}_1$	1 s	$y = b + \lambda;\quad z = c + \lambda_0;\quad v = d + \lambda_1$	1	
		Гемисимморфные и асимморфные системы отсутствуют.		
		Симморфные системы		Голоэдрия
$\mathfrak{C}_i$	2 s	$y = n^k b + \lambda;\quad z = n^k c + \lambda_0;\quad v = n^k d + \lambda_1$	—	
		Гемисимморфные и асимморфные системы отсутствуют.		
		II. Моноклинная система		
		Симморфные системы		Гемиморфия
$\mathfrak{C}_2^1$	3 s	$y = n^k b + \lambda;\quad z = c + \lambda_0;\quad v = n^k d + \lambda_1$	2	
$\mathfrak{C}_2^3$	4 s	$y = n^k b + f\lambda/2;\quad z = c + f\lambda_0/2;\quad v = n^k d + \lambda_1$	4	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{C}_2^2$	1 a	$y = n^k b + \lambda;\quad z = c + k\lambda_0/2;\quad v = n^k d + \lambda_1$	3	
		Гемисимморфные и асимморфные системы отсутствуют.		
		Симморфные системы		Гемиэдрия
$\mathfrak{C}_s^1$	5 s	$y = b + \lambda;\quad z = n^k b + \lambda_0;\quad v = d + \lambda_1$	—	
$\mathfrak{C}_s^3$	6 s	$y = b + f\lambda/2;\quad z = n^k b + f\lambda_0/2;\quad v = d + \lambda_1$	—	
		Гемисимморфные системы		
$\mathfrak{C}_s^2$	1 h	$y = b + \lambda;\quad z = n^k c + \lambda_0;\quad v = d + k\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{C}_s^4$	2 h	$y = b + f\lambda/2;\quad z = n^k c + f\lambda_0/2;\quad v = d + k\lambda_1/2$	—	
		Асимморфные системы отсутствуют.		

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение			№ по Зонке	
		Симморфные системы				Голоэдрия
$\mathfrak{C}_{2,h}^{1}$	7 s	$y=n^k b+\lambda$;	$z=n^j c+\lambda_0$;	$v=n^k d+\lambda_1$	—	
$\mathfrak{C}_{2,h}^{3}$	8 s	$y=n^k b+f\lambda/2$;	$z=n^j c+f\lambda_0/2$	$v=n^k d+\lambda_1$	—	
		Гемисимморфные системы				
$\mathfrak{C}_{2,h}^{4}$	3 h	$y=n^k b+\lambda$;	$z=n^j c+\lambda_0$;	$v=n^k d+j\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{C}_{2,h}^{6}$	4 h	$y=n^k b+f\lambda/2$;	$z=n^j c+f\lambda_0/2$;	$v=n^k d+j\lambda_1/2$	—	
		Асимморфные системы				
$\mathfrak{C}_{2,h}^{2}$	2 a	$y=n^k b+\lambda$;	$z=n^j c+k\lambda_0/2$;	$v=n^k d+\lambda_1$	—	
$\mathfrak{C}_{2,h}^{5}$	3 a	$y=n^k b+\lambda$;	$z=n^j c+k\lambda_0/2$;	$v=n^k d+j\lambda_1/2$	—	
		III. Ромбическая система				
		Симморфные системы				Гемиэдрия
$\mathfrak{V}^{1}$	9 s	$y=n^k b+\lambda$;	$z=n^{k+j} c+\lambda_0$;	$v=n^j d+\lambda_1$	5	
$\mathfrak{V}^{6}$	10 s	$y=n^k b+\lambda$;	$z=n^{k+j} c+f\lambda_0/2$;	$v=n^j d+f\lambda_1/2$	7	
$\mathfrak{V}^{8}$	11 s	$y=n^k b+f\lambda/2$;	$z=n^{k+j} c+f\lambda_0/2$;	$v=n^j d+f\lambda_1/2$	10	
$\mathfrak{V}^{7}$	12 s	$y=n^k b+g\lambda/2$;	$z=n^{k+j} c+(f+g)\lambda_0/2$;	$v=n^j d+f\lambda_1/2$	8	
		Асимморфные системы				
$\mathfrak{V}^{2}$	4 a	$y=n^k b+j\lambda/2$;	$z=n^{k+j} c+\lambda_0$;	$v=n^j d+\lambda_1$	6	
$\mathfrak{V}^{5}$	5 a	$y=n^k b+j\lambda/2$;	$z=n^{k+j} c+f\lambda_0/2$;	$v=n^j d+f\lambda_1/2$	9	
$\mathfrak{V}^{9}$	6 a	$y=n^k b+(f+k+j)\lambda/2$;	$z=n^{k+j} c+(f+j)\lambda_0/2$;	$v=n^j d+(f+k)\lambda_1/2$	11	
$\mathfrak{V}^{3}$	7 a	$y=n^k b+\lambda$;	$z=n^{k+j} c+j\lambda_0/2$;	$v=n^j d+(k+j)\lambda_1/2$	12	
$\mathfrak{V}^{4}$	8 a	$y=n^k b+j\lambda/2$;	$z=n^{k+j} c+k\lambda_0/2$,	$v=n^j d+(k+j)\lambda_1/2$	14	

Гемисимморфные системы отсутствуют.

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение			№ по Зонке	
		Симморфные системы				Гемиморфия
$\mathfrak{C}_{2,v}^{1}$	13 s	$v=n^j b+\lambda$;	$z=n^k c+\lambda_0$;	$v=d+\lambda_1$	—	
$\mathfrak{C}_{2,v}^{11}$	14 s	$y=n^j b+f\lambda/2$;	$z=n^k c+f\lambda_0/2$;	$v=d+\lambda_1$	—	
$\mathfrak{C}_{2,v}^{14}$	15 s	$y=n^j b+f\lambda/2$;	$z=n^k c+\lambda_0$;	$v=d+\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{C}_{2,v}^{20}$	16 s	$y=n^j b+f\lambda/2$;	$z=n^k c+f\lambda_0/2$;	$v=d+f\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{C}_{2,v}^{18}$	17 s	$y=n^j b+(f+g)\lambda/2$;	$z=n^k c+f\lambda_0/2$;	$v=d+g\lambda_1/2$	—	

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение			№ по Зонке
		Гемисимморфные системы			
$\mathfrak{C}_{2,v}^{3}$	5 h	$y=n^{j}b+\lambda$;	$z=n^{k}c+\lambda_0$;	$v=d+(j+k)\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{4}$	6 h	$y=n^{j}b+(j+k)\lambda_1$;	$z=n^{k}c+\lambda_0$;	$v=d+\lambda_1$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{6}$	7 h	$y=n^{j}b+(j+k)\lambda$;	$z=n^{k}c+\lambda_0$;	$v=d+(j+k)\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{10}$	8 h	$y=n^{j}b+(j+k)\lambda/2$;	$z=n^{k}c+(j+k)\lambda_0/2$;	$v=d+(j+k)\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{8}$	9 h	$y=n^{j}b+(j+k)\lambda/2$;	$z=n^{k}c+(j+k)\lambda_0/2$;	$v=d+\lambda_1$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{13}$	10 h	$y=n^{j}b+f\lambda/2$;	$z=n^{k}c+f\lambda_0/2$;	$v=d+(j+k)\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{15}$	11 h	$y=n^{j}b+(f+j+k)\lambda/2$;	$z=n^{k}c+\lambda_0$;	$v=d+f\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{16}$	12 h	$y=n^{j}b+f\lambda/2$;	$z=n^{k}c+(j+k)\lambda_0/2$;	$v=d+f\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{17}$	13 h	$y=n^{j}b+(f+k)\lambda/2$;	$z=n^{k}c+(j+k)\lambda_0/2$;	$v=d+f\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{22}$	14 h	$y=n^{j}b+(f+j+k)\lambda/2$;	$z=n^{k}c+f\lambda_0/2$;	$v=d+f\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{21}$	15 h	$y=n^{j}b+f\lambda/2$;	$z=n^{k}c+f\lambda_0/2$;	$v=d+(f+j+k)\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{19}$	16 h	$y=n^{j}c+(f+g)\lambda/2+(j+k)\lambda/4$;	$z=n^{k}c+f\lambda_0/2+(j+k)\lambda_0/4$;	$v=d+g\lambda_1/2+(j+k)\lambda_1/4$	—
		Асимморфные системы			
$\mathfrak{C}_{2,v}^{4}$	9 a	$y=n^{k}b+\lambda$;	$z=n^{j}c+\lambda_0$;	$v=d+j\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{7}$	10 a	$y=n^{k}b+(j+k)\lambda/2$;	$z=n^{j}c+\lambda_0$;	$v=d+j\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{5}$	11 a	$y=n^{k}b+\lambda$;	$z=n^{j}c+(j+k)\lambda_0/2$;	$v=d+j\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{9}$	12 a	$y=n^{k}b+(j+k)\lambda/2$;	$z=n^{j}c+(j+k)\lambda_0/2$;	$v=d+j\lambda_1/2$	—
$\mathfrak{C}_{2,v}^{12}$	13 a	$y=n^{k}b+f\lambda/2$;	$z=n^{j}c+f\lambda_0/2$;	$v=d+j\lambda_1/2$	—

Гемиморфия

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение			№ по Зонке	
		Симморфные системы				
$\mathfrak{V}_h^1$	18 s	$y=n^jb+\lambda;$	$z=n^kc+\lambda_0;$	$v=n^ld+\lambda_1$	—	Голоэдрия
$\mathfrak{V}_h^{19}$	19 s	$y=n^jb+\lambda;$	$z=n^kc+f\lambda_0/2;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^{25}$	20 s	$y=n^jb+f\lambda/2;$	$z=n^kc+f\lambda_0/2;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^{23}$	21 s	$y=n^jb+g\lambda/2;$	$z=n^kc+(f+g)\lambda_0/2;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	
		Гемисимморфные системы				
$\mathfrak{V}_h^3$	17 h	$y=n^jb+(j+k+l)\lambda/2;$	$z=n^kc+\lambda_0;$	$v=n^ld+\lambda_1;$	—	
$\mathfrak{V}_h^4$	18 h	$y=n^jb+\lambda;$	$z=n^kc+(j+k+l)\lambda_0/2;$	$v=n^ld+(j+k+l)\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^2$	19 h	$y=n^jb+(j+k+l)\lambda/2;$	$z=n^kc+(j+k+l)\lambda_0/2;$	$v=n^ld+(j+k+l)\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^{20}$	20 h	$y=n^jb+(j+k+l)\lambda/2;$	$z=n^kc+f\lambda_0/2;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^{21}$	21 h	$y=n^jb+\lambda;$	$z=n^kc+(f+j+k+l)\lambda_0/2;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^{22}$	22 h	$y=n^jb+(j+k+l)\lambda/2;$	$z=n^kc+(f+j+k+l)\lambda_0/2;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^{26}$	23 h	$y=n^jb+(f+j+k+l)\lambda/2;$	$z=n^kc+f\lambda_0/2;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^{24}$	24 h	$y=n^jb+g\lambda/2+(j+k+l)\lambda/4;$	$z=n^kc+(f+g)\lambda_0/2+(j+k+l)\lambda_0/4;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2+(j+k+l)\lambda_1/4$		
		Асимморфные системы				
$\mathfrak{V}_h^5$	14 a	$y=n^jb+l\lambda/2;$	$z=n^kc+\lambda_0;$	$v=n^ld+\lambda_1$	—	
$\mathfrak{V}_h^7$	15 a	$y=n^jb+l\lambda/2;$	$z=n^kc+(j+k+l)\lambda_0/2;$	$v=n^ld+\lambda_1$	—	
$\mathfrak{V}_h^8$	16 a	$y=n^jb+l\lambda/2;$	$z=n^kc+\lambda_0;$	$v=n^ld+(j+k+l)\lambda_1/2$	—	Голоэдрия
$\mathfrak{V}_h^6$	17 a	$y=n^jb+l\lambda/2;$	$z=n^kc+(j+k+l)\lambda_0/2;$	$v=n^ld+(j+k+l)\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{V}_h^{17}$	18 a	$y=n^jb+l\lambda/2;$	$z=n^kc+f\lambda_0/2;$	$v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение		№ по Зонке	
$\mathfrak{B}_h^{18}$	19 a	$y=n^jb+l\lambda/2;$	$z=n^kc+(f+j+k+l)\lambda_0/2;$ $v=n^ld+f\lambda_1/2$	—	Голоэдрия
$\mathfrak{B}_h^{28}$	20 a	$y=n^jb+f\lambda/2;$	$z=n^kc+(f+k+l)\lambda_0/2;$ $v=n^ld+(f+l)\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{B}_h^{24}$	21 a	$y=n^jb+f\lambda/2;$	$z=n^kc+(f+k+l)\lambda_0/2;$ $v=n^ld+(f+j+k)\lambda_1/2;$	—	
$\mathfrak{B}_h^{9}$	22 a	$y=n^jb+\lambda;$	$z=n^kc+l\lambda_0/2;$ $v+n^ld+k\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{B}_h^{11}$	23 a	$y=n^jb+\lambda;$	$z=n^kc+(j+k)\lambda_0/2;$ $v=n^ld+k\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{B}_h^{13}$	24 a	$y=n^jb+\lambda;$	$z=n^kc+(j+k)\lambda_0/2;$ $v=n^ld+(j+l)\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{B}_h^{12}$	25 a	$y=n^jb+(j+k+$ $+l)\lambda/2;$	$z=n^kc+l\lambda_0/2;$ $v=n^ld+k\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{B}_h^{14}$	26 a	$y=n^jb+(j+$ $+k+l)\lambda/2;$	$z=n^kc+(j+k)\lambda_0/2;$ $v=n^ld+k\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{B}_h^{10}$	27 a	$y=n^jb+$ $+(j+k+l)\lambda/2;$	$z=n^kc+(j+k)\lambda_0/2;$ $v=n^ld+(j+l)\lambda_1 2$	—	
$\mathfrak{B}_h^{16}$	28 a	$y=n^jb+l\lambda/2;$	$z=n^kc+(k+l)\lambda_0/2;$ $v=n^ld+k\lambda_1/2$	—	
$\mathfrak{B}_h^{15}$	29 a	$y=n^jb+l\lambda/2;$	$z=n^kc+j\lambda_0/2;$ $v=n^ld+k\lambda_1/2$	—	

IV. Тетрагональная система

Симморфные системы

$\mathfrak{C}_4^1$	22 s	$y=b+\lambda;$	$y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;$	$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+\lambda_0$	30	Пирамидальная гемиморфия
$\mathfrak{C}_4^5$	23 s	$y=b+f\lambda/2;$	$y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2;$	$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+f\lambda_0/2$	31	

Асимморфные системы

$\mathfrak{C}_4^2$, $\mathfrak{C}_4^4$	30 a, 31 a	$y=b\mp s\lambda/4;$	$y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;$	$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+\lambda_0$	26, 27	Пирамидальная гемиморфия
$\mathfrak{C}_4^6$	32 a	$y=b+$ $+(2f+s)\lambda/4;$	$y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2;$	$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+f\lambda_0/2$	28	
$\mathfrak{C}_4^3$	33 a	$y=b+s\lambda/2;$	$y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;$	$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+\lambda_0$	29	

Гемисимморфные системы отсутствуют.

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		Симморфные системы		
$\mathfrak{C}_{4,v}^{1}$	24 s	$y=b+\lambda;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+\lambda_0$	—	Гемиморфия
$\mathfrak{C}_{4,v}^{9}$	25 s	$y=b+f\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+f\lambda_0/2$	—	
		Гемисимморфные системы		
$\mathfrak{C}_{4,v}^{5}$	25 h	$y=b+k\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+\lambda_0$	—	
$\mathfrak{C}_{4,v}^{2}$	26 h	$y=b+\lambda;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+k\lambda_0/2;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+k\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{C}_{4,v}^{6}$	27 h	$y=b+k\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+k\lambda_0/2;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+k\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{C}_{4,v}^{10}$	28 h	$y=b+(f+k)\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+f\lambda_0/2$	—	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{C}_{4,v}^{11}$	34 a	$y=b+(2f+s)\lambda/4;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+(f+k)\lambda_0/2$		
$\mathfrak{C}_{4,v}^{12}$	35 a	$y=b+(2f+2k+s)\lambda/4;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2.\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+(f+k)\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{C}_{4,v}^{3}$	36 a	$y=b+s\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+\lambda_0$	—	
$\mathfrak{C}_{4,v}^{4}$	37 a	$y=b+(s+k)\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+\lambda_0$	—	
$\mathfrak{C}_{4,v}^{7}$	38 a	$y=b+(s+k)\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+k\lambda_0/2;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+k\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{C}_{4,v}^{8}$	39 a	$y=b+s\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+k\lambda_0/2;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+k\lambda_0/2$	—	
		Симморфные системы		
$\mathfrak{C}_{4}^{1}$	26 s	$y=n^s b+\lambda;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+\lambda_0$	—	Тетартоэдрия
$\mathfrak{C}_{4}^{2}$	27 s	$y=n^s b+f\lambda/2;\quad y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2;\quad y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+f\lambda_0/2$	—	

Гемисимморфные и асимморфные системы отсутствуют.

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		Симморфные системы		Бипирамидальная гемиэдрия
$\mathfrak{C}_{4,h}^{1}$	28 s	$y=n^k b+\lambda;\ y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;$		
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+\lambda_0;$	—	
$\mathfrak{C}_{4,h}^{5}$	29 s	$y=n^k b+f\lambda/2;$		
		$y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2;$		
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+f\lambda_0/2$	—	
		Гемисимморфные системы		
$\mathfrak{C}_{4,h}^{3}$	29 h	$y=n^k b+\lambda;\ y_0=\overset{4}{b}_s+k\lambda_0/2;$		
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+k\lambda_0/2$	—	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{C}_{4,h}^{6}$	40 a	$y=n^k b+(2f+s)\lambda/4;$		
		$y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2;$		
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+(f+k)\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{C}_{4,h}^{2}$	41 a	$y=n^k b+s\lambda/2;$		
		$y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;$		
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+\lambda_0$	—	
$\mathfrak{C}_{4,h}^{4}$	42 a	$y=n^k b+s\lambda/2;$		
		$y_0=\overset{4}{b}_s+k\lambda_0/2;$		
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+1}+k\lambda/2_0$	—	
		Симморфные системы		Трапецоэдрич. гемиэдрия
$\mathfrak{D}_{4}^{1}$	30 s	$y=n^k b+\lambda;\ y_0=\overset{4}{b}_s+\lambda_0;$		
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+\lambda_0$	36	
$\mathfrak{D}_{4}^{9}$	31 s	$y=n^k b+f\lambda/2;$		

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + f\lambda_0 / 2;$	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	37
		Асимморфные системы	
$\mathfrak{D}_4^2$	43 a	$y = n^k b + \lambda;$	
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (f + k)\lambda_0 / 2;$	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	41
$\mathfrak{D}_4^4, \mathfrak{D}_4^8$	44, 45 a	$y = n^k b \mp s\lambda / 4;$ $y_0 = \overset{4}{b}_s + \lambda_0;$	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	32, 33
$\mathfrak{D}_4^{10}$	46 a	$y = n^k b + (2f + s)\lambda / 4;$	
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + f\lambda_0 / 2;$	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	34
$\mathfrak{D}_4^5$	47 a	$y = n^k b + s\lambda / 2;$ $y_0 = \overset{4}{b}_s + \lambda_0;$	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	35
$\mathfrak{D}_4^3, \mathfrak{D}_4^7$	48, 49 a	$y = n^k b \mp s\lambda / 4;$	
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (k + f)\lambda_0 / 2;$	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	38, 39
$\mathfrak{D}_4^6$	50 a	$y = n^k b + s\lambda / 2;$	
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (k + f)\lambda_0 / 2;$	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	40

Трапецоэдрическая гемиэдрия

Гемисимморфные системы отсутствуют.

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
		Симморфные системы	
$\mathfrak{B}_d^1$	32 s	$y = n^{s+k} b + \lambda;$ $y_0 = \overset{4}{b}_s + \lambda_0;$	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—

Скаленоэдр. гемиэдр.

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
$\mathfrak{B}_d^5$	33 s	$y = n^{s+k} b + \lambda$;		Скаленоэдрическая гемиэдрия
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + f\lambda_0 / 2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	—	
$\mathfrak{B}_d^{11}$	34 s	$y = n^{s+k} b + f\lambda / 2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + f\lambda_0 / 2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	—	
$\mathfrak{B}_d^9$	35 s	$y = n^{s+k} b + g\lambda / 2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (g + f) \lambda_0 / 2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	—	

Гемисимморфные системы

$\mathfrak{B}_d^2$	30 h	$y = n^{s+k} b + s\lambda / 2$; $y_0 = \overset{4}{b}_s + \lambda_0$:		Скаленоэдрическая гемиэдрия
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{B}_d^6$	31 h	$y = n^{s+k} b + s\lambda / 2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + f\lambda_0 / 2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	—	
$\mathfrak{B}_d^7$	32 h	$y = n^{s+k} b + \lambda$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (f + s) \lambda_0 / 2$;	—	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	—	
$\mathfrak{B}_d^8$	33 h	$y = n^{s+k} b + s\lambda / 2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (f + s) \lambda_0 / 2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0 / 2$	—	
$\mathfrak{B}_d^{10}$	34 h	$y = n^{s+k} b + (g + s) \lambda / 2$;		

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (g + f)\lambda_0/2$;		Скаленоэдрическая гемиэдрия
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/2$	—	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{B}_d^{12}$	51 a	$y = n^{s+k} b + (2f + s)\lambda/4$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (f + k)\lambda_0/2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{B}_d^{3}$	52 a	$y = n^{s+k} b + \lambda$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + k\lambda_0/2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + k\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{B}_d^{4}$	53 a	$y = n^{s+k} b + s\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + k\lambda_0/2$,		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + k\lambda_0/2$	—	
		Симморфные системы		Голоэдрия
$\mathfrak{D}_{4,h}^{1}$	36 s	$y = n^{k+l} b + \lambda$; $y_0 = \overset{4}{b}_s + \lambda_0$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{17}$	37 s	$y = n^{k+l} b + f\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + f\lambda_0/2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/2$	—	
		Гемисимморфные системы		
$\mathfrak{D}_{4,h}^{2}$	35 h	$y = n^{k+l} b + l\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + \lambda_0$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{3}$	36 h	$y = n^{k+l} b + \lambda$;		

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
		$y_0=\overset{4}{b}_s+l\lambda_0/2$;	
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+l\lambda_0/2$;	—
$\mathfrak{D}^4_{4,h}$	37 h	$y=n^{k+l}b+l\lambda/2$;	
		$y_0=\overset{4}{b}_s+l\lambda_0/2$;	
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+l\lambda_0/2$	—
$\mathfrak{D}^{18}_{4,h}$	38 h	$y=n^{k+l}b+(f+l)\lambda/2$;	
		$y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2$;	
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+f\lambda_0/2$	—
		Асимморфные системы	
$\mathfrak{D}^5_{4,h}$	54 a	$y=n^{k+l}b+\lambda$;	
		$y_0=\overset{4}{b}_s+(f+k)\lambda_0/2$;	
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+f\lambda_0/2$	—
$\mathfrak{D}^7_{4,h}$	55 a	$y=n^{k+l}b+\lambda$;	Голоэдрия
		$y_0=\overset{4}{b}_s+(f+k)\lambda_0/2$;	
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+(f+l)\lambda_0/2$	—
$\mathfrak{D}^6_{4,h}$	56 a	$y=n^{k+l}b+l\lambda/2$;	
		$y_0=\overset{4}{b}_s+(f+k)\lambda_0/2$;	
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+f\lambda_0/2$	—
$\mathfrak{D}^8_{4,h}$	57 a	$y=n^{k+l}b+l\lambda/2$;	
		$y_0=\overset{4}{b}_s+(f+k)\lambda_0/2$;	
		$y_1=\overset{4}{b}_{s+n}k+(f+l)\lambda_0/2$	—
$\mathfrak{D}^{19}_{4,h}$	58 a	$y=n^{k+l}b+(2f+s)\lambda/4$;	
		$y_0=\overset{4}{b}_s+f\lambda_0/2$;	

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}{}^{k} + (f+l)\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{20}$	59 a	$y = n^{k+l}b + (2f + 2l + s)\lambda/4$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + f\lambda_0/2$:		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}{}^{k} + (f+l)\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{9}$	60 a	$y = n^{k+l}b + s\lambda/2$,		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + \lambda_0$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}{}^{k} + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{10}$	61 a	$y = n^{k+l}b + (s+l)\lambda/2$ ·		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + \lambda_0$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}{}^{k} + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{12}$	62 a	$y = n^{k+l}b + (s+l)\lambda/2$;		Голоэдрия
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + l\lambda_0/2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}{}^{k} + l\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{11}$	63 a	$y = n^{k+l}b + s\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + f\lambda_0/2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}{}^{k} + l\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{13}$	64 a	$y = n^{k+l}b + s\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (k+f)\lambda_0/2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}{}^{k} + f\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{15}$	65 a	$y = n^{k+l}b + s\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{1}{b}_s + (k+f)\lambda_0/2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}{}^{k} + (f+l)\lambda_0/2$	—	
$\mathfrak{D}_{4,h}^{14}$	66 a	$y = n^{k+l}b + (s+l)\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (k+f)\lambda_0/2$;.		

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}k + f\lambda_0/2$	—	Голоэдрия
$\mathfrak{D}_{4,h}^{16}$	67 a	$y = n^{k+l}b + (s + l)\lambda/2$		
		$y_0 = \overset{4}{b}_s + (k + f)\lambda_0/2$;		
		$y_1 = \overset{4}{b}_{s+n}k + (f + l)\lambda_0/2$	—	

V. Гексагональная система

Симморфные системы

$\mathfrak{G}_3^1$	38 s	$y = b + \lambda$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0$		Пирам. тетартоморфия
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+1} + \lambda_0$	17	
$\mathfrak{G}_3^4$	39 s	$y = b + f\lambda/3$;		
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3$,		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+1} + f\lambda_0/3$	18	

Асимморфные системы

$\mathfrak{G}_3^2$, $\mathfrak{G}_3^3$	68, 69 a	$y = b \mp s\lambda/3$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0$,		Пирам. тетартоморфия
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+1} + \lambda_0$	15, 16	

Гемисимморфные системы отсутствуют.

Симморфные системы

$\mathfrak{G}_{3,v}^{1}$	40 s	$y = b + \lambda$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0$.	—	Тетартоморфия
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n}k + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{G}_{3,v}^{1}$	41 s	$y = b + \lambda$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n}k + f\lambda_0/3$	—	
$\mathfrak{G}_{3,v}^{5}$	42 s	$y = b + f\lambda/3$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n}k + f\lambda_0/3$	—	

Гемисимморфные системы

$\mathfrak{E}_{3v}^{4}$	39 h	$y = b + k\lambda/2$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0$.		Тетартоморфия

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	Тетартоморфия
$\mathfrak{C}_{3,v}^3$	40 h	$y = b + k\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	—	
$\mathfrak{C}_{3,v}^6$	41 h	$y = b + f\lambda/2 + k\lambda/2$;		
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	—	
Асимморфные системы отсутствуют.				
		Симморфные системы		Бипир. тетартоморф.
$\mathfrak{C}_{3,h}^1$	43 s	$y = n^k b + \lambda$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+1} + \lambda_0$	—	
Гемисимморфные и асимморфные системы отсутствуют.				
		Симморфные системы		Трапец. тетартоэдрия
$\mathfrak{D}_3^1$	44 s	$y = n^k b + \lambda$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	25	
$\mathfrak{D}_3^2$	45 s	$y = n^k b + \lambda$; $y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	21	
$\mathfrak{D}_3^7$	46 s	$y = n^k b + g\lambda/3$;		
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + (g + f)\lambda_0/3$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	22	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{D}_3^3, \mathfrak{D}_3^5$	70, 71 a	$y = n^k b \mp s\lambda/3$;		
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3$;		
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	23, 24	

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
$\mathfrak{D}_3^4$, $\mathfrak{D}_3^6$	72, 73 a	$y = n^k b \mp s\lambda/3;\ y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0,$	
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	19, 20

Гемисимморфные системы отсутствуют.

Симморфные системы

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
$\mathfrak{D}_{3,h}^1$	47 s	$y = n^{k+l} b + \lambda;$	
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3;$	
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	—
$\mathfrak{D}_{3,h}^3$	48 s	$y = n^{k+l} b + \lambda;$	
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0;\ y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—

Гемисимморфные системы

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
$\mathfrak{D}_{3,h}^2$	42 h	$y = n^{k+l} b + l\lambda/2;$	
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + f\lambda_0/3;$	
		$y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	—
$\mathfrak{D}_{3,h}^4$	43 h	$y = n^{k+l} b + l\lambda/2;$	
		$y_0 = \overset{3}{b}_s + \lambda_0;\ y_1 = \overset{3}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—

Асимморфные системы отсутствуют.

Гемиэдрия

Симморфные системы

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
$\mathfrak{C}_6^1$	49 s	$y = b + \lambda;\ y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0,$	
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+1} + \lambda_1$	47

Асимморфные системы

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
$\mathfrak{C}_6^2$ $\mathfrak{C}_6^3$	74, 75 a	$y = b \mp s\lambda/6;\ y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$	
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+1} + \lambda_1$	42, 43
$\mathfrak{C}_6^4$ $\mathfrak{C}_6^5$	76, 77 a	$y = b \mp s\lambda/3;\ y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$	
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+1} + \lambda_1$	44, 45
$\mathfrak{C}_6^6$	78 a	$y = b + s\lambda/2;\ y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$	
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+1} + \lambda_1$	46

Гемисимморфные системы отсутствуют.

Пирам. гемиморфия

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		Симморфные системы		Гемиморфия
$\mathfrak{C}_{6,v}^{1}$	50 s	$y = b + \lambda;\ \ y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	
		Гемисимморфные системы		
$\mathfrak{C}_{6,v}^{2}$	44 h	$y = b + k\lambda/2;\ \ y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0,$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{C}_{6,v}^{4}$	79 a	$y = b + s\lambda/2;\ \ y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0,$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{C}_{6,v}^{3}$	80 a	$y = b + (s + k)\lambda/2;$ $y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;\ \ y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	
		Симморфные системы		Ромб. тет.
$\mathfrak{C}_{3,i}^{1}$	51 s	$y = n^s b + \lambda;\ \ y_0 = \overset{6}{b}_s + y_0.$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+1} + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{C}_{3,i}^{2}$	52 s	$y = n^s b + g\lambda/3;$ $y_0 = \overset{6}{b}_s + (g + f)\lambda_0/3;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+1} b + f\lambda_0/3$	—	
		Гемисимморфные и асимморфные системы отсутствуют.		
		Симморфные системы		Бипир. гем.
$\mathfrak{S}_{6,h}^{1}$	53 s	$y = n^k b + \lambda;\ \ y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+1} + \lambda_0$	—	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{S}_{6,h}^{2}$	81 a	$y = n^k b + s\lambda/2;$ $y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;\ \ y_1 = \overset{6}{b}_{s+1} + \lambda_0$	—	
		Гемисимморфные системы отсутствуют.		

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		Симморфные системы		Трапецоэдр. гемиэдрия
$\mathfrak{D}_6^1$	54 s	$y = n^k b + \lambda;\quad y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	53	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{D}_6^2, \mathfrak{D}_6^3$	82, 83 a	$y = n^k b \mp s\lambda/6;\quad y_0 = b_s + \lambda_0;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	48, 49	
$\mathfrak{D}_6^4, \mathfrak{D}_6^5$	84, 85 a	$y = n^k b \mp s\lambda/3;\quad y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	50, 51	
$\mathfrak{D}_6^6$	86 a	$y = n^k b + s\lambda/2;\quad y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	52	

Гемисимморфные системы отсутствуют.

		Симморфные системы		Скаленоэдрическая гемиэдрия
$\mathfrak{D}_{3,d}^1$	55 s	$y = n^s b + \lambda;\quad y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{D}_{3,d}^3$	56 s	$y = n^s b + \lambda;\quad y_0 = \overset{6}{b}_s + f\lambda_0/3;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	—	
$\mathfrak{D}_{3,d}^5$	57 s	$y = n^s b + f\lambda/3;$ $y_0 = \overset{6}{b}_s + f\lambda_0/3;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + f\lambda_0/3$	—	
		Гемисимморфные системы		
$\mathfrak{D}_{3,d}^2$	45 h	$y = n^s b + (s + k)\lambda/2;$ $y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$ $y_1 = \overset{6}{b}_{s+n} k + \lambda_0$	—	

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
$\mathfrak{D}^4_{3,d}$	46 h	$y = n^s b + (s + k)\lambda/2;$		Скаленоэдрическая гемиэдрия
		$y_0 = \overset{6}{b}_s + f_0\lambda/3;$		
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+n}k + f\lambda_0/3$	—	
$\mathfrak{D}^6_{3,d}$	47 h	$y = n^s b + f\lambda/3 + (s + k)\lambda/2;$		
		$y_0 = \overset{6}{b}_s + f\lambda_0/3;$		
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+n}k + f\lambda_0/3$	—	

Асимморфные системы отсутствуют.

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		Симморфные системы		Голоэдрия
$\mathfrak{D}^1_{6,h}$	58 s	$y = n^{k+l} b + \lambda;\quad y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0,$		
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+n}k + \lambda_0$	—	
		Гемисимморфные системы		
$\mathfrak{D}^2_{6,h}$	48 h	$y = n^{k+l} b + l\lambda/2.$		
		$y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0,\quad y_1 = \overset{6}{b}_{s+n}k + \lambda_0$	—	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{D}^3_{6,h}$	87 a	$y = n^{k+l} b + s\lambda/2;$		
		$y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0;$		
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+n}k + \lambda_0$	—	
$\mathfrak{D}^4_{6,h}$	88 a	$y = n^{k+l} b + (s + l)\lambda/2;$		
		$y_0 = \overset{6}{b}_s + \lambda_0,$		
		$y_1 = \overset{6}{b}_{s+n}k + \lambda_0$		

VI. Тессеральная система

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		Симморфные системы		Тетартоэдрия
$\mathfrak{T}^1$	59 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + \lambda;$		
		$x_1 = m^k \overset{3}{a}_{s+1} + \lambda;$		
		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2} + \lambda$	54	
$\mathfrak{T}^3$	60 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda/2;$		

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение		№ по Зонке
			$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + f\lambda/2;$	
			$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2} + f\lambda/2$	56
$\mathfrak{T}^2$	61s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + (f+g)\lambda/2;$	
			$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2} + g\lambda/2$	55
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{T}^4$	89a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (j+k)\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + j\lambda/2;$	
			$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2} + k\lambda/2$	58
$\mathfrak{T}^5$	90a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + (f+k)\lambda/2;$	
			$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2} + (f+j)\lambda/2$	57

Тетартоэдрия

Гемисимморфные системы отсутствуют.

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение			№ по Зонке
		Симморфные системы			
$\mathfrak{T}_h^1$	62s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + \lambda;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + \lambda;$	$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2} + \lambda$	—
$\mathfrak{T}_h^5$	63s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + f\lambda/2;$	$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2} + f\lambda/2$	—
$\mathfrak{T}_h^3$	64s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + (f+g)\lambda/2;$	$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2} + g\lambda/2$	—
		Гемисимморфные системы			
$\mathfrak{T}_h^2$	49h	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (j+k+l)\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + (j+k+l)\lambda/2;$	$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2} + (j+k+l)\lambda/2$	—
$\mathfrak{T}_h^4$	50h	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (f+j+k+l)\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + (f+g)\lambda/2;$	$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2} + g\lambda/2$	—
		Асимморфные системы			
$\mathfrak{T}_h^6$	91a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + l\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + j\lambda/2;$	$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2} + k\lambda/2$	—
$\mathfrak{T}_h^7$	92a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (f+l)\lambda/2;$	$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+1} + (f+j)\lambda/2;$	$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2} + (f+k)\lambda/2$	—

Додекаэдрическая гемиэдрия

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		Симморфные системы		
$\mathfrak{T}_d^1$	65 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + \lambda;$		Тетраэдрическая гемиэдрия
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + \lambda;$		
		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2n} l = \lambda$	—	
$\mathfrak{T}_d^3$	66 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda / 2;$		
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + f\lambda / 2;$		
		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2n} l + f\lambda / 2$	—	
$\mathfrak{T}_d^2$	67 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda / 2;$		
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + (f + g) \lambda / 2$	—	
		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2n} l + g\lambda / 2$	—	
		Гемисимморфные системы		
$\mathfrak{T}_d^4$	51 h	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + l\lambda / 2,$		Тетраэдрическая гемиэдрия
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + l\lambda / 2;$		
		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2n} l + l\lambda / 2$	—	
$\mathfrak{T}_d^5$	52 h	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (f + l) \lambda / 2;$		
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + (f + g) \lambda / 2;$		
		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2n} l + g\lambda / 2$	—	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{T}_d^6$	93 a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (2f + l) \lambda / 4;$		
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + (2f + 2k + l) \lambda / 4;$	—	
		$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{s+2n} l + (2f + 2j + l) \lambda/4$	—	

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке	
		Симморфные системы		Гироэдрическая гемиэдрия
$\mathfrak{O}^1$	68 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + \lambda;$		
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + \lambda,$		
		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n} l + \lambda$	59	
$\mathfrak{O}^5$	69 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda / 2;$		
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + f\lambda / 2;$		
		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n} l + f\lambda / 2$	61	
$\mathfrak{O}^3$	70 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda / 2,$		
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} l + (f + g)\lambda / 2;$		
		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n} l + g\lambda / 2$	60	
		Асимморфные системы		
$\mathfrak{O}^6$	94 a	$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a}_s + (2k + j)\lambda / 4;$		
		$x_1 = n^{k+l} \overset{3}{a}_{s+n} l + (2j - k)\lambda / 4;$		
		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n} l + (k - j)\lambda / 4$	65	
$\mathfrak{O}^7$	95 a	$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a}_s + (2k - j)\lambda / 4;$		
		$x_1 = n^{k+l} \overset{3}{a}_{s+n} l + (2j + k)\lambda / 4;$		
		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n} l + (j - k)\lambda / 4$	66	
$\mathfrak{O}^8$	96 a	$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a}_s + (2f + j)\lambda / 4;$		
		$x_1 = n^{k+l} \overset{3}{a}_{s+n} l + (2f - k)\lambda / 4;$		
		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n} l + (2f + k - j)\lambda / 4$	62	
$\mathfrak{O}^4$	97 a	$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a}_s + (2f + l)\lambda / 4;$		
		$x_1 = n^{k+l} \overset{3}{a}_{s+n} l + (2g + l)\lambda / 4;$	63	
		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n} l + (2f + 2g + l)\lambda / 4$	63	

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
$\mathfrak{D}^2$	98 a	$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a}_s + l\lambda / 2;$	
		$x_1 = n^{k+l} \overset{3}{a}_{s+n} l + l\lambda / 2;$	
		$x_2 = n^{j+k+l} \overset{3}{a}_{s+2n} l + l\lambda / 2$	64

Гемисимморфные системы отсутствуют.

Гироэдрич. гемиэдрия

Симморфные системы

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
$\mathfrak{D}_h^1$	71 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + \lambda;$	
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} m + \lambda;$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m + \lambda$	—
$\mathfrak{D}^9$	72 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda / 2,$	
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} m + f\lambda / 2;$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m + f\lambda / 2$	—
$\mathfrak{D}^6$	73 s	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + f\lambda / 2;$	
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+2n} m + (f + g) \lambda / 2,$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m + g\lambda / 2$	—

Гемисимморфные системы

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
$\mathfrak{D}_h^2$	53 h	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (j + k + l + m) \lambda / 2;$	
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} m +$	
		$+ (j + k + l + m) \lambda / 2,$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m +$	
		$+ (j + k + l + m) \lambda / 2$	—
$\mathfrak{D}_h^6$	54 h	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s +$	
		$+ (f + j + k + l + m) \lambda / 2$	—

Голоэдрия

Символ Шенфлиса	№	Аналитическое выражение	№ по Зонке
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} m + {}$	
		$+ (f + g) \lambda / 2;$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m + g\lambda / 2$	—
		Асимморфные системы	
$\mathfrak{D}_h^{10}$	99 h	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (f + l) \lambda / 2$	—
		$-(m - j) \lambda / 4;$	
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} m + (f + j) \lambda / 2$	—
		$-(m - k) \lambda / 4;$	
		$x_2 = n^j \overset{3}{a}_{s+2n} m + (f + k) \lambda / 2$	—
		$-(m - l) \lambda / 4$	—
$\mathfrak{D}_h^{7}$	100 a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (2f + l - k) \lambda / 4;$	
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} m + (2g + j + l) \lambda/4;$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m + {}$	
		$+ (2f + 2g + k - j) \lambda / 4$	—
$\mathfrak{D}_h^{8}$	101 a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (f + m) \lambda / 2 -{}$	
		$-(j - k + l) \lambda / 4;$	
		$x_1 = n^l \overset{3}{a}_{s+n} m + (g + m) \lambda / 2$	—
		$-(j + k + l) \lambda / 4;$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m + {}$	
		$+ (f + g + m) \lambda/2$	—
		$-(-j + k - l) \lambda / 4$	—
$\mathfrak{D}_h^{3}$	102 a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + m\lambda / 2;$	
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} m + m\lambda / 2;$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m + m\lambda / 2$	—
$\mathfrak{D}_h^{4}$	103 a	$x_0 = n^j \overset{3}{a}_s + (j + k + l) \lambda / 2;$	
		$x_1 = n^k \overset{3}{a}_{s+n} m + (j + k + l) \lambda / 2;$	
		$x_2 = n^l \overset{3}{a}_{s+2n} m + (j + k + l) \lambda / 2$	—

Голоэдрия

В качестве первого примера возьмем (18 s) или $\mathfrak{B}_h^1$. Здесь параметры j, k и l выражают плоскости симметрии, перпендикулярные к осям y, z и v.

Сравнение с уравнениями (8) в табл. I показывает нам, что мы здесь имеем дело с голоэдрией ромбической системы. Отсутствие параметров в трансляционных членах уравнения показывает, что все три плоскости симметрии пересекаются в начальной точке. Кроме этих плоскостей симметрии и плоскостей симметрии, определяемых трансляциями λ, λ_0 и λ_1, следует принять еще во внимание существующие по теореме 7 равнодействующие плоскости симметрии. Так как две плоскости симметрии, пересекающиеся под прямым углом, образуют двойную ось симметрии в линии пересечения, то в рассматриваемой системе существует также система двойных осей симметрии, а именно —идентичная с системой (9 s). Таким образом (18 s) рассматривается как система (9 s), к которой добавлена одна плоскость симметрии. Отсюда как необходимое следствие находятся и все другие плоскости симметрии.

Уравнения (20 h) или $\mathfrak{B}_h^2$ легко выводятся из уравнений (18 s), так как они возникают из первых путем прибавления трансляционных членов

$$(j+k+l)\lambda/2;\ (j+k+l)\lambda_0/2;\ (j+k+l)\lambda_1/2.$$

В связи с тем, что координаты этих компонент содержат параметры, выражающие плоскости симметрии, можно этот случай интерпретировать также так, что уравнение (18 s) распадается на две аналогичные подсистемы, которые симметричны (зеркально равны) друг относительно друга.

Одну из этих систем закрепим неподвижно, а вторую подвергнем трансляционному движению, компоненты которого по осям y, z, v имеют вышеприведенные величины. При такой операции плоскости симметрии исчезают и заменяются плоскостями скольжения, которые, однако, не проходят через

начало координат, а находятся на расстояниях $\lambda/4$, $\lambda_0/4$, $\lambda_1/4$ от этой точки. Здесь мы имеем, таким образом, согласно определению, гемисимморфную систему. Элементарные фигуры этой системы имеют симметрию гемиэдрии ромбической системы.

Гемисимморфную систему вообще легко узнать непосредственно из уравнений. Она характеризуется тем, что в коэффициентах трансляционных членов находятся только параметры, выражающие собственную симметрию (т. е. симметрию второго рода).

При этом такая система легко выводится из симморфной[1] по одному из только что упомянутых способов.

Точно так же выводится система (30 h), т. е. $\mathfrak{B}_d^2$ из системы (32 s), т. е. $\mathfrak{B}_d^1$.

Эту систему будем передвигать в направлении оси y (главной оси) на длину $\lambda/2$. Тогда находящиеся в (32/s) плоскости симметрии исчезнут и заменятся плоскостями скольжения. Так же возникает (37 h) или $\mathfrak{D}_{4,h}^4$ из системы (36 s) или $\mathfrak{D}_{4,h}^1$, как, например, (20 h) из (18 s). Совершенно аналогичным способом возникает (49 h), или $\mathfrak{T}_h^2$ из (62 s) или $\mathfrak{T}_h^1$; (51 h) или $\mathfrak{T}_d^4$ из (65 s) или $\mathfrak{T}_d^1$ и (53 h) или $\mathfrak{O}_h^2$ из (71 s) или $\mathfrak{O}_h^1$. Все эти системы, как видно далее, действительно имеют своих представителей в природе.

III. О ПРАВИЛЬНОМ ДЕЛЕНИИ ПРОСТРАНСТВА

Вопрос о правильном делении пространства был, насколько я знаю, в первый раз поставлен и исследован в моих „Началах учения о фигурах“.

Обсуждению этого вопроса посвящен один из пяти разделов моей обширной книги.[2] Позднее Шенфлис, не зная

---

[1] Это описано в „Симметрии правильных систем фигур“ автора.

[2] Это выполнено в „Симметрии правильных систем“ автора.

моей работы, пришел к той же самой идее, которую он развил в небольшой статье „О правильном делении пространства на элементарные части“.

Сходство в основной идее было настолько поразительным, что я тотчас же произвел подробное сопоставление полученных результатов.[1]

Здесь я хотел изложить сначала главные результаты, полученные Шенфлисом, и затем важнейшее из того, что содержалось в моем произведении. Я могу рассматривать следующие основные определения Шенфлиса как тождественные с моими:

„Под правильным делением пространства мы понимаем такое расчленение пространства на сплошь равные области, при котором каждая область окружена совокупностью всех остальных областей одинаковым образом“. Эти области я назвал *стереоэдрами.*

Каждое пространственное деление тесно связано с правильной системой точек, что становится очевидным из следующей фразы:

„В случае правильного деления пространства соответственные точки основных отдельных участков образуют правильную систему точек“ (стр. 562).

Система стереоэдров, выполняющих пространство, является только одним, особенно важным, примером правильной системы фигур, которая характеризуется тем, что равные (также и зеркально-равные) фигуры без остатка выполняют пространство.

Что касается формы основных пространственных участков, т. е. стереоэдров, то Шенфлис устанавливает следующие теоремы:

---

[1] В маленькой статье „Заметки об успехах теоретической кристаллографии за последнее десятилетие“ я вообще подчеркивал, что в этой области русские произведения предшествовали иностранным и были глубже проработаны (Зап. Мин. общ., 1890, т. XXV, стр. 345).

1) „Точки, лежащие на поверхности основного участка, образуют пары так, что для каждой из них существует другая ей равнозначная“ (стр. 573).

2) „Ни одна поворотная ось или плоскость симметрии не проникает внутрь простого основного участка. Напротив, все эти оси и плоскости принадлежат поверхности основного участка“.

Щенфлис добавляет еще замечание:

„Других условий, помимо этих теорем, для основных участков не существует. Их форма является в высшей степени неопределенной и может многообразно варьировать“.

Особенно важны также следующие теоремы:

3) „Каждой типичной группе G', которая является подгруппой пространственной группы Г, соответствует определенная группировка принадлежащих Г простых пространственных участков в более крупные участки Ф. Участок Ф обладает симметрией группы G'. Вместе с тем он не обязательно является замкнутым многогранником“ (стр. 580).

4) „Если точечная группа G является такой подгруппой Г, которая содержит все проходящие через определенную точку O элементы симметрии Г, то ей соответствует правильное деление пространства на сплошь замкнутые участки с симметрией G_m“ (стр. 584).

5) „Каждое принадлежащее данной пространственной группе Г простое правильное скопление молекул может быть разложено на конечное число равных молекулярных решеток. Никакие две молекулы, принадлежащие различным решеткам, не имеют параллельной ориентировки. Число p дает число операций изоморфной Г подгруппы G“ (стр. 588).

Из последней теоремы следует,[1] что когда мы рассматриваем совокупности различных друг другу непараллельных близлежащих молекул, принимая их, например, за

---

[1] Эта теорема соответствует теореме 52 Зонке (l. c., стр. 178) и теореме 48 в „Началах учения о фигурах“.

усложненную молекулу, то система окажется сплошь состоящей из подобных молекул, находящихся в параллельном положении. [1]

Деление пространства, соответствующее таким усложненным молекулам, будет обладать тем удивительным свойством, что совокупность соответственных пространственных участков в параллельном положении без остатка выполняет пространство.

Как раз эти пространственные участки, которые мной названы *параллелоэдрами*, я считаю особенно важным предметом для исследования. Им я уделил не мало места в своих „Началах учения о фигурах".

Прежде чем перейти к результатам этого исследования, я хочу охарактеризовать в кратких чертах физическое значение правильного просгрансгвенного деления.

Не вдаваясь глубоко в гипотетические представления о природе сил связи и химических молекул, мы можем, однако, констатировать, что ясное познание этой природы связано с понятием об элементарных единицах, из которых слагается каждое кристаллически однородное тело.

Всестороннее и основательное исследование таких единиц связано с познанием участков, получающихся при делении пространства, а также геометрических форм, принадлежащих таким участкам. Поверхность подобных форм отделяет данный участок от соседних.

Будем рассматривать такие пространственные участки как сферу. Тогда для каждой точки пространства можно утверждать, что она либо лежит внутри подобной сферы и тем самым принадлежит больше одной молекуле, чем дру-

---

1) Хотя Зонке и писал, что „это соединение определенного числа точек в тесные группы является в высшей степени произвольным, часто даже прямо неестественным" (l. c. стр. 179), однако нельзя забывать того, что как бы это ни казалось неестественным, винтовая система (в которой наблюдается подобная неестественность) при растворении в жидкости должна разрушаться. Не является ли тем самым неестественной сама винтовая система?

гим, либо что она лежит на границе двух или нескольких сфер и таким образом принадлежит поверхности пространственных участков.

Следует указать при этом, что охарактеризованная мной таким образом молекулярная сфера существенно отличается от „сфер действия“ физиков, так как точка, лежащая в центре определенной молекулярной сферы, одновременно находится в сфере действия многих других молекул.

Согласно излагаемой теперь точке зрения кристаллическое вещество можно представить себе как правильную систему фигур, без остатка выполняющих пространство.

Если мы когда-нибудь будем в состоянии ограничивать кристаллическую молекулу как нечто самостоятельное, то мы будем также знать, какой симметрии отвечает молекула. Мы сможем тогда ответить на вопрос о том, совпадает ли симметрия молекулы с симметрией всей системы или же нет.

Если симметрия молекулы совпадает с симметрией системы, то величина ее симметрии должна быть меньше, чем величина симметрии системы, так как все принадлежащие молекуле движения совмещения должны принадлежать также и системе, но не наоборот. Всегда возможно, что движение совмещения системы не приводит молекулу в совмещение саму с собой, но приводит ее в совмещение с некоторой другой молекулой системы. На этом основывается выше уже упомянутое разделение правильных систем на три группы:

1) Симморфные системы принадлежат тому же виду симметрии, как и элементарные фигуры.

В этом случае все пространство выполняется параллельно расположенными фигурами — иначе параллелоэдрами, — имеющими ту же симметрию, что и вся система в целом.

2) Гемисимморфная система имеет обыкновенно только элементы симметрии совмещения, общие с элементарными фигурами.

В этом случае параллелоэдр собственно состоит из двух фигур (следовательно он является „сложным“ параллело-

эдром по определению учения о фигурах), причем одна из этих фигур является симметричной по отношению к другой.

Наконец, 3) асимморфная система обыкновенно не имеет ни одного элемента симметрии совмещения, общего с элементарными фигурами. Соответственные параллелоэдры здесь являются в значительной мере неопределенными. При этом согласно теореме 3 Шенфлиса сложный параллелоэдр, получающийся в результате пространственного деления, в этом случае не обязательно должен быть замкнутым многогранником.

Ввиду большого физического значения понятия о параллелоэдре, я математически излагал предмет с особой подробностью.[1]

В первую очередь следует принять во внимание общие определения и ограничивающие условия, необходимые для полного разъяснения этого важного понятия.

А) Параллелоэдр, внутри которого находится центр инверсии, называется *примитивным*. В противоположном случае он называется *вторичным*.

Для того, чтобы сделать ясным значение этого ограничивающего условия, я даю в таблице в конце статьи (после 332 стр.) изображения примитивного (фиг. 7) и очень близкого к нему вторичного (фиг. 8) параллелоэдров.

Из этого примера выясняется в результате, что вторичный параллелоэдр можно выводить путем приложения или отнятия равных частей из примитивного параллелоэдра.

Таким образом вторичные параллелоэдры по сравнению с примитивными имеют только второстепенное значение.

Б) Примитивный параллелоэдр я называю *простым* параллелоэдром, когда он обладает лишь одной парой равных и параллельных граней. В противном случае он является *сложным*.

---

[1] Эта математическая трактовка привела меня к новой теории структуры кристаллов, которая была представлена в ряде докладов на заседаниях Минералогического общества в 1881 г. (см.: Зап. Мин. общ., т. XVII, стр. 381; т. XVIII, стр. 282; т. XXVI, стр. 433).

Примечание. Согласно общей теореме, каждой грани параллелоэдра соответствует равная и параллельная ей грань; грани появляются таким образом только попарно.

Примером сложного параллелоэдра служат два параллелоэдра, которые имеют одну общую грань. В „Началах учения о фигурах" выведены все возможные виды простых параллелоэдров.

Именно таковыми являются:

1) *Трипараллелоэдр* (= параллелепипед)[1]

2) *Тетрапараллелоэдр* (= гексагональная призма с базисными гранями)[2]

3) a) обычный и b) удлиненный *гексапараллелоэдр*[3]

Фигура a) является ромбододекаэдром (фиг. 9, табл.) и все фигуры, выводимые из него путем однородных деформаций b) легко вывести из a), как это видно из фиг. 10 (табл. 1).

4) *Гептапараллелоэдр* (фиг. 7).[4]

Этим исчерпываются все возможные виды простых выпуклых параллелоэдров.

(Существует еще три вида простых параллелоэдров с вогнутыми углами, в указанном произведении даны их изображения).

Теперь я обращусь к одной важной теореме из того же труда: „Всякий выпуклый параллелоэдр есть параллелоэдр простой" (стр. 219).

---

1) Кристаллографически представляются как комбинации $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$.

2) Кристаллографически представляется как комбинация $\{111\}$ и $\{1\bar{1}0\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{01\bar{1}\}$.

3) Кристаллографически представляются как комбинации $\{110\}$, $\{101\}$, $\{011\}$, $\{1\bar{1}0\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{01\bar{1}\}$.

4) Кристаллографически представляются как комбинации $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$ и $\{111\}$...

Огромное значение этой теоремы выясняется из того, что при предположении выпуклости молекулярных сферы мы тем самым все возможные формы этих сфер сводим к малому числу только что перечисленных форм.

Вряд ли можно игнорировать данное предположение, и я не думаю, что физик станет его оспаривать.

Приняв эту гипотезу, мы получим тотчас же важный результат, согласно которому молекулярные сферы существуют вообще только в очень небольшом количестве форм. Так, например, для кристаллических веществ тессеральной системы остаются только формы 1), 3а) и 4).

Данная гипотеза, однако, не ограничивает произвола для веществ, кристаллизующихся в других системах.

Для этих случаев я предлагаю другую гипотезу, которая мне также кажется приемлемой.

Моя вторая основная гипотеза основывалась на том факте, что, с одной стороны, все дедуктивно выводящиеся тессеральные формы, обладающие наибольшей симметрией, действительно встречаются на природных кристаллах; с другой стороны, все остальные, менее симметричные природные формы кристаллов выводятся из первых (к которым мы добавим еще голоэдрически-гексагональные формы, также действительно существующие в природе) с помощью применения так называемых „однородных деформаций“ („афинность“ или „кристаллографическая проективность“).

Таким образом для всех других систем в качестве возможных форм молекул предполагаются те же самые виды параллелоэдров (с добавлением тетрапараллелоэдра (т. е. выпуклой гексагональной призмы).

Фигуры, выводящиеся по такому способу (путем однородных деформаций) из вышеназванных основных параллелоэдров, я называл „нормальными“ параллелоэдрами.

Введение понятия нормальных параллелоэдров ограничивает произвол в понимании молекулярных сфер симморфных и гемисимморфных, но не асимморфных систем.

С другой стороны, мы уже видели, что именно в последнем случае понятие о параллелоэдре как о чем-то цельном отсутствует там, где параллелоэдр не является замкнутым многогранником. Таким образом это понятие здесь было бы чисто спекулятивным, не имеющим объективного значения в отношении природного объекта.

Оно лежит таким образом в самой природе вещей. Поэтому кристаллические структуры, названные мной асимморфными, я наперед отнес к невозможным или, по меньшей мере, к маловероятным. В связи с этим при исследовании структур некоторых минералов я принимал во внимание только симморфные и гемисимморфные системы.

Теоретики,[1] писавшие о кристаллической структуре, до сих пор отождествляли представление о возможных видах структур с представлением о правильных системах точек. Даже Шенфлис оставался на этой точке зрения. При этом различие в отдельных системах точек основывается на различии пространственного положения элементов симметрии.

Однако мы будем считать, что виды структур являются различными только тогда, когда их параллелоэдры различны, хотя бы элементы симметрии оставались при этом полностью идентичными. Таким образом теория правильного деления пространства привела нас к совершенно новой точке зрения.

Итак, возможный род структур определяется не только посредством элементов симметрии, но также с помощью нормальных параллелоэдров и закона разделения последних на стереоэдры. Таким образом, например, для гемиэдрии и голоэдрии триклинной сингонии возможны одна правильная система точек и четыре правильные системы параллелоэдров, а следовательно и четыре рода кристаллических структур.

---

[1] По-моему, такие исследователи не кладут вообще никакого ясного и единого принципа в основу своих изысканий.

Все роды структур, соответствующие симморфным системам, изображены в моей работе (табл. IV и V). Число их равно 131 (число соответствующих систем точек только 73). Все симморфные виды структур даны в виде таблицы там же, кроме (16 h) и (17).[1]

IV. ПРИМЕНЕНИЕ К МИНЕРАЛАМ

Само собой разумеется, что здесь я не могу с достаточной полнотой изложить целый ряд применений, описанных в моих русских работах и докладах. Я хотел бы однако по возможности ознакомить читателя с главнейшими из них.

1. Законы роста кристалла

Простейшее и, по моему мнению, также важнейшее применение вышеописанной теории структуры кристаллов состоит в доказательстве того, что для каждого кристалла существуют только определенные и ограниченные в своем числе направления, по которым кристалл может расти. Эти направления и их число соответствуют граням тех параллелоэдров, которые представляют форму молекулярных сфер.

Если принять для всех систем миллеровские символы (как это принято во всех моих работах) и обозначить, как и обычно, символ грани круглыми скобками ( ), а символ ребра прямыми скобками [ ], то мы выведем как результат теории, что каждой грани $(p_0 p_1 p_2)$ параллелоэдра соответствует направление роста $[p_0 p_1 p_2]$. Это направление в тессеральной системе и во многих других случаях перпендикулярно соответствующей грани. Однако это не всегда так.

Кроме того можно сказать, что при надлежащей установке кристалла индексы этого символа обыкновенно принимают значение 0 или 1 (см. примечание на стр. 321).

---

1) В таблице приведенных структур (16 h) следует вычеркнуть.

Не вдаваясь в подробности, я могу коротко ограничиться следующим:

Доказательство сказанного основывается на том, что при росте кристаллов новые молекулы могут присоединяться к ранее сгруппировавшимся кристаллам только таким образом, чтобы принадлежащие им молекулярные сферы выполняли нацело пространство, не оставляя никаких пустых промежутков.

Другими словами, при присоединении каждой новой молекулы грань параллелоэдра ее молекулярной сферы совпадает с соответствующей гранью ранее осевшей молекулы. При этом, однако, как это само собой разумеется, вполне и однозначно определяется направление наслоения, т. е. роста.

Уже в 1882 г. это дедуктивное следствие из теории было мной испытано и полностью подтверждено[1] с помощью довольно значительного ряда специальных наблюдений. Для этих наблюдений мне служили соли, растворимые в воде, причем особенно изучались вещества, кристаллизующиеся в тессеральной системе.

В тесной связи с этим заключением стоит другое, а именно, что грани, по которым при кристаллизации происходит наслоение, параллельны двум направлениям роста.

Во время наблюдений я наблюдал замечательное явление, а именно, почти во всех случаях направления роста соответствовали гептапараллелоэдрам. Этот эмпирический вывод позволяет пожалуй вспомнить о сделанном мной замечании (уже в „Началах учения о фигурах"), согласно которому гептапараллелоэдр среди всех других простых выпуклых

---

[1] Мой метод наблюдения состоял в том, что я получал путем быстрого испарения на предметном стекле так называемые скелеты кристаллов или фигуры роста и измерял углы направлений роста непосредственно под микроскопом. При этом, например, для тессеральных кристаллов наблюдались почти всегда углы в 109—110° или 70—71° (Зап. Мин. общ., 18, 282).

параллелоэдров обладает, при равном объеме, наименьшей поверхностью.[1] Я назвал вышеизложенные следствия из теории важнейшими ее применениями, так как, с одной стороны, это вполне согласуется с наблюдениями, а с другой стороны, упомянутые наблюдения, несмотря на их простоту, представили очень важные данные относительно структуры кристаллов.

2. Закон спайности кристаллов

Как известно, этот закон пытались вывести дедуктивно из теории уже первые теоретики, разработавшие учение о структуре, — Франкенгейм и Браве. Известно, что эта попытка рассматривалась как неудачная.

Это видно уже из того, что в последние годы Зонке предложил новую попытку, базирующуюся на новых взглядах.[2] Хотя я и считаю эту новую попытку неудовлетворительной, но здесь я не могу вдаваться более подробно в критику и удовольствуюсь лишь сопоставлением ее с моим совершенно новым принципом.[3]

Я исхожу из того, что когда кристаллически однородное тело испытывает внешний удар, вызывающий разделение кристалла в одной точке, можно заключить, что, по крайней мере, для ближайшего окружения этой точки должно существовать следующее условие:

Все параллелоэдры одной части должны отделяться по одному и тому же закону от другой части, по крайней мере в ближайшем очень маленьком участке, окружающем одну точку.[4]

---

[1] См. замечания П. Кюри (Bull. min. de Fr., t. 8, pp. 145—150).

[2] Ueber Spaltungsflächen und natürliche Kristallflächen. Zeitschr. f. Krist., Bd. XIII, s. 214.

[3] Он был опубликован в 1882 г. в журнале „Записки Минералогического общества“ (т. XVIII, стр. 282).

[4] В качестве простого примера применения этого принципа я возьму параллелоэдр в виде гексаэдра. Тогда мой принцип допускает существо-

Так как этот чисто механический принцип я не в состоянии развивать дальше, то я должен здесь довольствоваться лишь следующим важным выводом.

Возможно только очень ограниченное число плоскостей спайности, причем при надлежащей установке кристалла индексы этих плоскостей не превышают по величине 1.

Кроме того, этот принцип дает полную возможность объяснить существование на одном и том же кристалле различных плоскостей спайности, как просто наблюдается у многих кристаллов. Это явление противоречит принципу Браве — Франкенгейма так же, как и Зонке. Насколько я знаком с данным вопросом, я не знаю ни единого отклонения от выдвинутого мной принципа и его геометрических выводов.

3. Механические деформации кристаллов

В одной из опубликованных ранее статей[1] мной доказано с полной математической строгостью, что результатом механических деформаций кристалла могут быть лишь сдвиги и только по двум определенным законам:

а) плоскость сдвига является рациональной, а параллельное ей направление сдвига иррационально (такое, как и второе круговое сечение эллипсоида упругости).[2]

вание только следующих плоскостей спайности: 1) если параллелоэдры обеих частей отделяются только одной гранью, имеем случай грани гексаэдра, т. е. {100}; 2) если же те же самые параллелоэдры отделяются по двум граням, имеем случай ромбододекаэдра, т. е. {110}; 3) если же те же параллелоэдры разделяются по трем граням — имеем случай октаэдра {111}. Другие случаи, кроме трех перечисленных, невозможны.

[1] Опыт вывода сдвигов кристаллов из теории их структуры. Зап. Минералог. общ., 26, 433—445.

[2] Пользуюсь случаем, чтобы обратить внимание на то, что мной впервые детально была развита совершенно определенная теория эллипсоида упругости в третьем „Этюде по аналитической кристаллографии" (Горн. журн., 1886, № 12), т. е. раньше, чем я смог ознакомиться с аналогичной работой Либиша. Результаты данного исследования в основном согласуются

b) плоскость сдвига является иррациональной, а именно соответствующей так называемому ромбическому сечению, но параллельное ей направление сдвига рационально (также второе круговое сечение эллипсоида упругости).

Хотя сейчас еще рано говорить о полной согласованности этого структурно-теоретического вывода, но имеющиеся в нашем распоряжении эмпирические данные вполне соответствуют теории. Поэтому я и считал необходимым выполнить эти чисто геометрические исследования с полной строгостью.

4. О структурах некоторых минералов

Завершив строго математический вывод возможных видов структур кристаллов, я предпринял первую попытку [1] выяснения структуры ряда минералов. Само собой разумеется, что при этом мной выбирались наиболее изученные минералы.

В качестве первого опыта я остановился на бораците, перовските и лейците, изучавшимися многими выдающимися исследователями. Хотя даже в отношении этих минералов различные исследователи их не пришли к желаемому единству во взглядах, но все же полученные здесь результаты являются сравнительно наилучшими.

Попробую в нескольких словах охарактеризовать путь, которому я следовал при своей попытке.

Данные современной химии почти не оставляют сомнения в том, что степень сложности молекул зависит от внешних

с моими, ранее опубликованными. Я уже обращал однажды на это внимание (в моем историческом обзоре). Работа Либиша „Ueber eine besondere Art von homogenen Deformationen“ была опубликована в 1887 г. (Nachricht. v. d. kön. Wiss. zu Goettingen, № 15, стр. 435).

[1] „Первая попытка определить расположение частиц некоторых минералов“. Горн. журн., 1891, № 1, стр. 115—135. Попытки тех авторов, которые не знали совокупности всех возможных видов структур и таким образом не были вполне свободны в выборе случаев, я могу только рассматривать как преждевременные.

условий и в особенности от температуры. Очевидно также, что различные состояния одного и того же вещества зависят от этой сложности. При этом можно даже уяснить себе первопричину таких изменений. Она связана отчасти с большей или меньшей энергией молекулярного движения,— чем меньше энергия, тем сложнее будет молекула.

Исходя из этой первопричины, можно считать весьма вероятным, что не только при переходе из одного состояния в другое, но даже в границах одного и того же состояния, например в твердом состоянии степень сложности молекул может также изменяться в зависимости от температуры. И на самом деле опыт показывает, что при температурных изменениях большинство кристаллов, если вообще не все, испытывает существенные изменения, которые превращают данное тело в совершенно другое. Мне нет надобности говорить, что я при этом подразумеваю, конечно, полиморфизм.

Во всяком случае не все полиморфные превращения следует приписывать изменению комбинаций молекул. Гораздо чаще они стоят в тесной связи с новыми перегруппировками частей молекул. Другими словами, полиморфизм обусловливается не только полимерией, но также и метамерией.[1]

Здесь я хотел бы ограничиться такими случаями, где мы можем с большой вероятностью предполагать наличие полимерии. Как это ни странно, но эта гипотеза приводит нас к некоторым строго математическим выводам, дающим возможность получить из наблюдавшихся результатов ключ к познанию их первопричины.

В качестве основного закона физической кристаллографии можно принять закон, согласно которому все физические явления симметричного кристалла подчинены его симметрии. Этот закон формулируется следующим образом:

---

[1] Этому вопросу был посвящен ряд статей Леманна (Lehmann), опубликованных в журнале „Zeitschrift für Kristallographie". См. в особенности его новую работу „Молекулярная физика" („Molekularphysik").

Направлениям кристалла, характеризующимся одинаковой геометрической формой, соответствуют и одинаковые физические свойства.[1]

Химические свойства можно рассматривать при этом как особого рода физические же свойства.

Из вышеупомянутого закона следует, что когда в симметричном кристалле наблюдается не связанное с внешними воздействиями физическое или химическое явление, то это явление само является симметричным. Когда, например, при определенной температуре две химические молекулы притягиваются к третьей и когда, кроме того, обе первых молекулы соединены хотя бы тройной осью (это значит, что с помощью упомянутой тройной оси одна молекула, подобно фигуре правильной системы, приходит в совмещение с другой молекулой, причем и вся система совмещается сама с собой), то остается только возможным, что все три молекулы сольются вместе.

Если при этом через ось проходит плоскость симметрии, то сольются уже не три, а шесть молекул. В противном случае упомянутый здесь основной закон не был бы всеобщим, как это до сих пор признавалось кристаллографами.

После того, как три или шесть молекул сольются в одну, в правильной системе ось симметрии, или соответвенно ось симметрии с проходящей через нее плоскостью симметрии, исчезнет, и кристаллическое тело испытает превращение, которое будет различным, в зависимости от того, присутствовала ли одна ось симметрии отдельно или же она была связана с проходящей через нее плоскостью симметрии.

В обоих случаях превращение приводит к возникновению нового кристаллического тела или модификации с бо-

[1] Groth. Physikalische Kristallographie, S. 3; см. также: Liebisch. Physik. Krist., S. 2—3.

лее низкой симметрией. Последняя, согласно нашему предположению, должна быть совершенно определенной. Кроме того, легко доказать, что при этом возникает не однородный кристалл, а псевдосимметричный агрегат, симметрия которого подражает внешней симметрии первоначального однородного кристалла.[1]

Именно такой случай и представляют вышеназванные псевдосимметричные минералы (при обычной температуре они неоднородны, а при высоких температурах показывают высокую симметрию). Поэтому, как мне кажется, к ним вполне применимы вышеизложенные соображения.

Опуская дальнейшие детали, я хочу ознакомить читателя лишь с конечными результатами моего исследования. Именно, я пришел к выводу, что при высокой температуре

лейцит	подходит	к	структуре	(53 h),
борацит	„	„	„	(51 h),
перовскит	„	„	„	(49 h).

В то же время при обычной температуре эти же самые минералы находятся в превращенном состоянии и обладают другой структурой. Именно:

металейцит[2]	подходит	к	структуре	(37 h),
метаборацит	,,	,,	,,	(30 h),
метаперовскит	,,	,,	,,	(20 h).

Нельзя скрывать того, что мы еще далеки от полной согласованности прогнозов теории с опытом. Мало того, эти прогнозы не согласуются с теми опытными данными, которые до сих пор считались наиболее достоверными,

---

[1]) При исчезновении оси симметрии как таковой возникает агрегат, состоящий из участков с тремя различными ориентировками. Последние соединены друг с другом таким способом, как если бы эта ось еще отсутствовала.

[2]) Я решился предложить эти новые названия, исходя из того, что различные полиморфные модификации одного и того же вещества принято обозначать различными названиями. Кроме того, мои названия указывают на большую сложность молекул.

а именно со схемой Малляра,[1] касающейся сложения этих псевдосимметричных кристаллов. В связи с этим я произвел специальные наблюдения над перовскитом, которые с несомненностью показали, что схема Малляра является не вполне правильной. То, что он принимал за простой и однородный индивид, является на самом деле агрегатом, состоящим из тонких полисинтетических полос, лишь в совокупности подчиненных схеме Малляра.[2]

Заканчивая мои сопоставления, я чувствую, что преступил границы, положенные для подобной статьи. Быть может многое в этой статье останется для читателя неясным. В свое оправдание я должен отметить, что я пытался изложить в одной этой статье то, что составляло содержание целого ряда моих прежних обширных статей.

ДОПОЛНЕНИЕ

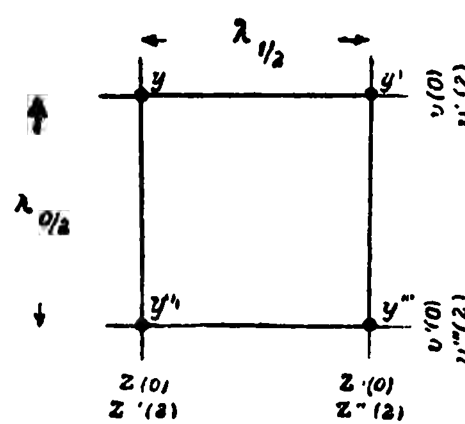
С большим удовлетворением была мною прочитана новая статья Л. Зонке. (Die Structur der optisch drehenden Kristalle, Zeitschr. f. Krist., Bd. XIX, S. 529).

Вместе с тем мне не совсем понятно, каким образом данные автором системы (т. е. простые) могут разделяться на две подсистемы, соединенные друг с другом посредством плоскости симметрии. Я думаю, что изготовленные Зонке и д-ром Штегом препараты не соответствуют тем структурам, которые описывает Зонке. Я остаюсь при своем мнении, которое уже раньше противопоставлялось мной теории Зонке („Заметка об успехах кристаллографии“, Зап. Мин. общ., т. XXVI) и которое до сих пор, к сожалению, не опровергнуто.

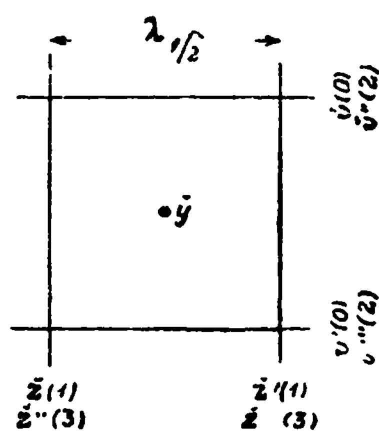
---

1) Mallard. De l'action de la chaleur sur les substances cristallisées. Bull. de la soc. min. de Fr., 1882, p. 233.

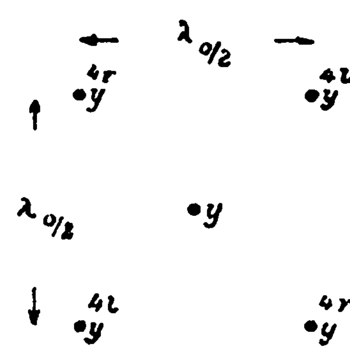
2) Результаты наблюдений были доложены в начале этого года на заседании здешнего Общества естествоиспытателей.



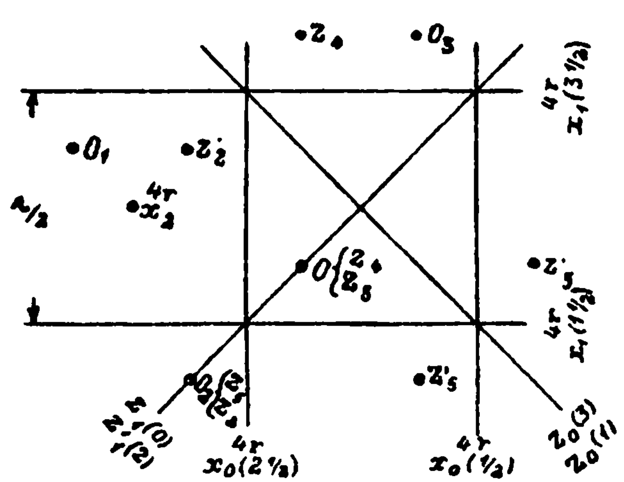
Фиг. 1



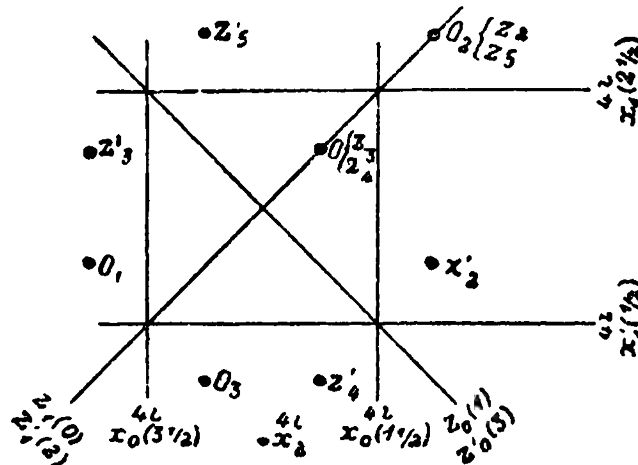
Фиг. 2



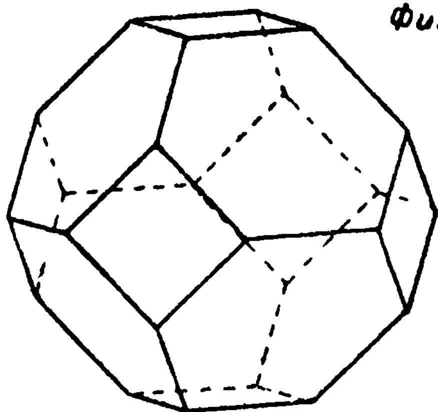
Фиг. 3



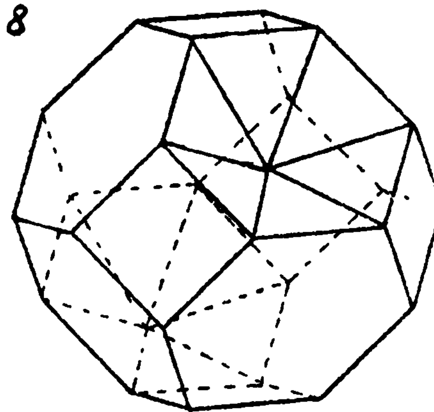
Фиг 5



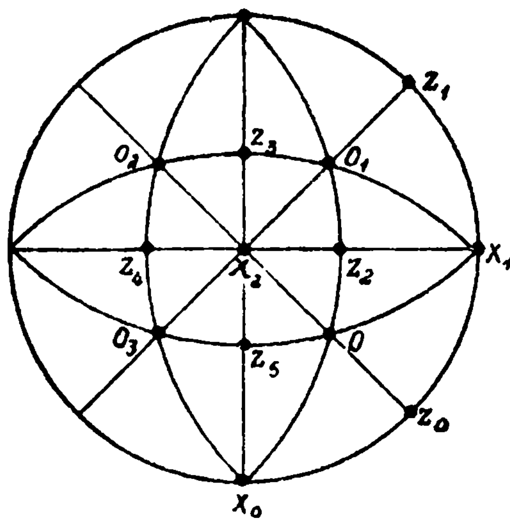
Фиг 6



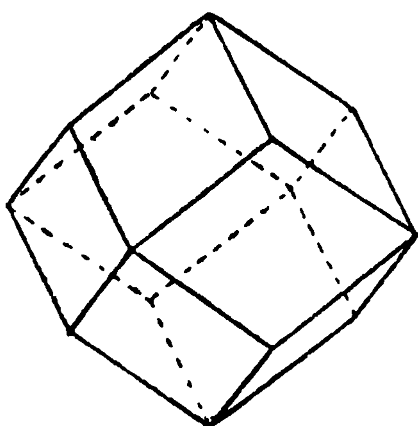
Фиг. 7



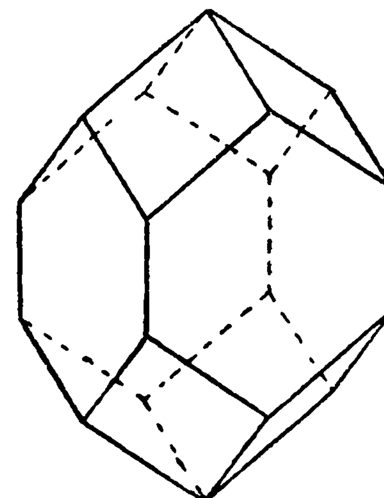
Фиг 8



Фиг. 4



Фиг 9



Фиг 10

ТЕОРИЯ СТРУКТУРЫ КРИСТАЛЛОВ

ВВЕДЕНИЕ[5]

ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Неблагоприятные внешние обстоятельства лишили меня возможности довести до конца работы по внутренней структуре различных кристаллов, хотя они и начаты были мною более десяти лет назад. Небольшой собранный опытный материал до сих пор почти не увидел света,[1] поскольку я это опубликование откладывал до возможности надлежащей его обработки. Так как все мои старания всецело посвятить себя науке оказались невыполнимыми, то я сейчас стою перед положением невозможности закончить начатые мною работы. Мне не остается ничего большего, как опубликовать все то, что получено мною в течение последних лет в немногие свободные минуты, хотя почти ничто не было доработано мною до конца.

Эти предварительные замечания должны оправдать меня перед товарищами по науке, почему в этом сообщении, которое я сдаю в печать с тяжелым сердцем, теория не дана в той завершенной форме, которая уже возможна сейчас,

---

[1] В „Записках Минералогического общества“ за 1882 и последующие годы; также в „Горном журнале“ и в „Трудах С.-Петербургского общества естествоиспытателей“ за 1891.

после моей двадцатипятилетней деятельности в этом направлении.

Полученный мною и предлагаемый широкой научной публике материал по теории структуры кристаллов я предполагаю разбить на несколько частей, которые появятся в этом журнале в различное время.

Публикуемая сейчас первая часть не относится, собственно, к теории структуры кристаллов, а является лишь введением чисто математического характера, как то мною многократно подчеркивалось.[1] К сожалению, вплоть до самого последнего времени, почти все силы работавших на этом поприще были посвящены именно этому вводному отделу нашей науки. Эти замечательные, чисто умозрительные исследования довели теорию правильных систем точек до весьма высокой степени совершенства, и мы можем утверждать, что уже сейчас имеем окончательный ответ на важнейшие вопросы этой теории. Последняя уже сейчас находится в таком состоянии, при котором она нуждается лишь в возможно более наглядном и выпуклом изложении, чтобы обеспечить распространение ее в широких научных кругах. Именно этой цели должен послужить предлагаемый мною труд, в соответствии с чем я заключаю свою работу подробным графическим изображением всех правильных систем точек, в добавление к аналитическим уравнениям, которые, с моей точки зрения, не менее наглядны, но, к сожалению, менее доступны широким кругам.

Настоящей работой, которая суммирует достижения науки о правильном разделении пространства, мы вступаем в рамки собственной теории структуры кристаллов.

---

1) Zeitschr. f. Krist., Bd. XXI, S. 588, прим. Более подробно в моем историческом очерке „Развитие кристаллографии в десятилетие 1880—1890“ (Зап. Мин. общ.).

ВЫВОД СИСТЕМ И ОТНОСЯЩИЕСЯ К ВЫВОДУ ТЕОРЕМЫ

Краткий исторический обзор последних достижений в этом учении был мною напечатан раньше.[1] С тех пор, в самое последнее время появилась еще одна работа, посвященная этому вопросу, а именно работа Барлоу,[2] которой посвящено несколько строк в конце этого введения.

Теория в законченной форме была мною напечатана еще в 1890 г.[3] Позднейшие работы из той же области подтвердили правильность всех ее выводов.[4] И так как принятый мною там метод и сейчас мне кажется наиболее простым и коротким, то я только могу его кратко повторить, не претендуя при этом на полноту изложения.

В основной моей работе имеется не только полный вывод всех систем, но даны также и аналитические их выражения в форме алгебраических уравнений. Последние дают возможность все выведенные результаты (230 возможных правильных систем точек) полностью воспроизвести на 13 страницах,[5] что при ином способе воспроизведения потребовало бы сотен страниц. В той же работе был демонстрирован метод наглядного графического изображения, которым я пользуюсь в настоящей работе. В ранее напечатанной работе этот графический метод мною был применен лишь для простых (Зонке) систем (хотя и в менее выразительной форме, чем это сделано в настоящей работе). В настоящей работе диаграммами иллюстрированы все правильные системы точек.

Учение о правильных системах точек, собственно, принадлежит к учению о симметрии вообще, которое в совре-

---

1) Заметка об успехах теоретической кристаллографии; также: Zeitschr. f. Krist., Bd. XXI, S. 588, прим.

2) Zeitschr. f. Krist., Bd. XXIII, SS. 1—63.

3) Симметрия правильных систем фигур.

4) В особенности в „Кристаллических системах и кристаллических структурах“ Шенфлиса и в только что упомянутой работе Барлоу.

5) Zeitschr. f. Krist., Bd. XX, SS. 48—61. В настоящей работе это число сведено к шести.

менной высоко развитой форме распадается на две главные части: учение о симметрии конечных фигур, заключающее в себе полный вывод всех *видов* симметрии, и учение о симметрии бесконечных правильных систем,[1] которое и предлагается в настоящей работе.

Подробное геометрическое исследование приводит нас к следующему расчленению элементов симметрии.[2]

1) *Винтовые оси.* Это понятие, поскольку оно входит в учение о симметрии, я считаю возможным рассматривать как общеизвестное. Оно подразумевает ось совмещения, операция которой составляется из поворота на рациональный угол (т. е. $2\pi/p$, где p — целое число) и смещения вдоль этой оси. Это последнее может иметь различную величину: если оно равно 0 (т. е. смещения нет совсем), то винтовая ось становится *осью симметрии.* Последнюю таким образом следует рассматривать как частный случай винтовой оси.

2) Симметрические скользящие плоскости или *плоскости скольжения,* т. е. такие плоскости, которые делят любую систему фигур на две части, из которых одна может быть совмещена с зеркальным отражением другой, но только тогда, когда это отражение будет смещено вдоль зеркальной плоскости. Для этого элемента характерна не

---

1) Это разделение отвечает такому же разделению, принятому в книге Шенфлиса „Кристаллические системы и кристаллические структуры“, которую конечно было бы более правильно назвать „Учение о симметрии“. На такие же две части распадается ранее появившаяся работа автора, вышедшая под двумя заглавиями: „Симметрия конечных фигур“ и „Симметрия правильных систем фигур“. Позднее (1891) они были дополнены работой „Симметрия на плоскости“. В последней, таким образом, к указанному учению о симметрии была добавлена третья часть, к которой относится также и работа автора „Проблема минимума в учении о симметрии“. В ней, в законченной форме, дано применение к этим вопросам принципа минимума. [N. Jahrb. Min. 1, 56 (1894)].

2) См. „Симметрия конечных фигур“ и „Симметрия правильных систем фигур“.

только величина смещения (как в винтовых осях), но также и направление смещения. Если эта величина равна 0, мы имеем частный случай: *плоскость симметрии.*

3) *Составная (сложная) симметрия.*

Легко показать, что конечные фигуры (т. е. фигуры конечных измерений во всех направлениях) не могут иметь ни винтовых осей (с конечным смещением — ходом вдоль оси), ни плоскостей скольжения (с конечным поступанием скольжения).[1] Для конечных фигур возможны таким образом только оси симметрии, плоскости симметрии и элементы составной (сложной) симметрии.

Точно так же легко доказывается, что в конечных фигурах не может быть двух непересекающихся осей.[2] При выводе видов симметрии (конечных фигур) таким образом нужно лишь исчерпать все комбинации из осей симметрии, плоскостей симметрии и элементов составной симметрии.

Если принять во внимание, что линии пересечения двух плоскостей симметрии являются осями симметрии,[3] то очевидно, что комбинации из плоскостей симметрии не могут быть получены независимо от комбинаций из осей, и потому естественно сначала вывести все комбинации из осей симметрии и лишь тогда исследовать, каким образом к этим комбинациям можно добавлять плоскости симметрии без того, чтобы при этом возникали новые комбинации осей.

Что касается составной (сложной) симметрии, то в учении о симметрии доказывается,[4] что 1) ось составной (сложной) симметрии всегда перпендикулярна к своей плоскости и 2) что, если к этому элементу симметрии добавить еще какой-нибудь другой (безразлично ось или плоскость симметрии), то мы всегда придем к ранее найденной ком-

---

1) Симметрия конечных фигур, стр. 5.

2) Там же, стр. 12.

3) Начала учения о фигурах, стр. 125 (§ 36), также стр. 32.

4) Там же, стр. 41.

бинации из осей симметрии и плоскостей симметрии. Случай составной симметрии, таким образом, является обособленным и не порождает далее новых видов симметрии.

Таким путем мы приходим ко всем видам симметрии, которые впервые полностью были установлены Гесселем.[1] Автор все виды симметрии выразил коротко, точно и наглядно с помощью аналитических уравнений, а также представил 32 кристаллографических вида симметрии графически.[2]

В настоящее время этот вывод единодушно принят всеми.

Сейчас мы обращаемся к трем понятиям учения о симметрии, которые будут исключительно полезны в дальнейшем исследовании. Это понятия 1) о независимых и о производных элементах симметрии, 2) о первоначальных и результирующих элементах симметрии и 3) о полных комбинациях первоначальных элементов симметрии.

Возьмем две какие-либо оси симметрии. При повороте вокруг одной из них возникает некоторое число других. При поворотах вокруг каждой из этих последних мы получаем все новые и новые оси, покуда мы, наконец, не придем к тому, что каждый поворот вокруг одной из осей *группы* совмещает все оси с уже существующими осями той же группы. Совокупность осей такой группы характеризует *вид симметрии*. Два вида симметрии различны, если в одном из них есть какая-либо ось (вообще говоря элемент симметрии), которой нет в других видах симметрии, или же она находится в таком положении к другим осям, в каком она не фигурирует в других группах. Мы видим, таким образом, что вся группа порождается в конечном счете только двумя *независимыми* элементами симметрии. Все другие

1) Физический словарь Гелера.

2) Симметрия конечных фигур. Краткое изложение дано также в Zeitschr. f. Krist., Bd. XX, S. 27 ff. Графическое изображение см. в „Кратком курсе кристаллографии“ автора; также: Zeitschr. f. Krist., Bd. XXI, Taf. XI.

элементы симметрии возникают в результате комбинированных поворотов вокруг исходных, и мы будем называть их *производными* элементов симметрии.

Комбинированный поворот вокруг двух осей по известной Эйлеровой теореме эквивалентен повороту вокруг *результирующей* оси. Таким образом, группа полностью определяется двумя независимыми осями, и все остальные оси, кроме начальных двух, будут результирующими. Одна и та же группа может быть полностью определена не только за счет выбранных двух исходных, но также и исходя из других пар. Каждую пару осей, удовлетворяющих этому условию, можно принять за независимую при систематическом выводе. Так, например, группа тетрагонально-трапецоэдрической симметрии определяется однозначно, если за независимые оси взять либо (вертикальную) четверную ось симметрии и ей перпендикулярную двойную или же если независимыми будут приняты две двойные оси симметрии, пересекающиеся под углом 45°. Точно так же гироэдрическая симметрия определяется полностью комбинацией (вертикальной) четверной оси симметрии с тройной (октаэдрической), или же с помощью той же тройной и той двойной (додекаэдрической), которая параллельна диагонали грани куба, но не перпендикулярна используемой тройной оси.

Этот результат обобщается в том смысле, что всякий класс симметрии может быть определен с помощью двух независимых элементов симметрии. Так, например, (гексакис) октаэдрический вид симметрии можно определить полностью с помощью четверной (вертикальной) оси симметрии и наклоненной к ней под углом 45° плоскости симметрии. Мы не останавливаемся сейчас на этом обобщении, поскольку понятие о независимых элементах симметрии играет основную роль именно в случае осей симметрии.

В последующем мы будем считать независимыми следующие пары осей.

Таблица независимых осей простых систем

А. Тессеральная (кубооктаэдрическая) система:

для гироэдрической симметрии октаэдрическая (0) и додекаэдрическая (z_0) ось;
для тетартоэдрической симметрии: октаэдрическая (0) и кубическая (x_0) оси.

В. Гексагональная система:

для гексагонально-трапецоэдрической симметрии: две двойные оси симметрии, пересекающиеся под углом в 30°;
для тригонально-трапецоэдрической симметрии: две двойные оси симметрии, пересекающиеся под углом 60°.

С. Тетрагональная система:

для тетрагонально-трапецоэдрической симметрии: две двойные оси симметрии, пересекающиеся под углом в 45°.

Д. Дигональная система:

для ромбо-сфеноэдрической симметрии: две двойные оси симметрии, пересекающиеся под углом в 90°.

Две независимые оси однозначно определяют группу осей, но они недостаточно удобны для прямого определения всех *одинаковых* направлений. Так, например, в случае гироэдрической симметрии за счет поворотов вокруг октаэдрической оси мы из одного заданного направления получим еще только два ему равных; за счет дальнейшего поворота вокруг додекаэдрической оси мы из заданного получим еще одно новое равное направление, а всего пока нами получено лишь четыре равных направления. Если проводить комбинированное вращение вокруг обеих осей, то мы сможем получить еще четыре новых направления, а всего с прежде полученными восемь, в то время как величина

симметрии для этого вида равна 24. Так как оси симметрии как раз и являются теми абстрактными образами, которые создаются для того, чтобы из какого-либо заданного направления получить все другие, ему равные, то мы видим, что комбинация двух независимых осей не удовлетворяет этому основному требованию. В соответствии с этим мы приходим к понятию *полной комбинации* первоначальных осей (в более общем смысле: элементов симметрии) как о такой, которая удовлетворяет указанному основному условию.

Приводим в табличной форме для каждого вида симметрии применяемые нами далее элементы симметрии полных комбинаций.

Таблица первоначальных элементов симметрии

I. Дигональная система

Триклинная подсистема

1. Гемипинакоидальная симметрия:[1] ни одного.
2. Пинакоидальная симметрия: двойная ось (и плоскость) составной симметрии.

Моноклинная подсистема

3. Гемипризматическая осевая симметрия: двойная (вертикальная) ось симметрии.
4. Гемипризматическая безосная симметрия: плоскость симметрии (горизонтальная).
5. Призматическая симметрия: двойная (вертикальная) ось симметрии и горизонтальная плоскость симметрии.

Ромбическая подсистема

6. Ромбо-сфеноэдрическая симметрия: вертикальная и горизонтальная двойная ось симметрии.

[1] Сокращенно вместо „вид симметрии“.

7. Ромбо-пирамидальная симметрия: вертикальная двойная ось симметрии и вертикальная плоскость симметрии.
8. Ромбо-бипирамидальная симметрия: та же комбинация осей, что и в случае 6, и еще горизонтальная плоскость симметрии.

II. Тетрагональная система

9. Тетрагонально-пирамидальная симметрия: четверная (вертикальная) ось симметрии.
10. Дитетрагонально-пирамидальная симметрия: та же ось и вертикальная плоскость симметрии.
11. Тетрагонально-сфеноэдрическая симметрия: четверная (вертикальная) ось (и к ней перпендикулярная плоскость) составной сложной симметрии.
12. Тетрагонально-бипирамидальная симметрия: четверная (вертикальная) ось симметрии и горизонтальная плоскость симметрии.
13. Тетрагонально-трапецоэдрическая симметрия: та же ось и перпендикулярная к ней двойная ось симметрии.
14. Тетрагонально-скаленоэдрическая симметрия: вертикальная и горизонтальная двойная ось симметрии и вертикальная (диагональная) плоскость симметрии, пересекающая горизонтальную ось под углом в 45°.
15. Дитетрагонально-бипирамидальная симметрия: те же оси, что в случае 13, и горизонтальная плоскость симметрии.

III. Гексагональная система

16. Тригонально-пирамидальная симметрия: тройная (вертикальная) ось симметрии.
17. Дитригонально-пирамидальная симметрия: та же ось симметрии и вертикальная плоскость симметрии.
18. Тригонально-бипирамидальная симметрия: та же ось симметрии и горизонтальная плоскость симметрии.

19. Тригонально-трапецоэдрическая симметрия: та же ось симметрии и горизонтальная двойная ось симметрии.
20. Дитригонально-бипирамидальная симметрия: те же две оси симметрии и горизонтальная плоскость симметрии.
21. Гексагонально-пирамидальная симметрия: шестерная (вертикальная) ось симметрии.
22. Дигексагонально-пирамидальная симметрия: та же ось симметрии и вертикальная плоскость симметрии.
23. Ромбоэдрическая симметрия: шестерная вертикальная ось (и к ней перпендикулярная плоскость) составной (сложной) симметрии.
24. Гексагонально-бипирамидальная симметрия: шестерная вертикальная ось симметрии и горизонтальная плоскость симметрии.
25. Гексагонально-трапецоэдрическая симметрия: та же ось симметрии и горизонтальная двойная ось симметрии.
26. Гексагонально-скаленоэдрическая симметрия: тройная (вертикальная) и двойная (горизонтальная) оси симметрии и кроме того еще одна вертикальная (диагональная) плоскость симметрии, пересекающая горизонтальную ось под углом в 30°.
27. Дигексагонально-бипирамидальная симметрия: те же оси, что в случае 25, и еще горизонтальная плоскость симметрии.

IV. Тессеральная (кубическая) система

28. Тетартоэдрическая симметрия: вертикальная и горизонтальная (кубические) двойные оси симметрии и тройная октаэдрическая ось симметрии.
29. Додекаэдрическая симметрия: те же оси симметрии и горизонтальная плоскость симметрии.
30. Тетраэдрическая симметрия: те же оси симметрии и вертикальная (диагональная) плоскость симметрии, проходящая через октаэдрическую ось симметрии.

31. Гироэдрическая симметрия: те же оси симметрии и еще горизонтальная двойная (додекаэдрическая) ось симметрии z_1.
32. Октаэдрическая симметрия: те же оси, как в предыдущем случае, и еще одна горизонтальная плоскость симметрии.

Я определяю как первоначальные (примитивные) элементы симметрии полной комбинации такие элементы, совместным действием которых, и только которых, все другие присутствующие элементы получаются в качестве производных.

Понятие о полной комбинации элементов симметрии широко используется мною в дальнейшем.

Наиболее важное применение полных комбинаций заключается в выводе алгебраических уравнений всех видов симметрии. В этих уравнениях каждый первоначальный (примитивный) элемент симметрии представлен особым параметром; все же результирующие элементы симметрии могут быть выражены комбинацией этих параметров.

Чтобы сразу дать ясное представление об этом, я привожу таблицы этих уравнений. Значение входящих в них параметров следующее:

A. Параметры, отвечающие элементам симметрии совмещения, обозначены строчными латинскими буквами; параметры же, выражающие прямую (зеркальную) симметрию, обозначаются греческими буквами.

B. Каждая ось симметрии характеризуется особой буквой:

1) вертикальная ось симметрии обозначается буквою v;

2) двойная горизонтальная ось (направленная к наблюдателю) обозначается буквою h;

3) октаэдрическая ось, которая всегда будет тройной (т. е. ось, параллельная диагонали куба и, в частности, та, которая проходит через верхний правый октант) обозначается буквою o;

4) додекаэдрическая ось [в частности та, которая делит пополам угол между осями x_1 и x_2 (отрицательное направление последней)] обозначается буквою d.

С. То же относится к характерным положениям плоскостей симметрии:

1) горизонтальная плоскость симметрии обозначается буквою χ;

2) вертикальная (в частности, та, которая проходит через только что упомянутую горизонтальную координатную ось) плоскость симметрии обозначается буквою φ;

3) диагональная вертикальная (в частности, та, которая делит пополам угол между осями y_0 и y_1) обозначается буквою δ;

4) ось (и плоскость) составной симметрии обозначается буквою π.

Эти обозначения делают, по моему мнению, алгебраические уравнения особенно выпуклыми.

Необходимо отметить, что в этих уравнениях буквою y (соответственно x_0) обозначена вертикальная ось координат, буквами z и v обозначаются обе другие оси дигональной системы: буквою z та, которая направлена к наблюдателю, и буквою v та, которая идет вправо (в случае триклинной подсистемы все три оси наклонены друг к другу; в моноклинной подсистеме оси z и v горизонтальны, но не перпендикулярны друг другу, и, наконец, в ромбической подсистеме все три оси взаимно перпендикулярны). y_0 и y_1 — две ближайшие друг к другу горизонтальные оси координат, причем y_0 — та, которая обращена к наблюдателю (тетрагональная и гексагональная системы). В случае тессеральной (кубической) системы буквы y, y_0 и y_1 заменяются на x_0, x_1 и x_2.

Что касается числового значения координат, то оно определяется пересечением оси координат плоскостью, перпендикулярной к ней и проходящей через определяемую точку.

Таблица алгебраических уравнений для кристаллографических видов симметрии[1])

Виды симметрии	S[2])
Дигональная система	
Триклинная подсистема	
1. Гемипинакоидальный: $y=b, \quad z=c, \quad v=d$	1
2. Пинакоидальный: $y=n^{\pi}b, \quad z=n^{\pi}c, \quad v=n^{\pi}d$	2
Моноклинная подсистема	
3. Гемипризматический, осевой: $y=b, \quad z=n^{v}c, \quad v=n^{v}d$	2
4. » безосный: $y=n^{\chi}b, \; z=c, \quad v=d$	2
5. Ромбопризматический: $y=n^{\chi}b, \quad z=n^{v}c, \quad v=n^{v}d$	4
Ромбическая подсистема	
6. Сфеноэдрический: $y=n^{h}b, \quad z=n^{v}c, \quad v=n^{h+v}d$	4
7. Ромбопирамидальный: $y=b, \quad z=n^{v}c, \quad v=n^{v+\varphi}d$	4
8. Ромбобипирамидальный: $y=n^{h+\chi}b, \; z=n^{v}c, \; v=n^{h+v}d$	8
Тетрагональная система	
9. Тетрагонально-пирамидальная: $y=b, \; y_0=\overset{4}{b}_{v}, \; y_1=\overset{4}{b}_{v+1}$	4
10. Дитетрагонально-пирамидальный: $y=b, \; y_0=\overset{4}{b}_{v}, \; y_1=\overset{4}{b}_{v+n\varphi}$	8
11. Тетрагонально-сфеноэдрический: $y=n^{\pi}b, \; y_0=\overset{4}{b}_{\pi}, \; y_1=\overset{4}{b}_{\pi+1}$	4

---

[1]) Эта таблица впервые была приведена мною на русском языке в „Симметрии конечных фигур" и на немецком языке в „N. Jahrb. f. Min., Geol." etc. (1890, Bd. I, S. 237), а также в „Zeitschrift für Kristallographie" (Bd. XX, S. 34). Здесь она приводится впервые в новом, более выпуклом виде.

[2]) S дает величину симметрии. Эта величина очень просто получается как произведение кратностей всех первоначальных элементов симметрии. Например, для октаэдрического вида симметрии параметру o соответствует кратность 3 (тройная ось симметрии); кратности параметров h, v, d и χ равны 2. Следовательно $S=3\times2\times2\times2\times2=48$.

12. Тетрагонально-бипирамидальный:

$$y=n^{\chi}b,\quad y_0=\overset{4}{b}_v,\quad y_1=\overset{4}{b}_{v+1}\qquad 8$$

13. Тетрагонально-трапецоэдрический:

$$y=n^{h}b,\quad y_0=\overset{4}{b}_v,\quad y_1=b_{v+n^h}\qquad 8$$

14. Тетрагонально-скаленоэдрический:

$$y=n^{h}b,\quad y_0=\overset{4}{b}_\delta,\quad y_1=\overset{4}{b}_{\delta+n^{\delta+h}}\qquad 8$$

15. Дитетрагонально-бипирамидальный:

$$y=n^{h+\chi}b,\quad y_0=\overset{4}{b}_v,\quad y_1=\overset{4}{b}_{v+n^h}\qquad 16$$

Гексагональная система

16. Тригонально-пирамидальный:

$$y=b,\quad y_0=\overset{3}{b}_v,\quad y_1=\overset{3}{b}_{v+1}\qquad 3$$

17. Дитригонально-пирамидальный:

$$y=b,\quad y_0=\overset{3}{b}_v,\quad y_1=\overset{3}{b}_{v+n^{\varphi}}\qquad 6$$

18. Тригонально-бипирамидальный:

$$y=n^{\chi}b,\quad y_0=\overset{3}{b}_v,\quad y_1=\overset{3}{b}_{v+1}\qquad 6$$

19. Тригонально-трапецоэдрический:

$$y=n^{h}b,\quad y_0=\overset{3}{b}_v\quad y_1=\overset{3}{b}_{v+n^h}\qquad 6$$

20. Дитригонально-бипирамидальный:

$$y=n^{h+\chi}b,\quad y_0=\overset{3}{b}_v,\quad y_1=\overset{3}{b}_{v+n^h}\qquad 12$$

21. Гексагонально-пирамидальный:

$$y=b,\quad y_0=\overset{6}{b}_v,\quad y_1=\overset{6}{b}_{v+1}\qquad 6$$

22. Дигексагонально-пирамидальный:

$$y=b,\quad y_0=\overset{6}{b}_v,\quad y_1=\overset{6}{b}_{v+n^{\varphi}}\qquad 12$$

23. Ромбоэдрический: $y=n^{\pi}b,\quad y_0=\overset{6}{b}_{\pi},\quad y_1=\overset{6}{b}_{\pi+1}$ 6

24. Гексагонально-бипирамидальный:

$$y=n^{\chi}b,\quad y_0=\overset{6}{b}_v,\quad y_1=\overset{6}{b}_{v+1}\qquad 12$$

25. Гексагонально-трапецоэдрический:

$$y=n^{h}b,\quad y_0=\overset{6}{b}_v,\quad y_1=\overset{6}{b}_{v+n^h}\qquad 12$$

26. Гексагонально-скаленоэдрический:

$$y = n^h b,\ y_0 = \overset{6}{b}_\delta,\ y_1 = \overset{6}{b}_{\delta + n^{\delta + h}} \quad 12$$

27. Дигексагонально-бипирамидальный:

$$y = n^{h+\chi} b,\ y_0 = \overset{6}{b}_v,\ y_1 = \overset{6}{b}_{v + n^h} \quad 24$$

Тессеральная (кубическая) система

28. Тетартоэдрический:

$$x_0 = n^h \overset{3}{a}_0,\ x_1 = n^v \overset{3}{a}_{0+1},\ x_2 = n^{h+v} \overset{3}{a}_{0+2} \quad 12$$

29. Додекаэдрический:

$$x_0 = n^{h+\chi} \overset{3}{a}_0,\ x_1 = n^v \overset{3}{a}_{0+1},\ x_2 = n^{h+v} \overset{3}{a}_{0+2} \quad 24$$

30. Тетраэдрический:

$$x_0 = n^h \overset{3}{a}_0,\ x_1 = n^v \overset{3}{a}_{0+n^\delta},\ x_2 = n^{h+v} \overset{3}{a}_{0+2n^\delta} \quad 24$$

31. Гироэдрический:

$$x_0 = n^{h+d} \overset{3}{a}_0,\ x_1 = n^{d+v} \overset{3}{a}_{0+n^d},\ x_2 = n^{d+h+v} \overset{3}{a}_{0+2n^d} \quad 24$$

32. Октаэдрический:

$$x_0 = n^{h+d+\chi} \overset{3}{a}_0,\ x_1 = n^{d+v} \overset{3}{a}_{0+n^d},\ x_2 = n^{d+h+v} \overset{3}{a}_{0+2n^d} \quad 48$$

Предыдущие строки я рассматриваю как предварительные и далее перехожу к основному содержанию этого введения.

Из определения правильных систем фигур, [1] как такой бесконечной во всех направлениях совокупности фигур, что, при совмещении по законам симметрии любой пары их, совмещается сама с собою и вся система,— мы приходим в числе прочих к таким заключениям.[2]

a) Виды симметрии правильных систем те же, что и виды симметрии конечных фигур;

b) Одному и тому же виду симметрии могут соответствовать различные правильные системы;

---

1) Симметрия правильных систем фигур, стр. 12; Zeitschr. f. Krist., Bd. XX, S. 40.

2) l c., s. 12, ff.

c) Все движения совмещения правильной системы могут быть составлены из имеющихся в количестве S движений совмещения, которые переводят какое-либо заданное направление во все другие одинаковые (и которые отвечают движениям совмещения данного вида симметрии) и далее из поступаний совмещения.[1]

Кроме того, я позволяю себе повторить ряд теорем (с небольшими дополнениями), которые уже были один раз приведены в этом журнале.[2]

1) *В правильных системах возможны только двойные, тройные, четверные и шестерные оси симметрии, оси винтовые или оси составной (сложной) симметрии.*

2) *Если существует ось симметрии О наименования р и существует поступание совмещения l, то существует результирующая ось О' также наименования р. Последняя расположена так, что ее расстояния одинаковы от первоначального положения оси О и того положения 1, в которое ось О попадает в результате указанного*

---

[1] На основании этого положения мы можем различать системы трех родов: а) такие, в которых элементы симметрии данного вида все пересекаются в одной точке; в этом случае все прочие элементы симметрии получаются только сложением этих элементов с поступаниями совмещения. Элементарные фигуры каждой такой системы все друг другу параллельны, и каждая отдельная фигура обладает полной симметрией системы. Такие системы я называю *симморфными*. б) Системы, не имеющие таких точек, в которых пересекались бы все элементы симметрии данного вида симметрии, но имеющие точки, в которых пересекаются все оси симметрии. Подобная система составлена энантиоморфными фигурами двух сортов; каждая фигура одного сорта симметрична (является зеркальным отражением) фигуре второго сорта. Величина симметрии каждой такой фигуры равна, следовательно, половине полной симметрии системы. Подобные системы я называю *гемисимморфными*. в) Все прочие системы будут *асимморфные*. Их элементы симметрии совмещения для каждого вида симметрии не пересекаются все в одной точке и, следовательно, элементарные фигуры системы ориентированы по-разному.

[2] Zeitschr. f. Krist., Bd. XX, S. 41 (см. также: Симметрия правильных систем фигур, стр. 20 и сл.).

поступания l. Проходящие через ось O' и оси O и 1 плоскости образуют (внутренний) угол $2\pi/p$.

Эта теорема распространяется и на винтовые оси, а также и на оси составной (сложной) симметрии. Она позволяет просто и единообразно находить все результирующие оси.

3) *Как оси симметрии, так и оси винтовые обязательно являются направлениями поступаний совмещения данной системы.* [1]

4) *Плоскости, перпендикулярные к осям симметрии, а также к осям винтовым, являются плоскостями сеток (совмещения).*

5) *Если имеется плоскость симметрии и существует к ней перпендикулярное поступание совмещения λ, то существует и результирующая параллельная плоскость симметрии в расстоянии $\lambda/2$ от первоначальной. Если направление, сопряженное с плоскостью симметрии, ей не перпендикулярно, то существует результирующая плоскость скольжения посередине между двумя ближайшими плоскостями симметрии. Направление и величина поступания этой скользящей плоскости определяются проекцией на нее сопряженного направления.*

6) *Плоскости симметрии, а также плоскости скольжения являются плоскостями с сетками совмещений, а направления к ним перпендикулярные являются направлениями поступаний совмещения (рядами).*

7) *Если направление оси симметрии или винтовой оси не сопряжено с перпендикулярной к оси плоскостью, то составляющая сопряженного поступания совмещения в направлении оси равна половине наименьшего поступания совмещения (трансляции) в этом направлении, если ось*

---

[1] Это предложение было предметом продолжительной дискуссии, которая изложена в моей работе „Основной закон кристаллографии" (Zeitschr. f. Krist., Bd. XXIII, SS. 99 ff.), а также в заметке в „N. Jahrb. f. Min., Geol. etc." (1894, Bd. I).

двойная, и одной трети этого поступания, если ось тройная (но не является одновременно двойной осью, т. е. не является шестерной).

Аналогичная теорема имеет место в отношении плоскости симметрии и направления к ней перпендикулярного, т. е. если последнее не сопряжено с плоскостью, то компонента сопряженного поступания совмещения в этом направлении равна половине наименьшего поступания совмещения (трансляции) в том же направлении.

9) *Если две аналогичные*[1] *системы S и S' обладают винтовой осью наименования p с наименьшей составляющей поступания l, и эта винтовая ось лежит в плоскости симметрии, то поступание l в одной системе, например S', в направлении оси приводит к тому же результату, к какому привело бы образование новой системы S'', которая аналогична системе S и которая симметрично равна этой системе S в отношении плоскости симметрии, образующей с первоначальной плоскостью симметрии угол π / p.*

В частном случае двойной винтовой оси эту теорему мы обозначаем как теорему 8 с такой формулировкой: *Если плоскость симметрии в начальной системе проходит через двойную винтовую ось и направление того поступания совмещения, которое образует новую систему, есть направление самой оси, то в новой системе существует проходящая через ту же ось плоскость симметрии, перпендикулярная первоначальной плоскости симметрии.*

С помощью этих теорем очень легко вывести все системы, и в каждой из них, исходя из двух независимых элементов симметрии, вывести все остальные элементы симметрии.

Наиболее целесообразно в качестве исходных выбрать простые системы, т. е. определяющиеся двумя независимыми

[1] Т. е. связанные прямой (зеркальной) симметрией, но сдвинутые друг относительно друга.

осями совмещения, и, после того как все они будут исчерпаны, исследовать, каким образом к ним могут быть добавлены плоскости симметрии и плоскости скольжения. Мы будем следовать именно этим путем.

Опираясь на положение „а“ мы можем повести этот вывод по видам симметрии конечных фигур, и таким образом приходим к следующим случаям:

Триклинная подсистема

а) Гемипинакоидальная симметрия. [1] Элементы симметрии отсутствуют. В данном случае возможна единственная система, а именно в согласии с теоремой „с“ общего вида пространственная решетка с косо сопряженными рядами точек. Если в качестве координатных осей взять три нормали к трем сопряженным сеткам и обозначить проекции на эти оси соответствующих поступаний совмещения через λ, λ_0 и λ_1, то мы придем к системе (1 s). [2]

Моноклинная подсистема

b) Гемипризматическая осевая симметрия. Имеются двойные оси совмещения, все одного направления.

Согласно теореме 3, направление этих осей есть направление поступания совмещения, а перпендикулярные к осям плоскости являются сетками. Оси считаем вертикальными и обозначаем их y; в горизонтальной плоскости выбираем за координатные оси z и v две нормали к каким-либо двум рядам.

Различаем между двумя случаями: А) исходная ось есть ось симметрии. В этом случае мы имеем симморфные системы и В) исходная ось является винтовой и выводящиеся системы будут асимморфными.

[1] Сокращенно вместо „вид симметрии“.

[2] В таблицах представлены соответствующие системы под теми же номерами.

A. Симморфные системы

Возможны два и только два предположения: а) либо направление оси сопряжено с перпендикулярной к ней плоскостью, либо этого нет. Первое допущение, в силу теоремы 2, приводит нас к системе (3 s), которая характеризуется исключительно двойными осями симметрии и не имеет винтовых осей. Второе допущение, в силу теорем 2 и 7,— к одной системе (4 s), в которой кроме осей симметрии в качестве результирующих возникают также винтовые оси.

B. Асимморфные системы

В отличие от только что рассмотренного в этом случае возможно только первое допущение, ибо второе привело бы к осям симметрии в качестве результирующих осей и мы снова пришли бы к системе (4 s). При первом допущении мы приходим к единственной системе (1 a) с исключительно винтовыми осями.

Ромбическая подсистема

c) Сфеноэдрическая симметрия. Имеются две независимые взаимно-перпендикулярные оси совмещения.

Если принять, что обе эти оси пересекаются в некоторой точке и обе являются осями симметрии, то мы приходим к симморфным системам. Другие допущения приводят к асимморфным системам.

A. Симморфные системы

Возможны такие и только такие допущения: либо все три оси, y, z и v, сопряжены с перпендикулярными к ним плоскостями, и тогда все оси совмещения будут осями симметрии [система (9 s)]; либо сопряжена с перпендикулярной к ней плоскостью одна ось y; и тогда, помимо результирующих осей симметрии, мы получим еще результирующие винтовые оси, которые параллельны осям z и v и пересека-

ются в одной точке совместно с результирующей вертикальной осью симметрии [система (10 s)]; или же, наконец, осей, сопряженных с плоскостями к ним перпендикулярными, нет вовсе, и тогда ось y совмещается (связана трансляцией) a) либо с ей параллельной результирующей осью в диагональном сечении призмы (результирующие винтовые оси в этом случае образуют особую, вставленную решетку, которая не имеет ни одной точки, общей с решеткой из осей симметрии [система (11 s)]); b) либо с ей параллельной осью, которая лежит в плоскости yz; в этом случае имеются результирующие винтовые оси каждого направления, каждая из них лежит посередине между двумя соседними осями симметрии [система (12 s)].

Другие допущения невозможны.

B. Асимморфные системы

Прежде всего принимаем, что только одна из независимых осей, например вертикальная, является винтовой, и тогда возможны три допущения: a) все оси сопряжены с перпендикулярными к ним плоскостями; вертикальные оси тогда все винтовые, а все другие оси — оси симметрии; во всякой общей точке пересекаются всегда одна ось симметрии и одна винтовая [система (4 a)]; b) сопряжена с перпендикулярной к ней плоскостью одна ось y;[1] вертикальные оси снова все будут винтовыми; в горизонтальных плоскостях с осями z и v оси симметрии и винтовые чередуются [система (5 a)]; c) осей, сопряженных с перпендикулярными к ним плоскостями симметрии, нет вовсе; и тогда обязательно ось y совмещается (связана трансляцией) с ей параллельной осью в диагональном сечении призмы. В этом случае все плоскости, паралелльные координатным плоскостям,

[1] Допущение, что сопряжена с плоскостью, к ней перпендикулярной, не ось y, но ось z (или v) приводит к симморфной системе (10 s).

заключают в себе в одном направлении оси симметрии и к ним перпендикулярно оси винтовые [система (6 a)].

Следующим возможным допущением будет, что обе пересекающиеся независимые оси являются винтовыми. Если за таковые принять оси *z* и *v*, то мы получим в качестве результирующих, но не пересекающихся с ними, оси симметрии *y* и придем к системе (7 a). Всякие допущения о несопряженности осей не приводят нас к новым системам.

Остается еще допущение, что независимые оси не пересекаются. Если это допустить сперва для осей симметрии, то мы придем к уже найденной системе (4 a). Допущение, что одна из этих осей является винтовой, приводит к системе (7 a). Наконец, допущение, что обе независимые оси винтовые приводят нас к системе (8 a), в которой результирующие оси также винтовые и также не пересекающиеся с независимыми.

Тетрагональная система

d) Тетрагонально-пирамидальная симметрия. Независимая четверная (вертикальная) ось совмещения.

Если эта ось есть ось симметрии, то соответственные системы симморфные, все прочие — асимморфные.

А. Симморфные системы

Возможны такие и только такие допущения: либо оси сопряжены с плоскостями, к ним перпендикулярными, либо этого нет.

Первое допущение приводит нас к системе (22 s), в которой результирующие параллельные оси частично двойные и частично четверные оси симметрии.

Второе допущение приводит к системе (23 s), в которой результирующие параллельные оси частично являются двойными винтовыми и частично четверными винтовыми с вертикальным поступанием (ходом) $\lambda/2$.

В. Асимморфные системы

Независимые оси — четверные винтовые. Если эти оси с вертикальным поступанием λ / 4, то мы различаем между правыми [система (30 a)] и левыми [система (31 a)]; результирующие параллельные оси будут частично такие же четверные винтовые оси и частично двойные винтовые (при допущении, что направление этих осей сопряжено с плоскостями, к ним перпендикулярными).

Если же направление осей не сопряжено с перпендикулярными к ним плоскостями, то возможно только допущение, что независимая ось совмещается (связана трансляцией) с ей параллельной осью в диагональном сечении призмы. Тогда результирующие оси частично будут двойными осями симметрии, частично же четверными винтовыми с поступанием λ / 4, но с противоположным вращением, и таким образом мы приходим к единственной системе (32 a).

Остается еще одно возможное допущение, что независимой осью будет винтовая с поступанием λ / 2. Если принять, что направление оси не сопряжено с перпендикулярной к ней плоскостью, то мы приходим к системе (23 s). Если же это направление сопряжено с плоскостью, то мы получим систему (33 a).

e) Тетрагонально-трапецоэдрическая симметрия. Независимые оси — две горизонтальные оси совмещения y_0 и y_1, из которых одна наклонена к другой под углом 45°.

А. Симморфные системы

Обе оси — оси симметрии. Возможны два допущения: либо направление результирующей четверной оси симметрии y сопряжено с плоскостью, к ней перпендикулярной, либо нет. Эти два допущения приводят к системам (30 s) и (31 s). Расположение результирующих осей лучше всего показывается на соответствующих диаграммах.

В. Асимморфные системы

Независимые оси в этих системах либо винтовые, либо непересекающиеся. Первым рассматриваем случай пересекающихся осей, но одна из них винтовая. Приходим к системе (43 а). Расположение результирующих осей показано на диаграмме.

Допущение, что ось y не сопряжена с перпендикулярной к ней плоскостью, не приводит к новой системе.

Допущение, что обе оси винтовые, оказывается излишним, поскольку в силу теоремы 2 в числе результирующих осей одного или другого сорта всегда должны быть оси симметрии.

Таким образом, возможности пересечения обеих независимых осей исчерпаны, и мы обращаемся к случаям, когда эти оси не пересекаются.

Сперва примем, что обе оси являются осями симметрии. Легко показать, что вдоль вертикальной оси кратчайшее расстояние между горизонтальными осями может быть либо $\lambda/8$, либо $\lambda/4$. В первом случае результирующая ось четверная винтовая с ходом $\lambda/4$, во втором случае та же ось имеет ход $\lambda/2$.

При первом допущении нам приходится различать между правыми и левыми винтовыми осями, и мы имеем две системы, (44 а) и (45 а). Если направление оси y принято несопряженным с плоскостью, к ней перпендикулярной, то мы придем к системе (46 а), в которой одновременно имеются и правые и левые оси.

При втором допущении получается только одна новая система (47 а).

Остается случай, когда одна из двух непересекающихся независимых осей винтовая. Снова имеются две возможности, в зависимости от того, будет ли кратчайшее расстояние l равно $\lambda/8$ или $\lambda/4$.

Первая возможность приводит к двум новым системам,

(48 a) и (49 a) с вертикальной четверной осью правою в одном случае и левой — во втором.

Вторая возможность приводит к единственной новой системе (50 a).

Гексагональная система

f) Тригонально-пирамидальная симметрия. Единственная независимая ось — (вертикальная) тройная ось совмещения. Она может быть осью симметрии или винтовой и соответственно мы придем к симморфным и асимморфным системам.

A. Симморфные системы

Возможны два допущения: вертикальные оси либо сопряжены с плоскостями, к ним перпендикулярными, либо нет. В соответствии с этим возникают две системы, (38 s) и (39 s).

B. Асимморфные системы

Предположение, что вертикальные оси не сопряжены с перпендикулярными к ним плоскостями, здесь невозможно. При сопряженности же мы можем иметь либо правую систему (68 a), либо левую (69 a).

g) Тригонально-трапецоэдрическая симметрия. Две независимые горизонтальные двойные оси совмещения, наклоненные друг к другу под углом 60°.

A. Симморфные системы

Обе оси пересекаются и обе — оси симметрии. Если вертикальная ось y сопряжена с перпендикулярной к ней плоскостью, то возможны два случая: в одном направление горизонтальной оси совпадает с элементарным поступанием совмещения, во втором этого нет (и тогда по теореме 7 направление этого поступания делит пополам угол между двумя ближайшими осями). Так как горизонтальную ось h всегда можно принять за координатную y_0, то оба эти допущения приводят нас к двум системам, аналитические

выражения которых, а также графические даны под (44 s) и (45 s).

Остается допущение,[1] что направление оси y не сопряжено с перпендикулярной к ней плоскостью, и таким образом мы приходим к системе (46 s).

B. Асимморфные системы

Нетрудно доказать, что в таких системах за обе независимые оси всегда можно взять оси симметрии,[2] и таким образом нам нужно разобрать только случай непересекания этих осей. В зависимости от взаимной их ориентации мы найдем, что результирующая вертикальная тройная ось будет либо правой, либо левой. В зависимости же от того, будут ли направления независимых осей совпадать с направлениями элементарных поступаний или нет, мы приходим к двум парам новых систем: (70 a) и (71 a) и соответственно (72 a) и (73 a).

h) Гексагонально-пирамидальная симметрия. Независимые шестерные оси совмещения одного единственного направления (вертикальные).

A. Симморфные системы

Возможно только одно допущение: оси являются осями симметрии и таким образом мы приходим к системе (49 s).

B. Асимморфные системы

Те же оси сейчас принимаем винтовыми. Допущение, что они будут правыми либо левыми с ходом $\lambda/6$ приводит к системам (74 a) и (75 a). Если же ход оси при-

---

1) Допущение, что при этом направления осей y_0, y_1 . . . не совпадают с направлениями элементарных поступаний совмещения, не приводит к новым системам.

2) Поскольку винтовые оси должны присутствовать всегда в силу теоремы 2.

нять $\lambda/3$, то приходим к системам (76 а) и (77 а). Наконец, при ходе оси, равном $\lambda/2$ (и потому уже ось не может быть ни правой ни левой) мы приходим к одной системе (78 а).

i) Гексагонально-трапецоэдрическая симметрия. Две независимые горизонтальные двойные оси совмещения, взаимно наклоненные под углом 30°.

Согласно ранее показанному, и здесь мы можем ограничиться случаем, когда обе независимые оси, — оси симметрии. Результирующая вертикальная ось всегда шестерная.

А. Симморфные системы

Если все три указанных рода осей пересекаются в одной точке, то мы приходим к единственной симморфной системе этого класса (54 s).

В. Асимморфные системы

В этом случае обе независимые оси принимаем непересекающимися. В зависимости от кратчайшего расстояния между ними, а также от взаимной ориентации мы приходим к пяти системам, а именно к системам (82 а) и (83 а) (с правыми и соответственно с левыми шестерными винтовыми осями при ходе этих осей $\lambda/6$); далее к системам (84 а) и (85 а) (также с правыми и с левыми шестерными винтовыми осями, но с ходом оси $\lambda/3$) и, наконец, к системе (86 а) (шестерная винтовая ось с ходом вдоль оси $\lambda/2$), которая не является ни правой ни левой.

Тессеральная (кубическая) система

k) Тетартоэдрическая симметрия. Две независимые оси совмещения: одна тройная 0 и одна двойная x_1.

А. Симморфные системы

Обе независимые оси являются осями симметрии, пересекающимися в одной точке. Возможны три допущения: либо все три оси, x_0, x_1, x_2, сопряжены с перпендикулярными

к ним плоскостями — и тогда возникает система (59 s), либо ни одна из них не сопряжена с перпендикулярными плоскостями. В последнем случае элементарное поступание совмещения может быть параллельно либо диагональной плоскости, и тогда мы приходим к системе (60 s), либо оно параллельно координатной плоскости, и тогда возникает система (61 s).

В. Асимморфные системы

В этих системах, согласно теореме 2, всегда присутствуют совместно и тройные оси симметрии и тройные винтовые, последние также совместно правые и левые. Не приходится, таким образом, различать случаи с тройными осями симметрии и случаи с тройными винтовыми, и возможны только три допущения: 1) ось симметрии O пересекается с винтовой осью x_1; 2) ось O не пересекается с осью симметрии x_1, и 3) ось O не пересекается с винтовой осью x_1. Первое допущение, однако, не приводит нас к новой системе, потому что такое расположение осей мы имеем в системе (60 s). Третье допущение приводит нас к двум новым системам, соответственно тому, будут ли направления осей x_0, x_1 и x_2 сопряжены с перпендикулярными к ним плоскостями или нет [системы (89 a) и (90 a)]. Второе допущение также приводит к одной из ранее найденных систем.

1) Гироэдрическая симметрия. Две независимые оси совмещения: тройная ось O и двойная z_0.

А. Симморфные системы

Если обе независимые оси — оси симметрии, и если они пересекаются, то при сопряженности трех осей x_0, x_1, x_2 с перпендикулярными к ним плоскостями мы приходим к системе (68 s). Если эти оси x_0, x_1, x_2 не сопряжены с перпендикулярными плоскостями, то ось x_0 (вертикальная) может совмещаться с ей параллельной осью в диагональной плоскости, и мы имеем систему (69 s); либо же ось x_0 совме-

щается с ей параллельной в координатной плоскости, и мы приходим к системе (70 s).

В. Асимморфные системы

Согласно вышесказанному, за независимую тройную ось всегда можно взять ось симметрии. На том же основании и за вторую независимую ось z_0 мы всегда можем взять ось симметрии. Таким образом, подлежит исследованию лишь единственный случай непересечения двух независимых осей. Если кратчайшее расстояние между обеими осями в направлении оси x_1 обозначить L_1, то возможны два случая: 1) $L_1 = \lambda/4$ и 2) $L_1 = \lambda/2$.

В первом случае мы имеем либо правые, либо левые четверные винтовые оси x_0, x_1 и x_2 с ходом $\lambda/4$. Во втором случае эти оси будут четверными винтовыми с ходом $\lambda/2$, т. е. каждая такая ось одновременно является двойной осью симметрии.

В первом случае возможны три допущения: 1) направления этих осей сопряжены с перпендикулярными к ним осями, и мы приходим к системам (94 а) и (95 а) с правыми и соответственно с левыми четверными осями; 2) направления этих осей не сопряжены с перпендикулярными к ним плоскостями. Если при этом элементарное поступание совмещения переводит ось x_0 в центр диагонального сечения куба, то мы приходим к системе (96 а); 3) если элементарное поступание совмещения переводит ось x_0 в середину грани $x_0 x_1$, мы приходим к системе (97 а).

Во втором случае возможна единственная новая система (98 а). В системе (97 а) сосуществуют и правые и левые винтовые оси; в системе (98 а) только четверные винтовые оси с ходом $\lambda/2$, т. е. нет ни правых ни левых осей.

На этом заканчивается вывод простых систем, и нам остается исследовать, каким образом в полученные системы можно ввести элементы прямой (зеркальной) симметрии.

Мы считаем, однако, возможным не останавливаться на этом подробно, поскольку все необходимое достаточно наглядно показано на прилагаемых диаграммах, а также выражено в соответствующих уравнениях. Последние собраны в предложенной нами ранее последовательности видов симметрии. Диаграммы, однако, расположены нами по совершенно отличному принципу. Чтобы сделать их наиболее простыми и наглядными, мы разделили все правильные системы точек на группы (гнезда). В каждой группе исходной является соответствующая единственная простая система и во всех прочих системах той же группы (гнезда) мы имеем одинаковые оси совмещения и в одинаковых местах, и таким образом, показанные в прочих системах (одного гнезда) элементы прямой (зеркальной) симметрии образуют только дополнительные элементы симметрии, к которым всегда должны быть добавлены элементы исходной простой системы. Это позволило в высокой степени упростить диаграммы без того, чтобы что-нибудь в их наглядности было потеряно, а не выиграно. Системы, принадлежащие к различным родам симметрии, располагаются в различных рядах, причем особенно ясно выступает как сходство систем, так и их различие.

Этим я считаю задачу настоящего введения выполненной и даю в заключение полную таблицу уравнений для правильных систем.[1]

---

[1] Эта таблица была уже один раз опубликована в „Zeitschrift für Kristallographie" (Bd. XX, S. 48, ff.), но не в столь краткой и выпуклой форме, в какой она предлагается сейчас. Предлагаемые уравнения можно считать определениями соответствующих правильных систем. Непосредственно за названием каждого вида симметрии выписаны те члены уравнений симметрии, которые являются общими для всех систем данного вида симметрии. Вслед за арабскими цифрами, выражающими номер каждой системы, даны лишь поступательные члены уравнений, которые характеризуют индивидуально каждую систему правильных точек.

Таблица правильных систем точек

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
Дигональная система			
а. Триклинная подсистема			
1. Гемипинакоидальная симметрия $(y = b,\ z = c,\ v = d)$			
1) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$	Нет	Нет	1
2. Пинакоидальная симметрия $(y = n^{\pi} b,\ z = n^{\pi} c,\ v = n^{\pi} d)$			
2) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$	Нет	Нет	1
2	—	—	2
b. Моноклинная подсистема			
3. Гемипризматическая осевая симметрия $(y = b,\ z = n^{v} c,\ v = n^{v} d)$			
3) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$ [1] 4) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +\lambda_1$ [2]	Нет	1) $+v\lambda/2, +\lambda_0, +\lambda_1$ [1]	3
4. Гемипризматическая безосная симметрия $(y = n^{\chi} b,\ z = c,\ v = d)$			
5) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$ 6) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +\lambda_1$	1) $+\lambda, +\lambda_0, +\chi\lambda_1/2$ 2) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +\chi\lambda_1/2$	Нет	4
5. Ромбопризматическая симметрия $(y = n^{\chi} b,\ z = n^{v} c,\ v = n^{v} d)$			
7) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$ 8) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +\lambda_1$	3) $+\lambda, +\lambda_0, +\chi\lambda_1/2$ 4) $F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +\chi\lambda_1/2$	2) $v\lambda/2, +\lambda_0, +\lambda_1$ 3) $v\lambda/2, +\chi\lambda_0/2 + \lambda_1,$	6
6	4	3	13
с. Ромбическая подсистема			
6. Сфеноэдрическая симметрия $(y = n^{h} b,\ z = n^{v} c,\ v = n^{v+h} d)$			
9) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$ 10) $+\lambda, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$ 11) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$ 12) $+F\lambda/2, +(F+G)\lambda_0/2, G\lambda_1/2$	Нет	4) $+v\lambda/2, +\lambda_0, +\lambda_1$ 5) $+v\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$ 6) $+(F+v)\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$ 7) $+\lambda, +h\lambda_0/2, +h\lambda_1/2$ 8) $+v\lambda/2, +(h+v)\lambda_0/2, +v\lambda_1/2$	9

---

[1] В диаграммах эта система дана в трех вариантах соответственно тому, что она является корнем для трех гнезд правильных систем.

[2] В диаграммах эта группа повторена в четырех вариантах.

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
7. Ромбопирамидальная симметрия ($y = b,\ z = n^v c,\ v = n^{v+\varphi} d$)			
13) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$	5) $+\varphi\lambda/2, +\lambda_0, +\lambda_1$	9) $+v\lambda/2, +\lambda_0, +\lambda_1$	
	6) $+\lambda, +\varphi\lambda_0/2, +\lambda_1$	10) $+v\lambda/2, +\lambda_0, +\varphi\lambda_1/2$	
	7) $+\varphi\lambda/2, +\varphi\lambda_0/2, +\lambda_1$	11) $+v\lambda/2, +\varphi\lambda_0/2, +\lambda_1$	
	8) $+\varphi\lambda/2, +\varphi\lambda_0/2, +\varphi\lambda_1/2$	12) $+v\lambda/2, +\varphi\lambda_0/2, +\varphi\lambda_1/2$	
	9) $+\lambda, +\varphi\lambda_0/2, +\varphi\lambda_1/2$	13) $+v\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$	
14) $+\lambda, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$			
15) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +\lambda_1$	10) $+\varphi\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$		
	11) $+F\lambda/2, +(F+\varphi)\lambda_0/2, +\lambda_1$		
	12) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +\varphi\lambda_1/2$		
	13) $+(F+\varphi)\lambda/2, +F\lambda_0/2, +\varphi\lambda_1/2$		
16) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$	14) $+F\lambda/2, +(F+\varphi)\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$		
	15) $+(F+\varphi)\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$		
17) $+F\lambda/2, +(F+G)\lambda_0/2, +G\lambda_1/2$			
	16)[1] $+(2F+\varphi)\lambda/4, +(2F+2G+\varphi)\lambda_0/4, +(2G+\varphi)\lambda_1/4$		22
8. Ромбобипирамидальная симметрия ($y = n^{h+\chi} b,\ z = n^v c,\ v = n^{v+h} d$)			
18) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_1$	17)[2] $+\chi\lambda/2, +\lambda_0, +\lambda_1$	14) $+v\lambda/2, +\lambda_0, +\lambda_1$	
	18) $+\lambda, +\chi\lambda_0/2, +\chi\lambda_1/2$	15) $+v\lambda/2, +\lambda_0, +\chi\lambda_1/2$	
	19) $+\chi\lambda/2, +\chi\lambda_0/2, +\chi\lambda_1/2$	16) $+v\lambda/2, +\chi\lambda_0/2, +\lambda_1$	
19) $+\lambda, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$			
	20) $\chi\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$	17) $+v\lambda/2, +\chi\lambda_0/2, +\chi\lambda_1/2$	
	21) $+\lambda_1, +(F+\chi)\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$	18) $+v\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$	
	22) $+\chi\lambda/2, +(F+\chi)\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$	19) $+v\lambda/2, +F\lambda_0/2, +(F+\chi)\lambda_1/2$	

---

[1] Ранее (Zeitschr. f. Krist., Bd. XX, S. 56) эта группа имела нумерацию (17h).

[2] Ранее (18 h), группа (18 h) была (19 h) и т. д. вплоть до (24 h), которая ранее была (16 h).

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
20) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$			
	23) $+(F+\chi)\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$	20) $+(F+v)\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$	
21) $+F\lambda/2, +(F+G)\lambda_0/2, +G\lambda_1/2$			
	24) $+(2F+\chi)\lambda/4, +(2F+2G+\chi)\lambda_0/4$ $+(2G+\chi)\lambda_1/4$	21) $+(F+v)\lambda/2, +(F+\chi)\lambda_0/2, +F\lambda_1/2$ 22) $+\lambda, +h\lambda_0/2, +h\lambda_1/2$ 23) $+\lambda, +h\lambda_0/2+(h+\chi)\lambda_1/2$ 24) $+\lambda, +(h+\chi)\lambda_0/2, +(h+\chi)\lambda_1/2$ 25) $+\chi\lambda/2, +h\lambda_0/2, +h\lambda_1/2$ 26) $+\chi\lambda/2, +(h+\chi)\lambda_0/2, +h\lambda_1/2$ 27) $+\chi\lambda/2, +(h+\chi)\lambda_0/2, +(h+\chi)\lambda_1/2$ 28) $+v\lambda/2, +(h+v)\lambda_0/2, +v\lambda_1/2$ 29) $+v\lambda/2, +(h+v)\lambda_0/2, +(v+\chi)\lambda_1/2$	28
13	20	26	59

Тетрагональная система

9. Тетрагонально-пирамидальная симм. ($y = b$, $y_0 = \overset{4}{b}_v$, $y_1 = \overset{4}{b}_{v+1}$)

22) $+\lambda, +\lambda_0, +\lambda_0$ 23) $+F\lambda/2, +F\lambda_0/2, +F\lambda_0/2$	Нет	30) и 31) $\pm v\lambda/4, +\lambda_0, +\lambda_0$ 33) $(2F+v)\lambda/4, +F\lambda_0/2, +F\lambda_0/2$ 33) $+v\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	6

10. Дитетрагонально-пирамидальная симм. ($y = b$, $y_0 = \overset{4}{b}_v$, $y_1 = \overset{4}{b}_{v+n\varphi}$)

24) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$	25) $\varphi\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$, 26) $\lambda, \varphi\lambda_0/2, \varphi\lambda_0/2$ 27) $\varphi\lambda/2, \varphi\lambda_0/2, \varphi\lambda_0/2$		
25) $F\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	28) $(F+\varphi)\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	34) $(2F+v)\lambda/4, F\lambda_0/2, (F+\varphi)\lambda_0/2$ 35) $(2F+2\varphi+v)\lambda/4, F\lambda_0/2, (F+\varphi)\lambda_0/2$ 36) $v\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
		37) $(v+\varphi)\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$ 38) $(v+\varphi)\lambda/2, \varphi\lambda_0/2, \varphi\lambda_0/2$ 39) $v\lambda/2, \varphi\lambda_0/2, \varphi\lambda_0/2$	12
11. Тетрагонально-сфеноэдрическая симм. $(y=n^{\pi} b, y_0=\overset{4}{b}_{\pi}, y_1=\overset{4}{b}_{\pi+1})$			
26) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$ 27) $F\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$[1]	Нет	Нет	2
12. Тетрагонально-бипирамидальная симм. $(y = n^{\chi} b, y_0 = \overset{4}{b}_{v}, y_1 = \overset{4}{b}_{v+1})$			
28) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$ 29) $F\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	29) $\lambda, \chi\lambda_0/2, \chi\lambda_0/2$	40) $(2F+v)\lambda/4, F\lambda_0/2, (F+\chi)\lambda_0/2$ 41) $v\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$ 42) $v\lambda/2, \chi\lambda_0/2, \chi\lambda_0/2$	6
13. Тетрагонально-трапецоэдрическая симм. $(y = n^{h} b, y=\overset{4}{b}_{v}, y_1 = \overset{4}{b}_{v+n^h})$			
30) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$ 31) $F\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	Нет	43) $\lambda, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$ 44) и 45) $\pm v\lambda/4, \lambda_0, \lambda_0$ 46) $(2F+v)\lambda/4, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$ 47) $v\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$ 48) и 49) $\pm v\lambda/4, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$ 50) $(h+v)\lambda/2, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$	10
14. Тетрагонально-скаленоэдрическая симм. $(y=n^{h}b, y_0=\overset{4}{b}_{\delta}, y_1=\overset{4}{b}_{\delta+n^{\delta+h}})$			
32) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$	30) $\delta\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	51) $\pi\lambda/4, \lambda_0, h\lambda_0/2$ [2]	

[1] Особое обозначение, примененное только к этой системе, выражает, что соответствующая ось (и сопряженная с нею плоскость) составной симметрии проходит не через начало координат, а находится в расстоянии $\lambda/4$ от этого начала.

[2] В отличие от других диаграмм здесь начало координат расположено мною в центре ячейки. Точно также для одной этой системы я применил не общее, а специальное уравнение симметрии, а именно:

$$y = n^{h+\pi} b, \; y_0 = \overset{4}{b}_{\pi}, \; y_1 = \overset{4}{b}_{\pi+n^h}$$

Здесь π обозначает четверную ось составной (сложной) симметрии, а h обычную горизонтальную ось (ср.: Симметрия правильных систем, стр. 117).

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
33) $\lambda, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	31) $\delta\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	52) $\lambda, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$	
	32) $\lambda, (F+\delta)\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	53) $\delta\lambda/2, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$	
	33) $\delta\lambda/2, (F+\delta)\lambda_0/2, F\lambda_0/2$		
34) $F\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$			
35) $F\lambda/2, (F+G)\lambda_0/2, G\lambda_0/2$	34) $(F+\delta)\lambda/2, (F+G)\lambda_0/2, G\lambda_0/2$		12

15. Дитетрагонально-бипирамидальная симметрия

$$\left(y = n^{h+\chi} b, \quad v_0 = \overset{4}{b}_v, \quad y_1 = \overset{4}{b}_{v+n} h\right)$$

36) $\lambda, \lambda_0 \lambda, \lambda_0$	35) $\chi\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	54) $\chi, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$	
	36) $\lambda, \chi\lambda_0/2, \chi\lambda_0/2$	55) $\lambda, (h+\chi)\lambda_0/2, (h+\chi)\lambda_0/2$	
	37) $\chi\lambda/2, \chi\lambda_0/2, \chi\lambda_0/2$	56) $\chi\lambda/2, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$	
37) $F\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	38) $(F+\chi)\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	57) $\chi\lambda/2, (h+\chi)\lambda_0/2, (h+\chi)\lambda_0/2$	
		58) $v\lambda/4, (F+\chi)\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	
		59) $(2\chi+v)\lambda/4, (F+\chi)\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	
		60) $v\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	
		61) $(v+\chi)\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	
		62) $(v+\chi)\lambda/2, \chi\lambda_0/2, \chi\lambda_0/2$	
		63) $v\lambda/2, \chi\lambda_0/2, \chi\lambda_0/2$	
		64) $(v+h)\lambda/2, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$	
		65) $(v+h)\lambda/2, (h+\chi)\lambda_0/2, (h+\chi)\lambda_0/2$	
		66) $(v+h+\chi)\lambda/2, h\lambda_0/2, h\lambda_0/2$	
		67) $(v+h+\chi)\lambda/2, (h+\chi)\lambda_0/2, (h+\chi)\lambda_0/2$	20
16	14	38	68

Гексагональная система

16. Тригонально-пирамидальная симм. $\left(y = b, \ y_0 = \overset{3}{b}_v, \ y = \overset{3}{b}_{v+1}\right)$

38) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$ [1]		68) и 69) $\pm \lambda/3, \lambda_0, \lambda_0$	
39) $F\lambda/3, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$	Нет		4

[1] Эта система в диаграммах помещена два раза; во втором случае координатами будут: λ, $F\lambda_0/3$, $F\lambda_0/3$.

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
17) Дитригонально-пирамидальная симм. $(y=b,\ y_0=\overset{3}{b}_v,\ y_1=\overset{3}{b}_{v+n^\varphi})$			
40) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$ 41) $\lambda, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$ 42) $F\lambda/3, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$	39) $\varphi\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$ 40) $\varphi\lambda/2, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$ 41) $F\lambda/3+\varphi\lambda/2, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$	Нет	6
18. Тригонально-бипирамидальная симм. $(y=n^\chi b,\ y_0=\overset{3}{b}_v,\ y_1=\overset{3}{b}_{v+1})$			
43) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$	Нет	Нет	1
19. Тригонально-трапецоэдрическая симм. $(y=n^h b,\ y=\overset{3}{b}_v,\ y=\overset{3}{b}_{v+n^h})$			
44) $\lambda, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$ 45) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$ 46) $F\lambda/3, (F+G)\lambda_0/3, G\lambda_0/3$	Нет	70) и 71) $\pm v\lambda/3, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$ 72) и 73) $\pm v\lambda/3, \lambda_0, \lambda_0$	7
20. Дитригонально-бипирамидальная симметрия $(y=n^{h+\chi} b,\ y_0=\overset{3}{b}_v,\ y_1=\overset{3}{b}_{v+n^h})$			
47) $\lambda, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$ 48) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$	42) $\chi\lambda/2, F\lambda_0/3, F\lambda_0/3$ 43) $\chi\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	Нет	4
21. Гексагонально-бипирамидальная симметрия $(y=b,\ y_0=\overset{6}{b}_v,\ y_1=\overset{6}{b}_{v+1})$			
49) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$	Нет	74) и 75) $\pm v\lambda/6, \lambda_0, \lambda_0$ 76) и 77) $\pm v\lambda/3, \lambda_0, \lambda_0$ 78) $v\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	6
22. Дигексагонально-пирамидальная симметрия $(y=b,\ y_0=\overset{6}{b}_v,\ y_1=\overset{6}{b}_{v+n^\varphi})$			
50) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$	44) $\varphi\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	79) $v\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$ 80) $(v+\varphi)\lambda/2, \lambda_0, \lambda_0$	4
23. Ромбоэдрическая симметрия $(y=n^\pi b,\ y_0=\overset{6}{b}_\pi,\ y_1=\overset{6}{b}_{\pi+1})$			
51) $\lambda, \lambda_0, \lambda_0$ 52) $F\lambda/2, F\lambda_0/2, F\lambda_0/2$	Нет	Нет	2

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
24. Гексагонально-бипирамидальная симм. $(y = n^{\chi} b,\ y_0 = \overset{6}{b}_v,\ y_1 = \overset{6}{b}_{v+1})$			
53) $\lambda,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	Нет	81) $v\lambda/2,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	2
25. Гексагонально-трапецоэдрическая симм. $(y = n^h b,\ y_0 = \overset{6}{b}_v,\ y_1 = \overset{6}{b}_{v+n^h})$			
54) $\lambda,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	Нет	82) и 83) $\pm v\lambda/6,\ \lambda_0,\ \lambda_0$ 84) и 85) $\pm v\lambda/3,\ \lambda_0,\ \lambda_0$ 86) $v\lambda/2,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	6
26. Гексагонально-скаленоэдрическая симметрия $(y = n^h b,\ y_0 = \overset{6}{b}_\delta,\ y_1 = \overset{6}{b}_{\delta+n^{\delta+h}})$			
55) $\lambda,\ F\lambda_0/3,\ F\lambda_0/3$	45) $\delta\lambda/2,\ F\lambda_0/3,\ F\lambda_0/3$		
56) $\lambda,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	46) $\delta\lambda/2,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	Нет	
57) $F\lambda_0/3,\ F\lambda_0/3,\ F\lambda_0/3$	47) $F\lambda/3 + \delta\lambda/2,\ F\lambda_0/3,\ F\lambda_0/3$		6
27. Дигексагонально-бипирамидальная симметрия $(y = n^{h+\chi} b,\ y = \overset{6}{b}_v,\ y_1 = \overset{6}{b}_{v+n^h})$			
58) $\lambda,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	48) $\chi\lambda/2,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	87) $v\lambda/2,\ \lambda_0,\ \lambda_0$ 88) $(v+\chi)\lambda/2,\ \lambda_0,\ \lambda_0$	4
21	10	21	52

Тессеральная (кубическая) система

28. Тетартоэдрическая симметрия

$$(x_0 = n^h \overset{3}{a}_0,\quad x_1 = n^v \overset{3}{a}_{0+1},\quad x_2 = n^{h+v} \overset{3}{a}_{0+2})$$

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
59) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda$		89) $(h+v)\lambda/2,\ h\lambda/2,\ h\lambda/2$	
60) $F\lambda/2,\ F\lambda/2,\ F\lambda/2$	Нет	90) $(F+h+v)\lambda/2,\ (F+h)\lambda/2,\ (F+v)\lambda/2$	
61) $F\lambda/2,\ (F+G)\lambda/2,\ G\lambda/2$	Нет		5

29. Додекаэдрическая симм. $(x_0 = n^{h+\chi} \overset{3}{a}_0,\ x_1 = n^v \overset{3}{a}_{0+1},\ x_2 = n^{h+v} \overset{3}{a}_{0+2})$

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
62) $\lambda, \lambda, \lambda$	49) $\chi\lambda/2, \chi\lambda/2, \chi\lambda/2$	91) $(h+v)\lambda/2, (h+\chi)\lambda/2, v\lambda/2$	
63) $F\lambda/2, F\lambda/2, F\lambda/2$		92) $(F+h+v)\lambda/2, (F+h+\chi)\lambda/2, (F+v)\lambda/2$	7
64) $F\lambda/2, (F+G)\lambda/2, G\lambda/2$	50) $(F+\chi)\lambda/2, (F+G)\lambda/2, G\lambda/2$		

30. Тетраэдрическая симм. $(x_0=n^h\overset{3}{a}_0,\ x_1=n^v\overset{3}{a}_{0+n}\delta,\ x_2=n^{h+v}\overset{3}{a}_{0+2n}\delta)$

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
65) $\lambda, \lambda, \lambda$	51) $\delta\lambda/2, \delta\lambda/2, \delta\lambda/2$	93)[1] $(F+h+v)\lambda/2+\delta\lambda/4, (F+h)\lambda/2+\delta\lambda/4, (F+v)\lambda/2+\delta\lambda/4$	
66) $F\lambda/2, F\lambda/2, F\lambda/2$			
67) $F\lambda/2, (F+G)\lambda/2, G\lambda/2$	52) $(F+\delta)\lambda/2, (F+G)\lambda/2, G\lambda/2$		6

31. Гироэдрическая симметрия

$(x_0=n^{h+d}\overset{3}{a}_0,\ x_1=n^{v+d}\overset{3}{a}_{0+n}d,\ x_2=n^{d+h+v}\overset{3}{a}_{0+2n}d)$

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
68) $\lambda, \lambda, \lambda$		94)[2] $(2v-d)\lambda/4, (2v+2h-d)\lambda/4, (2h-d)\lambda/4$	
69) $F\lambda/2, F\lambda/2, F\lambda/2$	Нет	95) $(2v+2h-d)\lambda/4, (2h-d)\lambda/4, (2v-d)\lambda/4$	
70) $F\lambda/2, (F+G)\lambda/2, G\lambda/2$		96) $(2F+2h-d)\lambda/4, (2F-d)\lambda/4, (2F+2v-d)\lambda/4$	
		97) $(2F-d)\lambda/4, (2F+2G-d)\lambda/4, (2G-d)\lambda/4$	
		98) $d\lambda/2, d\lambda/2, d\lambda/2$	8

32. Октаэдрическая симметрия

$(x_0=n^{h+d+\chi}\overset{3}{a}_0,\ x_1=n^{d+v}\overset{3}{a}_{0+n}d,\ x_2=n^{d+h+v}\overset{3}{a}_{0+2n}d)$

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
71) $\lambda, \lambda, \lambda$	53) $\chi\lambda/2, \chi\lambda/2, \chi\lambda/2$	99) $(2F+2h-d)\lambda/4, (2F+2\chi-d)\lambda/4, (2F+2v-d)\lambda/4$	

[1] Ранее (103 а).

[2] Ранее (93 а); точно так же (95 а) вместо (94 а) и т. д. вплоть до (103а), которая стоит вместо прежнего (102 а).

Симморфные сист.	Гемисимморфные сист.	Асимморфные сист.	Итого
72) $F\lambda/2,\ F\lambda/2$ $F\lambda/2$		100) $(2F-d+\chi)\lambda/4,$ $(2F+2G-d+\chi)\lambda/4$ $(2G-d+\chi)\lambda/4$	
73) $F\lambda/2, (F+G)\lambda/2,$ $G\lambda/2$	54) $(F+\chi)\lambda/2,$ $(F+G)\lambda/2,$ $G\lambda/2$	101) $(2F-d-\chi)\lambda/4,$ $(2F+2G-d+\chi)\lambda/4,$ $(2G-d+\chi)\lambda/4$ 102) $d\lambda/2,\ d\lambda/2,\ d\lambda/2$ 103) $(d+\chi)\lambda/2,\ (d+\chi)\lambda/2,$ $(d+\chi)\lambda/2$	10
15	6	15	36

Из этой таблицы легко непосредственно увидеть пространственное расположение первоначальных элементов симметрии из числа полной комбинации, если обратить внимание на смысл отдельных параметров. Даже если не обращать внимания на место каждого параметра в уравнениях; а такое место является совершенно определенным и однозначным для каждого элемента симметрии, уже сама буква, его обозначающая, дает расположение совершенно достаточным образом, поскольку из выше принятых условий о значении (латинских, греческих) букв каждой букве соответствует элемент симметрии с совершенно определенным пространственным расположением.

Прежде всего из каждого уравнения следует непосредственно, имеем ли мы дело с симморфной, гемисимморфной или асимморфной системой. В первом случае в уравнениях нет ни (маленьких) латинских, ни греческих параметров (букв) в тех членах, которые дают элементы поступания, во втором случае мы имеем одни греческие буквы, и, наконец, в третьем присутствуют обязательно латинские члены.[1]

[1] Так как при преобразовании системы координат могут быть введены новые величины параметров, то наши уравнения более точно характеризуются следующим образом: 1) уравнения, в которых при надлежащим образом выбранных координатных осях отсутствуют в поступательных членах греческие и латинские параметры; такие уравнения характеризуют

Чтобы определить положение любого другого элемента симметрии, исходя из алгебраического уравнения системы, мы должны разобраться, производным каких первоначальных элементов является интересующий нас элемент. Проще всего это показать на отдельных примерах.

В качестве простейшего, мы выбираем случай ромбо-сфеноэдрической симметрии. Первоначальными (примитивными) элементами симметрии здесь являются вертикальная ось y и горизонтальная ось h. Результирующим элементом является другая горизонтальная ось, которая параллельна координатной оси v.

Достаточно ясно, что во всех симморфных системах (9s) — (12s) эта ось пересекается с другими двумя в начале координат (что, впрочем, также непосредственно следует из определения симморфных систем).

В системе (4a) мы встречаемся в поступательных членах с параметром v, причем только в первом уравнении. Это говорит о том, что результирующий элемент есть ось симметрии, которая проходит не через начало координат, но состоит из него на $\lambda / 4$, и лежит в плоскости yv. То же имеет место и для систем (5a) и (6a).

Из уравнения (7a) видно непосредственно, что здесь этот элемент изображается винтовой осью с ходом $\lambda_1/2$, и что эта ось лежит в плоскости zv, не совпадая при этом с координатной осью, но находится в расстоянии $\lambda_0/4$ от нее.

симморфные системы; 2) уравнения, в которых присутствуют, хотя и не обязательно, греческие параметры, но в которых, при надлежащим образом выбранных координатных осях, нет латинских параметров, — это уравнения гемисимморфных систем, и, наконец, 3) уравнения, которые содержат обязательно латинские параметры, — это уравнения асимморфных систем. Достаточно удивительно, что до сих пор никто из занимающихся этим вопросом не уделил внимания такому разделению, которое очень существенно не только с чисто математической точки зрения, но и со структурно-теоретической.

Из уравнения (8a) следует, что тот же элемент и здесь будет винтовою осью с ходом $\lambda_1/2$, и находится в плоскости yv на расстоянии $\lambda/4$ от оси v.

В приложении мы подробно рассмотрим наиболее сложный случай гироэдрической симметрии.

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ВЫВОДА БАРЛОУ

В заключение я хотел бы сделать несколько замечаний по поводу последней работы Барлоу [1] и сопоставить полученные им результаты с моими прежними.

К сожалению, сам Барлоу не сделал этого сопоставления, что ему сделать было бы особенно удобно, поскольку в его распоряжении были составленные мною уравнения всех систем. Он сопоставляет свои результаты лишь с простыми системами Жордана — Зонке.

Он исходит из этих последних систем, но пытается сначала свести их к некоторым десяти-фундаментальным системам. Это сведение, однако, страдает некоторой произвольностью. Лицам, хорошо знакомым с теорией групп, известно, что единственной фундаментальной системой в смысле Барлоу может быть только система (1 s), поскольку последняя обязательно участвует во всех остальных системах в качестве подгруппы. Конечно, эта система фигурирует в других, каждый раз в более или менее специализированных формах.

Принятое Барлоу разделение правильных систем на 7 групп я считаю неприемлемым. Мною многократно указывалось,[2] что если исходить из принципа симметрии, то приходится различать четыре таких группы или системы, а именно, кроме тессеральной (кубической) системы еще дигональную, тетрагональную и гексагональную. Если исходить из принципа

1) Zeitschr. f. Krist., Bd. XXIII, SS. 1—63.

2) „Начала учения о фигурах“, а также „Краткий курс кристаллографии“ и др.

сингонии, [1] то дигональную систему приходится разделить еще на три подсистемы — ромбическую, моноклинную и триклинную. Это разделение уже давно и почти единодушно принято всеми кристаллографами.

Мнение Барлоу, что „проблема разделения однородной структуры на равные объемы есть, очевидно, проблема неопределенная“, имеет силу лишь в отношении стереоэдров (которые он и подразумевает), но не в отношении параллелоэдров. Основное же теоретическое значение принадлежит именно параллелоэдрам; стереоэдрам же (как то видно будет из следующей главы) нельзя приписывать особенной значимости.

Непонятным образом Барлоу, который имел в своем распоряжении больше чем один полный вывод правильных систем, не дает полного перечисления этих систем. В его выводе отсутствует, например, система (16 h) (по Шенфлису C_{2v}^{19}). Если бы мы, Шенфлис и я, вывели излишнюю систему, то нетрудно было бы указать на это. Мне кажется, что уже собранных в мои таблицы диаграмм достаточно, чтобы показать, что указанная система действительно существует, т. е. является правильной и отличается от всех остальных.

Элементы симметрии в системах даны Барлоу весьма неполным образом, и его разделение систем на три группы мне представляется не выдерживающим критики. Барлоу различает: 1) двойные системы с центрами симметрии, 2) системы с плоскостями симметрии, но без центров симметрии, и 3) системы, не имеющие ни плоскостей симметрии, ни центров симметрии.

Я прежде всего должен указать, что центр симметрии (в том смысле, в каком этот термин понимается Барлоу) не представляет собою особенно стоящего элемента симметрии, [2]

---

[1] В том смысле, который придается этому понятию Cope, Zeitschr. t. Krist., Bd. XXIII, S. 107.

[2] Симметрия конечных фигур, стр. 13; Zeitshr. f. Krist., Bd. XX. 28; XXI, S. 586.

это лишь частный и простейший случай составной (сложной) симметрии, а именно случай двойной зеркальной оси. Поскольку же имеет место общая теорема о составной (сложной) симметрии, что прибавление к ней любых других элементов симметрии [т. е. плоскости симметрии или же обыкновенной (не совпадающей с осью составной симметрии) оси симметрии] приводит к виду симметрии, который может быть определен одними лишь осями симметрии и плоскостями симметрии,— тем самым мы видим, что третий раздел групп Барлоу не обоснован. Достаточно перечислить системы, которые не обладают ни плоскостями симметрии, ни плоскостями скольжения. Однако и в этом случае число принадлежащих сюда систем будет несколько больше; сюда войдут также системы, принадлежащие к видам симметрии (2), (11) и (23), а всего таких систем будет пять.

Если исключить эти системы, то все прочие системы обязательно будут иметь плоскости симметрии, либо плоскости скольжения, чего не видно из систематики Барлоу. Если мы желаем найти все системы, обладающие центрами инверсии, то это легко сделать без разделения систем по каким-нибудь общим принципам. Такие центры существуют 1) во всех случаях с двойной или шестерной осью составной (сложной) симметрии [1] и 2) во всех случаях, в которых имеется двойная ось (безразлично, винтовая ось или ось симметрии) и перпендикулярная к ней плоскость прямой симметрии.[2]

Чтобы точно определить положения центров инверсии, можно воспользоваться следующими теоремами, которые приводятся мною без доказательства, ввиду их большой простоты.

---

[1] Центром симметрии в данном случае будет точка пересечения соответствующих оси и плоскости.

[2] Под плоскостью прямой симметрии (точнее симметричности) я понимаю без различия как плоскости (зеркальной) симметрии, так и плоскости скольжения.

1) *Если имеется центр инверсии и произвольное поступание совмещения l, то существует также и результирующий центр инверсии, расположенный от исходного в направлении указанного поступания и в расстоянии $l/2$ от исходного центра инверсии.*

Или же (обратная теорема): *если в некоторой правильной системе точек существуют два центра инверсии в расстоянии $l/2$, то направление прямой, проходящей через оба центра, есть направление поступания совмещения, причем величина последнего равна l.*

2) *Если существует центр инверсии, и через него проходит плоскость симметрии, то существует также двойная ось симметрии, которая проходит через этот центр и перпендикулярна к плоскости.*

Обратная теорема: *точка пересечения плоскости симметрии с перпендикулярной к ней двойной осью симметрии является центром инверсии.*

3) *Если существует центр инверсии и в расстоянии l от него плоскость симметрии, то существует двойная винтовая ось с ходом $2l$, которая проходит через этот центр и перпендикулярна к плоскости симметрии.*

Обратная теорема: *если перпендикулярно к плоскости симметрии имеется винтовая ось с ходом $2l$, то на этой оси имеется центр инверсии в расстоянии l от плоскости симметрии.*

4) *Если центр инверсии располагается в плоскости скольжения, и поступание скольжения равно $2l$, то перпендикулярно к этой плоскости имеется двойная ось симметрии, проходящая через точку, отстоящую от центра инверсии в направлении скольжения на расстоянии l.*

Обратная теорема: *если перпендикулярно к плоскости скольжения имеется ось симметрии, и если поступание скольжения равно $2l$, то существует также и центр инверсии в направлении скольжения и в расстоянии l от*

точки пересечения оси симметрии с плоскостью скольжения.

5) *Если существует центр инверсии и плоскость скольжения (со скольжением 2l) в расстоянии h от центра, то существует перпендикулярная к плоскости двойная винтовая ось с ходом 2h, которая отстоит от центра инверсии в направлении скольжения на величину l.*

Обратная теорема: *если существует двойная винтовая ось с ходом 2h и перпендикулярная к ней плоскость скольжения со скольжением 2l, то существует также и центр инверсии, который отстоит от плоскости на h и от оси на l и лежит с винтовой осью в одной плоскости, параллельной направлению скольжения.*

С помощью этих теорем легко определить на каждой диаграмме положение центра инверсии и, таким образом, сопоставить изображенные мною системы с системами Барлоу и идентифицировать последние.

Что касается идентификации тех систем, которые вошли во вторую группу Барлоу, то сделать это труднее, ввиду частичных неточностей его указаний.[1]

Сопоставление приведенных здесь систем с системами Барлоу

Симморфные системы		Гемисимморфные системы		Асимморфные системы	
Федоров	Барлоу	Федоров	Барлоу	Федоров	Барлоу

I. Дигональная система

а. Триклинная подсистема

1. Гемипинакоидальная симметрия

1	65	—	—	—	—

[1] Так, например, в системах $29\,в_2$ (36 а) и $38\,в_2$ (28 h) отнюдь не отсутствуют плоскости симметрии, как то совершенно ясно следует из прилагаемых диаграмм.

Симморфные системы		Гемисимморфные системы		Асимморфные системы	
Федоров	Барлоу	Федоров	Барлоу	Федоров	Барлоу
		2. Пинакоидальная симметрия			
2	65a;	—	—	—	—
		в. Моноклинная подсистема			
		3. Гемипризматическая осевая симметрия			
3	63	—	—	1	62
4	64				
		4. Гемипризматическая безосная симметрия			
5	65 B_1	1	65 B_2	—	—
6	65 B_3	2	65 B_4		
		5. Ромбопризматическая симметрия			
7	63 a_1	3	63a_2	2	62a_1
8	64 a_1	4	64a_2	3	62a_2
		с. Ромбическая подсистема			
		6. Сфеноэдрическая симметрия			
9	56			4	53
10	59	—	—	5	57
11	60			6	58
12	61			7	55
				8	54
		7. Ромбопирамидальная симметрия			
13	56 B_1	5	56 B_2	9	53 B_1
		6	56 B_3	10	53 B_2
		7	56 B_4	11	53 B_4
		8	56 B_6	12	53 B_4
		9	56 B_5	13	57 B_1
14	59 B_1	10	59 B_2		
15	59 B_3	11	59 B_4		
		12	59 B_5		
		13	59 B_6		
16	58 B_1	14	58 B_3		
		15	58 B_2		
17	61 B_1	16	?		

Симморфные системы Федоров	Барлоу	Гемисимморфные системы Федоров	Барлоу	Асимморфные системы Федоров	Барлоу
8. Ромбобипирамидальная симметрия					
18	$56a_1$	17	$56a_2$	14	$53a_1$
		18	$56a_4$	15	$53a_2$
		19	$56a_3$	16	$53a_3$
19	$59a_1$	20	$59a_2$	17	$53a_4$
		21	$59a_3$	18	$57a_1$
		22	$59a_4$	19	$57a_2$
20	$60a_1$	23	$60a_2$	20	$58a_1$
21	$61a_1$	24	$61a_2$	21	$58a_2$
				22	$55a_3$
				23	$55a_2$
				24	$55a_1$
				25	$55a_4$
				26	$55a_5$
				27	$55a_6$
				28	$54a_2$
				29	$54a_1$
II. Тетрагональная система					
9. Тетрагонально-пирамидальная симметрия					
22	34			30 и 31	26 и 27
23	38	—	—	32	28
				33	29
10. Дитетрагонально-пирамидальная симметрия					
24	$34b_1$	25	$34b_2$	34	$28b_1$
		26	$34b_3$	35	$28b_2$
		27	$34b_4$	36	$29b_2$
25	$38b_1$	28	$38b_2$	37	$29b_1$
				38	$29b_3$
				39	$29b_4$
11. Тетрагонально-сфеноэдрическая симметрия					
26	63 c	—	—	—	—
27	64 c				

Симморфные системы Федоров	Барлоу	Гемисимморфные системы Федоров	Барлоу	Асимморфные системы Федоров	Барлоу
	12. Тетрагонально-бипирамидальная симметрия				
28	$34a_1$	29	$34a_2$	40	$28a_1$
29	$38a_1$			41	$29a_1$
				42	29a
	13. Тетрагонально-трапецоэдрическая симметрия				
30	39			43	40
31	41	—	—	44 и 45	30 и 31
				46	35
				47	36
				48 и 49	32 и 33
				50	37
	14. Тетрагонально-скаленоэдрическая симметрия				
32	$56\ \beta_1$	30	$56\ \beta_2$	51	?
33	$59\ \beta_1$	31	$59\ \beta_2$	52	?
		32	$59\ \beta_3$	53	?
		33	$59\ \beta_4$		
34	$60\ \beta_1$				
35	$61\ \beta_1$	34	$61\ \beta_2$		
	15. Дитетрагонально-бипирамидальная симметрия				
36	$39\ a_1$	35	$39\ a_2$	54	$40\ a_1$
		36	$39\ a_4$	55	$40\ a_4$
		37	$39\ a_3$	56	$40\ a_2$
37	41	38	$41\ a_2$	57	$40\ a_3$
				58	$35\ a_1$
				59	$35\ a_2$
				60	$36\ a_1$
				61	$36\ a_2$
				62	$36\ a_3$
				63	$36\ a_4$
				64	$37\ a_1$
				65	$37\ a_2$
				66	$37\ a_3$
				67	$37\ a_4$

Симморфные системы Федоров	Симморфные системы Барлоу	Гемисимморфные системы Федоров	Гемисимморфные системы Барлоу	Асимморфные системы Федоров	Асимморфные системы Барлоу
III. Гексагональная система					
16. Тригонально-пирамидальная симметрия					
38	48			68 и 69	42 и 43
39	51				
17. Дитригонально-пирамидальная симметрия					
40	48 b_1	39	49b_2		
41	48 b_3	40	48b_4		
42	51 b_1	41	51b_2		
18. Тригонально-бипирамидальная симметрия					
43	48 b_5	—	—	—	—
19. Тригонально-трапецоэдрическая симметрия					
44	50			70 и 71	46 и 47
45	49	—	—	72 и 73	43 и 45
46	52				
20. Дитригонально-бипирамидальная симметрия					
47	50 b_1	42	50 b_2		
48	49 b_1	43	49 b_2	—	—
21. Гексагонально-пирамидальная симметрия					
49	23	—	—	74 и 75	14 и 15
				76 и 77	16 и 17
				78	20
22. Дигексагонально-пирамидальная симметрия					
50	23 b_1	44	23 b_2	79	20 b_2
				80	20 b_2
23. Ромбоэдрическая симметрия					
51	48 a_1	—	—	—	
52	51 a_1				

Симморфные системы		Гемисимморфные системы		Асимморфные системы	
Федоров	Барлоу	Федоров	Барлоу	Федоров	Барлоу
24. Гексагонально-бипирамидальная симметрия					
53	23 a_1	—	—	81	20a_1
25. Гексагонально-трапецоэдрическая симметрия					
54	25	—	—	82 и 83	18 и 19
				84 и 85	21 и 22
				86	24
26. Гексагонально-скаленоэдрическая симметрия					
55	50 a_1	45	50 a_2		
56	49 a_1	46	49 a_2	—	—
57	52 a_1	47	52 a_2		
27. Дигексагонально-бипирамидальная симметрия					
58	25 a_1	48	25 a_2	87	24, a_1
				88	24 a_1

IV. Тессеральная система

Симморфные системы		Гемисимморфные системы		Асимморфные системы	
Федоров	Барлоу	Федоров	Барлоу	Федоров	Барлоу
28. Тетартоэдрическая симметрия					
59	7	—	—	89	1
60	10			90	2
61	6	—	—	—	—
29. Додекаэдрическая симметрия					
62	7 a_1	49	7 a_2	91	1a_1
63	10 a_1			92	2a_1
64	6 a_2	50	6 a_2		
30. Тетраэдрическая симметрия					
65	7b_1	51	7b_2	93	2b_1
66	10b_1				
67	6b_1	52	6b_2		

Симморфные системы Федоров	Барлоу	Гемисимморфные системы Федоров	Барлоу	Асимморфные системы Федоров	Барлоу
		31. Гироэдрическая симметрия			
68	12			94 и 95	3 и 4
69	13	—	—	96	5
70	8			97	9
				98	11
		32. Октаэдрическая симметрия			
71	12 a_1	53	$12a_2$	99	$5a_1$
72	13 a_1			100	$9a_1$[1]
73	8 a_1	54	$8a_2$	101	$9a_2$
				102	$11a_1$
				103	$11a_2$

Из этого сопоставления нетрудно видеть, что в выводе Барлоу отсутствуют системы (16 h), (51 a), (52 a) и (53 a). Кроме того, у Барлоу фигурируют системы несуществующие. Так, тождественными оказываются системы $60\beta_2$ и $60\beta_1$. Что же касается систем $56\beta_3$ и $56\beta_4$, то они не возможны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поскольку в этой короткой статье я должен был ограничиться, главным образом, лишь результатами тех исследований, которые гораздо более полно изложены в моем труде „Симметрия правильных систем фигур“, то я все же хотел бы показать достаточно полно на нескольких примерах, как получаются предлагаемые мною аналитические уравнения и как они переводятся на язык диаграмм. Для

[1] Если бы указание Барлоу о местонахождении центра инверсии было правильным, то в этом случае имелись бы также и параллельные плоскостям куба плоскости симметрии, что невозможно, поскольку в данной системе перпендикулярно этим плоскостям имеются правые и левые четверные винтовые оси.

этого я выбираю наиболее сложный случай асимморфных систем гироэдрического вида симметрии, поскольку все другие оказываются значительно более легкими.

В общем изложении было показано, что в этом случае: 1) за независимые (и достаточные) могут быть выбраны две оси, например, O и z_0, и 2) согласно теореме 2, в этом случае оси обоих сортов будут представлены и как оси симметрии и как винтовые оси. Поэтому мы всегда можем ограничиться осями симметрии в качестве независимых. И тогда для вывода асимморфных систем остается единственное допущение, что обе независимые оси не пересекаются в одной точке.

При этом допущении мы выбираем кратчайшее расстояние между ними в направлении оси x_1 за координатную ось, и само это расстояние обозначаем L_1. Началом координат выбираем точку пересечения оси x_1 с осью симметрии O.

Если сместить координатную систему в направлении оси x_1 так, чтобы начало оказалось на оси z_0, то точка (a_0, a_1, a_1)[1] будет иметь координатами теперь $(a_0, a_1 - L_1, a_2)$. После поворота вокруг оси z_0 наша точка перейдет в положение $(-a_0, a_2, a_1 - L_1)$. Если теперь снова вернуться к первоначальному положению начала координат, то соответственные координаты будут $(-a_0, a_2 + L_1, a_1 - L_1)$. Если теперь сделать поворот вокруг оси O, то окончательно мы получим:

$$x_0 = a_2 + L_1; \quad x_1 = a_1 - L_1; \quad x_2 = -a_0 \qquad \text{(a)}$$

Эти уравнения показывают, что результирующая обоих поворотов есть поворот вокруг четверной левой винтовой оси, параллельной оси x_1, причем ход вдоль оси равен L_1. Эта ось не проходит через начало координат, и тем самым мы вынуждены определить ее положение, т. е. координаты l_0 и l_2 на координатных осях x_0 и x_2.

---

[1]) Т. е. точка, координаты которой $x_0 = a_0$; $x_1 = a_1$; $x_2 = a_2$.

Если сделать поворот вокруг левой четверной оси x_1, то точка $(a_0 - l_0, a_1, a_2 - l_2)$ перейдет в положение $(a_2 - l_2, a_1 - L, -a_0 + l_0)$, где L есть величина хода винтовой оси. Если теперь вернуться к первоначальной системе координат, то мы окончательно получаем

$$x_0 = a_2 + l_0 - l_2; \quad x_1 = a_1 - L; \quad x_2 = -a_0 + l_0 + l_2 \qquad \text{(b)}$$

Сравнивая с уравнениями (a), мы видим, что

$$l_0 = L_1/2, \quad l_2 = -L_1/2, \quad L = L_1 \qquad (1)$$

Таким образом, мы полностью определили положение результирующей оси. В частности, L_1 будет отрицательным для правой оси и положительным — для левой.

При выводе уравнения мы должны еще установить положения первоначальных (примитивных) осей x_0 и z_1, причем первую мы должны рассматривать как результирующую двойных осей x_1 и z_0, а вторую как результирующую осей x_0 и z_0. Начнем с установления положения оси x_0. Снова смещаем координатную систему таким образом, чтобы начало ее попадало на ось x_1. Точка (a_0, a_1, a_2) будет иметь координатами $(a_0 - L_1/2, a_1, a_2 + L_1/2)$. Если сделать поворот вокруг оси x_1, считая ее двойною винтовою осью, то мы придем в точку $(-a_0 + L_1/2, a_1 + 2L_1, -a_2 - L_1/2)$. После возвращения к первоначальной системе координат мы будем иметь $(-a_0 + L_1, a_1 + 2L_1, -a_2 - L_1)$.

Если снова сместить координатную систему таким образом, чтобы начало координат было на оси z_0, то мы получаем выражение $(-a_0 + L_1, a_1 + L_1, -a_2 - L_1)$. После поворота вокруг этой оси симметрии мы получим $(a_0 - L_1, -a_2 - L_1, a_1 + L_1)$ и, наконец, после возвращения к первоначальной координатной системе, будем иметь окончательно

$$x_0 = a_0 - L_1; \quad x_1 = -a_2; \quad x_2 = a_1 + L_1 \qquad \text{(c)}$$

Мы снова, таким образом, пришли к результирующей четверной левой винтовой оси x_0, которая не проходит через начало координат.

Чтобы получить расположение этой оси в пространстве, принимаем, что она определяется координатами (O, d_1, d_2). Если сместить координатную систему в плоскости $x_1 x_2$ таким образом, чтобы начало оказалось на этой оси, то координаты точки (a_0, a_1, a_2) превратятся в $(a_0, a_1 - d_1, a_2 - d_2)$. Если совершить поворот вокруг этой оси, считая ее *левой*, мы придем к точке $(a_0 - L, -a_2 + d_2, a_1 - d_1)$; и, наконец, вернувшись к первоначальной системе координат, будем иметь

$$x_0 = a_0 + L; \quad x_1 = -a_2 + d_1 + d_2; \quad x_2 = a_1 - d_1 + d_2 \qquad \text{(d)}$$

Сопоставление уравнений (c) и (d) приводит нас к следующим соотношениям [1])

$$L = L_1; \quad d_1 = -L_1/2; \quad d_2 = L_1/2 \qquad (2)$$

Чтобы, наконец, определить еще положение оси z_1, смещаем систему так, чтобы начало координат лежало на оси x_0. Точка (a_0, a_1, a_2) изменяет свои координаты в $(a_0, a_1 + L_1/2, a_2 - L_1/2)$. Поворот вокруг нашей оси, которую мы будем считать *двойной* винтовой, приводит нас в точку $(a_0 + 2L_1, -a_1 - L_1/2, -a_2 + L_1/2)$. После возвращения к первоначальной системе координат мы будем иметь $(a_0 + 2L_1, -a_1 - L_1, -a_2 + L_1)$.

Если смещать координатную систему в направлении оси x_1 так, чтобы начало координат попало на ось z_0, то мы найдем $(a_0 + 2L_1, -a_1 - 2L_1, -a_2 + L_1)$; после поворота вокруг этой оси имеем $(-a_0 - 2L_1, -a_2 + L_1, -a_1 - 2L_1)$

---

[1]) Этот результат можно получить и непосредственно, если повернуть винтовую ось x_1 вокруг оси симметрии O. Таким же образом определяется положение винтовой оси x_2.

И, наконец, после возвращения к первоначальной системе координат имеем окончательно:

$$x_0 = -a_0 + 2L_1; \quad x_1 = -a_2 + 2L_1; \quad x_2 = -a_1 - 2L_1 \qquad \text{(e)}$$

Теперь в нашем распоряжении имеются все данные для вывода нужных уравнений. Необходимо только иметь в виду, что L может иметь три различных значения, чем определяется возможность не одной системы, а трех:

1) $L = L_1 = -\lambda/4$; $l_0 = -\lambda/8$; $l_2 = \lambda/8$; $d_1 = \lambda/8$; $d_2 = -\lambda/8$
2) $L = L_1 = \lambda/4$; $l_0 = \lambda/8$; $l_2 = -\lambda/8$; $d_1 = -\lambda/8$; $d_2 = \lambda/8$
3) $L = L_1 = \lambda/2$; $l_0 = \lambda/4$; $l_2 = \lambda/4$; $d_1 = \lambda/4$; $d_2 = \lambda/4$

В первом случае мы получаем систему (94 а):

$$x_0 = n^{h+d} \overset{3}{a}_0 + (2v + 2d - h)\lambda/4$$
$$x_1 = h^{v+d} \overset{3}{a}_{0+n} d + (2h + 2d + v)\lambda/4$$
$$x_2 = n^{v+h+d} \overset{3}{a}_{0+2n} d + (2d + h - v)\lambda/4$$

Во втором случае получаем систему (95 а):

$$x_0 = n^{h+d} \overset{3}{a}_0 + (2v + 2d + h)\lambda/4$$
$$x_1 = n^{v+d} \overset{3}{a}_{0+n} d + (2h + 2d - v)\lambda/4$$
$$x_2 = n^{v+h+d} \overset{3}{a}_{0+2n} d + (2d - h + v)\lambda/4$$

Оба уравнения существенным образом упрощаются, если произвести преобразование координат, а именно, таким образом, чтобы начало лежало в точке ($\lambda/4$, $\lambda/4$, $\lambda/4$).

Чтобы выполнить это преобразование и, притом, сохранить за точкой (a_0, a_1, a_2) те же координаты и в новой системе координат, мы, очевидно, должны уже в старой системе координат заменить тройку (a_0, a_1, a_2) на ($a_0 + \lambda/4$, $a_1 + \lambda/4$, $a_2 + \lambda/4$).

Таким образом, первые члены (собственно симметрии) наших уравнений становятся:

$$n^{h+d}\overset{3}{a}_0+n^{h+d}\lambda/4,\quad n^{v+d}\overset{3}{a}_{0+n}d+n^{v+d}\lambda/4$$
$$n^{v+h+d}\overset{3}{a}_{0+2n}d+n^{v+h+d}\lambda/4$$

За счет тождества[1])

$$n^{h+d}=1-2(h+d);\ n^{v+d}=1-2(v+d)$$
$$n^{v+h+d}=1-2(v+h+d)$$

первое уравнение, т. е. (94а), преобразуется в

$$x_0=n^{h+d}\overset{3}{a}_0+(2v+h)\lambda/4$$
$$x_1=n^{v+d}\overset{3}{a}_{0+n}d+(2h-v)\lambda/4$$
$$x_2=n^{v+h+d}\overset{3}{a}_{0+2n}d+(v-h)\lambda/4$$

а уравнение (95а) приобретает вид:

$$x_0=n^{h+d}\overset{3}{a}_0+(2v-h)\lambda/4$$
$$x_1=n^{v+d}\overset{3}{a}_{0+n}d+(2h+v)\lambda/4$$
$$x_2=n^{v+h+d}\overset{3}{a}_{0+2n}d+(h-v)\lambda/4$$

Отсутствие параметра d в поступательных членах этих уравнений показывает нам, что ось z_1 (также оси z_3 и z_4) пересекается с осью O в начале координат, что отвечает тригонально-трапецоэдрической симметрии.

По причинам, излагаемым в следующей статье, весьма удобно эти системы выразить еще в одной форме, отвечаю-

---

[1]) Необходимо твердо помнить, что параметры h, v, d могут иметь значения 0 или 1 и никаких других, и что коэффициенты поступательных членов можно увеличивать или уменьшать на величины, кратные 4, т. е. цифры 4, 8 и т. д. в наших уравнениях эквивалентны нулю и т. д.

щей сдвигу начала системы координат вдоль оси O в точку ($\lambda/8$, $\lambda/8$, $\lambda/8$). Уравнения принимают вид:

$$x_0 = n^{h+d}\overset{3}{a}_0 + (2v - d)\,\lambda/4$$
$$x_1 = n^{v+d}\overset{3}{a}_{0+n}\,d + (2v + 2h - d)\,\lambda/4$$
$$x_2 = n^{v+h+d}\overset{3}{a}_{0+2n}\,d + (2h - d)\,\lambda/4 \qquad (94\text{ a}')$$

Также:

$$x_0 = n^{h+d}\overset{3}{a}_0 + (2v + 2h - d)\,\lambda/4$$
$$x_1 = n^{v+d}\overset{3}{a}_{0+n}\,d + (2h - d)\,\lambda/4$$
$$x_2 = n^{v+h+d}\overset{3}{a}_{0+2n}\,d + (2v - d)\,\lambda/4 \qquad (95\text{ a}')$$

До сих пор мы подразумевали, что направления осей x сопряжены с перпендикулярными к ним плоскостями. Если это не имеет места, то возможны два предположения: либо 1) сопряженными с указанными плоскостями будут направления осей O, либо 2) этими сопряженными направлениями будут направления осей z. Эти оба допущения действительно приводят нас к новым системам, а именно, первое предположение от системы (94 а) приводит к системе (96 а):

$$x_0 = n^{h+d}\overset{3}{a}_0 + (2F + 2h - d)\,\lambda/4;$$
$$x_1 = n^{v+d}\overset{3}{a}_{0+n}\,d + (2F - d)\,\lambda/4;$$
$$x_2 = n^{v+h+d}\overset{3}{a}_{0+2n}\,d + (2F + 2v - d)\,\lambda/4$$

Из системы (95 а) мы не получаем новой системы, но ту же (96 а), в которой перемещаются координаты x_1 и x_2. Второе допущение приводит нас к новой системе (97 а):

$$x_0 = n^{h+d}\overset{3}{a}_0 + (2F - d)\,\lambda/4$$
$$x_1 = n^{v+d}\overset{3}{a}_{0+n}\,d + (2F + 2G - d)\,\lambda/4$$
$$x_2 = n^{v+h+d}\overset{3}{a}_{0+2n}\,d + (2G - d)\,\lambda/4$$

Отсутствие параметров v и h в поступательных членах этих уравнений и, наоборот, наличие параметра d в них же, показывают, что сейчас. в начале координат пересекаются все оси симметрии за исключением осей z. Элементарные фигуры этой системы, таким образом, характеризуются тетартоэдрической симметрией, что, кстати, особенно четко выступает на диаграмме.

Остается еще рассмотреть третий случай ($L = \lambda / 2$), которому отвечает система (98 а):

$$x_0 = n^{h+d} \overset{3}{a_0} + h\lambda/2; \quad x_1 = n^{v+d} \overset{3}{a}_{0+n} d + v\lambda/2$$
$$x_2 = n^{v+h+d} \overset{3}{a}_{0+2n} d + (v + h)\lambda/2.$$

Если сместить начало координат в точку ($\lambda/4$, $\lambda/4$, $\lambda/4$), то уравнения также чрезвычайно упрощаются, а именно:

$$x_0 = n^{h+d} \overset{3}{a_0} + d\lambda/2; \quad x_1 = n^{v+d} \overset{3}{a}_{0+n} d + d\lambda/2$$
$$x_2 = n^{v+h+d} \overset{3}{a}_{0+2n} d + d\lambda/2$$

В этом виде уравнения показывают, что и здесь все оси симметрии, за исключением осей z, пересекаются в начале координат и, что, следовательно, все элементарные фигуры имеют тетартоэдрическую симметрию.

На этом мы заканчиваем вывод соответствующих заданному виду симметрии правильных систем точек. Когда уравнение системы выведено, то чрезвычайно просто графически изобразить все соответствующие данной системе элементы симметрии.

Турьинские рудники,
Урал.

Объяснения к таблицам-вклейкам

В таблицах приведены элементы симметрии для каждой правильной системы точек, и каждая такая система характеризуется отдельной диаграммой.

Простые системы, которые являются отправными при выводе всех других, легко выделяются среди общей массы за счет жирно отпечатанных символов осей совмещения. Чтобы выделить эти системы еще более четко, их номера обведены кружками. Все системы, которые выводятся из данной простой системы и, в частности, характеризуются теми же элементами симметрии совмещения, изображены одна подле другой таким образом, что ограничивающие ячейку каждой системы контуры оказываются общими для всего гнезда систем, и мы имеем перед собою каждый раз непрерывную цепочку связанных систем. При таком расположении оказывается излишним изображение элементов симметрии совмещения, которые являются общими для всех систем, и последние сохранены нами только в диаграмме коренной простой системы. Присутствие их во всех остальных системах гнезда подразумевается.

Нами приняты следующие условные обозначения (см. стр. 395).

В таблицах жирными линиями показаны горизонтальные двойные оси симметрии; жирным пунктиром указаны двойные винтовые оси.

Тонкими сплошными линиями показаны вертикальные плоскости симметрии; тонкими пунктирными линиями показаны плоскости скольжения с вертикальным поступанием.

В других скользящих плоскостях указано направление поступания таким образом: при горизонтальном поступании концы тонкой линии снабжены стрелками; если поступание косое, то по концам тонких линий даны кружочки (обычно,

— вертикальная двойная ось симметрии.

— вертикальная двойная винтовая ось.

— вертикальная тройная ось симметрии.

— правая вертикальная тройная винтовая ось.

— левая вертикальная тройная винтовая ось.

— вертикальная четверная ось симметрии.

— вертикальная четверная правая винтовая ось с ходом λ/4.

— вертикальная четверная левая винтовая ось с ходом λ/4.

— вертикальная четверная винтовая ось с ходом λ/2.

— вертикальная шестерная ось симметрии.

— вертикальная правая шестерная винтовая ось с ходом λ/6.

— вертикальная левая шестерная винтовая ось с ходом λ/6.

— вертикальная правая шестерная винтовая ось с ходом λ/3.

— вертикальная левая шестерная винтовая ось с ходом λ/3.

— вертикальная шестерная винтовая ось с ходом λ/2.

— вертикальная двойная ось составной (сложной) симметрии.

— вертикальная четверная ось составной (сложной) симметрии.

— вертикальная шестерная ось составной (сложной) симметрии.

[для последних трех осей в таблицах-вклейках пунктирным контуром вокруг ячейки указаны положения плоскости составной (сложной) симметрии].


такие поступания равны половине поступания совмещения всей системы; если поступание скольжения равно четверти поступания совмещения всей системы, то кружочки показаны сплошными черными).


В случае тессеральной (кубической) системы положение косо идущих осей и плоскостей указано буквами, значение которых лучше всего уясняется из приложенной (круговой, стереографической) диаграммы. В этой диаграмме полюсы плоскостей и осей отмечены специальными буквами. Кроме того, горизонтальные четверные оси симметрии обозначены цифрою 4; винтовые оси, правые с ходом $\lambda/4$ через $4r$, левые же — через $4l$; четверные винтовые оси с ходом $\lambda/2$ обозначаются $4v$.

Если горизонтальная ось не лежит в плоскости чертежа, то соответствующее расстояние, считаемое сверху вниз, обозначается цифрою, причем для всех систем, кроме гексагональной, за единицу принято $\lambda/4$, и для последней $\lambda/6$. Половинное расстояние обозначается просто точкой. То же самое имеет место и для горизонтальных плоскостей симметрии, а также скользящих плоскостей, которые обозначены по краям ячейки сплошными и соответственно пунктирными линиями. Относящиеся к плоскостям цифры заключены в скобки.

Я должен добавить, что в целях большей ясности диаграммы, опущены некоторые, менее важные, элементы симметрии. В частности, во всех системах опущены те плоскости скольжения, для которых в данной системе имеется параллельная плоскость симметрии [исключением являются системы (6 s) и (2 h), для которых наличие обоих сортов плоскостей является существенной характеристикой]. Точно также опущены горизонтальные двойные винтовые оси, если параллельно им существуют совпадающие с ними в плоскости проекции двойные оси симметрии. В случае тессеральной системы опущены также правые и левые тройные оси O и все плоскости скольжения Z.

Таблица I







ЧАСТЬ I[6]

ВОЗМОЖНЫЕ ВИДЫ СТРУКТУР

(С наглядным графическим изображением симморфных видов структур)

Решившись отдать в печать настоящую первую часть, я очень хорошо сознаю недостаточность в разработке представленного здесь очень богатого материала. В этом отношении я должен сослаться на предисловие к Введению и на неблагоприятные для моих научных работ обстоятельства, служащие мне извинением.

Если бы я сейчас не опубликовал материала, бесполезно лежавшего у меня в течение ряда лет, то мне пришлось бы потерять всякую надежду когда-либо это сделать. Всего вероятнее, что с течением времени я и сам перестал бы ориентироваться в данных вопросах.

В нижеследующей первой части по возможности полностью (поскольку мне это позволяли неблагоприятные обстоятельства) решена первая задача теории кристаллической структуры. Здесь развито с полной мотивировкой понятие структурного вида и чисто геометрическим путем проведен по возможности исчерпывающий вывод всех возможных видов структур, число которых достигает тысячи с лишним. Эти виды структур (подразделенные чисто геометрически на симморфные и гемисимморфные, обыкновен-

ные и необыкновенные и, наконец, асимморфные) с чисто кристаллографической точки зрения делятся на две группы. Наиболее вероятная из них содержит лишь 246 видов структур. Можно было бы все виды структур представить весьма наглядно графически путем изображения формы соответственного единичного пространственного участка и расположения элементов симметрии, находящихся в данном участке. Однако, несмотря на то, что такие исчерпывающие изображения были бы весьма полезны, журнальные рамки не позволяют привести в одной статье более тысячи с лишним фигур. Поэтому пришлось ограничиться изображением важнейших симморфных обыкновенных видов структур. Эти изображения вместе с изображениями правильных систем точек (см. Введение, табл. I и II) позволяют получить достаточную и наглядную характеристику для каждого найденного вида структур. В самом деле такая характеристика однозначно и точно устанавливается с помощью двух моментов — соответственной системы точек и формы и симметрии элементарного пространственного участка. Эти два определяющих момента отражены в символе каждого вида структуры. Тем самым символ вместе с таблицами Введения и изображениями симморфных систем дает в достаточной мере понятие о сущности каждого из заданных видов структур. С тем, чтобы придать символам наибольшую наглядность и помочь легко найти по таблицам содержащиеся в них определяющие моменты, я заменил простую нумерацию систем точек символами. Собственные номера мной оставлены лишь для простых систем, тогда как для двойных систем даются номера соответственных простых систем, входящих в качестве частей в двойные системы; к ним добавлены лишь параметры (греческие), характеризующие прямую симметрию. В связи с тем, что каждая гемисимморфная система может выводиться из двойной симморфной системы путем относительного передвижения половины системы точек, я пишу для такой системы символ симморф-

ной двойной системы и добавляю лишь номер по порядку, в котором система была выведена.[1]

То же самое имеет место и для асимморфных систем; однако, для того чтобы их символы отличались, я заключаю в скобки параметры и следующие за ними номера.

Символы для видов структур состоят из двух частей: 1) символ соответственной системы точек и 2) символ элементарного пространственного участка. Этот второй символ идентичен с символом одного из симморфных видов структур и тем самым позволяет найти свое значение непосредственно на таблице. Он состоит из символа одной из симморфных систем точек и римской цифры, указывающей тип параллелоэдра. Цифра III обозначает трипараллелоэдр, IV — тетрапараллелоэдр, VI — гексапараллелоэдр и VII — гептапараллелоэдр. Принятая здесь номенклатура та же самая, что и в моих более ранних работах. Однако в связи с появлением „Физической кристаллографии“ проф. П. Грота, где мы находим осуществленной новую рациональную номенклатуру, я поместил в скобках названия, предложенные П. Гротом, в тех случаях, когда они не совпадают с моими (несколько слов по этому поводу см. в первом приложении).

Для того, чтобы получить вполне наглядное представление о каждом найденном виде структур, можно посоветовать для каждого вида приготовить такую модель, которая передавала бы форму элементарного пространственного участка и характер элементов симметрии.

До сих пор были в употреблении лишь модели, предложенные Л. Зонке. Эти модели должны были давать представление о расположении точек в простых правильных системах. Если, однако, принять во внимание, что положения точек являются совершенно случайными и что действительно постоянными положениями обладают элементы симметрии,

---

[1] См. второе приложение.

то мы придем к заключению, что такие модели не дают правильного представления о сущности демонстрируемой системы.

Правда, можно предложенное Зонке вспомогательное средство применить также к демонстрации двойных систем. Лучше всего было бы при этом использовать вместо шаров по возможности сильно асимметричные формы (например, весьма неправильные сфеноиды), а для двойных систем — формы двух сортов, из которых одни являются симметричными по отношению к другим. Такие модели следовало бы устанавливать по трем, а не только по одной взаимно-перпендикулярным плоскостям. Нужно было сконструировать модели так, чтобы в них можно было производить вращения, согласно теории. Только тогда было бы хорошо демонстрировать правильные системы точек.

Во второй части этой работы, которая появится позднее, я надеюсь изложить дедуктивные выводы из теории, т. е. остановиться на ее подлинной сущности.

Глава I

СУЩНОСТЬ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА

Что нам известно о кристаллическом веществе? Мы знаем ряд его удивительных свойств, которые привели нас к понятиям о кристаллической однородности. Кристаллическая однородность отличается от однородности в смысле химическом и физическом. Агрегат, состоящий исключительно из кварцевых мелких зерен, образует однородную каменную породу, однако такая порода не будет кристаллически однородной. В то же время однородной будет чистейшая разновидность известняка, не обладающая вместе с тем явно кристаллической однородностью. Гомогенным, но отнюдь не кристаллически-однородным является чистое стекло.

Если взять кристаллически-однородное вещество, например тонкий шлиф из одиночного кристалла кварца, то мы

найдем такое вещество однородным в отношении всех его свойств. Лучше всего можно это установить с помощью оптических исследований. Параллельные поляризованные лучи, пройдя через кристаллическую пластинку, дают красивую окраску. При этом во всех точках одной и той же пластинки наблюдается один и тот же красочный тон. Пластинка, вырезанная из того же кристалла, но в другой ориентировке, пропускает лучи другого тона или даже другой окраски.

Из наблюдений подобного рода можно заключить, что световые лучи, идущие по заданному направлению во всех точках истинно однородного кристалла, подчинены одним и тем же условиям. Для лучей, идущих по различным направлениям, такие условия различны.

Световой луч, идущий в кристалле, как по одному направлению, так и по направлению, ему прямо противоположному, подчиняется совершенно идентичным условиям. Однако не для всех физических свойств будет так. Например, растворимость кристалла по двум прямо противоположным направлениям проявляется различно. Следовательно в общем случае прямо противоположные направления следует рассматривать как различные. По прямо-параллельным направлениям растворимость кристалла проявляется, как и все его прочие свойства, одинаково.

Возьмем, с другой стороны, такие свойства кристаллического вещества, которые стоят в явном противоречии с его непрерывностью. Сюда в первую очередь относится спайность. Если бы вещество было непрерывным, то скачкообразное изменение его свойств было бы невозможным.

Пусть, например, какой-либо кристалл разорвался под воздействием некоторой силы (на $см^2$) по определенному направлению. Легко было бы представить себе, что в другом, даже не слишком отклоненном направлении, воздействие такой силы будет сильно уменьшаться. Однако, по мере приближения к первому направлению, сила, нужная для

разрыва кристалла, будет все более и более приближаться к первой силе. Небольшое изменение в направлении приложенной силы должно было бы также сказаться в заметном изменении формы грани разрыва. На самом же деле наблюдается нечто совсем другое. Мы констатируем совершенно определенные плоскости спайности со строго определенной ориентировкой. Эта ориентировка в кристаллах с хорошей спайностью может быть установлена путем гониометрических измерений с точностью до долей минут. На подобное же отсутствие непрерывности в кристаллическом веществе указывает свойство кристаллов покрываться строго ориентированными и определенными гранями, а также многие другие характерные для кристаллов признаки. Все эти наблюдения приводят нас к уверенности, что кристаллическое вещество ни в коей мере не является непрерывным, а отличается прерывным строением, т. е. представляет агрегат из в высшей степени мелких частиц.

Результат наблюдений указывает также на то, что кристаллически-однородное вещество состоит из равных и одинаково ориентированных (т. е. полностью расположенных в параллельных положениях) частиц, которые, будучи взятыми вместе, нацело выполняют пространство. [1]

Тем самым мы подошли к чисто геометрической проблеме об отдельных частях пространства, которые в параллельном положении без остатка заполняют пространство, — т. е. к проблеме о параллелоэдрах.

---

[1]) То, что любые части и частицы кристаллического вещества одинаково ориентированы, т. е. параллельны, является непреложным фактом. Даже ничтожные признаки непараллельности указывают на несовершенство в образовании кристаллического вещества. Нужно быть очень мало осведомленным в вопросе, чтобы видеть что-то гипотетическое в понятии кристаллической однородности. Лишь тот, кто не разобрался в этих простых вещах, путает факт кристаллической однородности, на котором базируется вся кристаллография, с теоретическим представлением о молекуле (еще неопределенной величины), или даже с механикой атома.

Эта проблема представляет основу истинной теории кристаллической структуры. Настоящее сочинение и посвящено по возможности полному решению этой проблемы.

Следует иметь в виду, что кристаллическая молекула является чем-то отличающимся от химической молекулы. Она представляет подлинный строительный кирпичик кристаллического вещества и, естественно, определяет его сингонию так же, как и его симметрию.

Переходя к химической молекуле, следует предположить ее асимметричность. В противном случае, каким образом увязать сложность ее состава со степенью симметрии? В качестве классического примера, с давних пор служит хлористый натрий. Мыслимо ли комплекту, состоящему только из двух и притом таких различных (можно было бы даже сказать, противоположных) атомов, как Na и Cl, приписать такую высокую степень симметрии, величина которой равна 48 или, по меньшей мере, 24? Тому, кто усомнится в этом и будет требовать прямого доказательства, почему положение атомов не определяет непосредственно вида симметрии соответственного вещества, можно, думается, привести в качестве доказательства существование всеобщего свойства кристаллов — полиморфизма. Сущность полиморфизма показывает, что не только симметрия, но даже вид сингонии никоим образом не связаны нераздельно с химическим веществом. Величина симметрии может изменяться с температурой, давлением и другими внешними условиями.

Химики со своей стороны приводят основания тому, что химическая молекула не является последней частицей вещества и что наверное существуют более сложные частицы, состоящие из нескольких химических молекул. В общем можно даже сказать, что сложность физической молекулы возрастает с уменьшением температуры, а также с увеличением давления. Мы видим таким образом, что кристаллография и химия, исходя из совершенно различных фактов,

приводят к одному и тому же заключению. Из того, что кристаллическая молекула обладает симметрией и что последняя меняется при различных внешних условиях, непреложно следует, что симметрия действительно не является основным свойством вещества. Она является исключительно результатом различных ориентировок мельчайших молекул. Ими и обусловливается сущность симметрии в геометрическом смысле. В этом смысле параллелоэдры следует рассматривать как части пространства, принадлежащие отдельным кристаллическим молекулам. В то же время параллелоэдры являются комплексами меньших частей, которые мы назовем стереоэдрами. Стереоэдры мы можем также определить как участки пространства, принадлежащие отдельным химическим (?) молекулам.

Согласно одной теореме из учения о фигурах, некоторое число стереоэдров в совокупности образует всегда параллелоэдр. Вопрос о том, является ли асимметричной мельчайшая из частей пространства, отвечающая химической молекуле, представляет второстепенный интерес. В связи с этим второстепенное значение имеет и вопрос о стереоэдрах.

Понятие о простых параллелоэдрах является совершенно определенным. В дальнейшем мы постараемся увязать это понятие с физическими свойствами вещества. При этом не следует упускать из виду того, что помимо молекул и слагающих их атомов, занимающих некоторое количество точек пространственного участка, существует еще эфир, атомы которого занимают остальные точки того же участка. Если мы говорим о равенстве и параллелизме кристаллических молекул, то это относится также и к эфиру.

Короче, мы приходим к результату, что совершенно невозможно охватить кристаллическую систему как одну систему точек и в особых специальных положениях этих точек усматривать первопричину отсутствия прямой симметрии.

Если бы подобный случай и имел место по отношению к одной точке, то в отношении всех других точек это было бы невозможным.

Если выбрать одну точку в химической молекуле или в одном стереоэдре и найти аналогичные точки во всех остальных молекулах, то, согласно одной из теорем учения о фигурах, мы придем к одной правильной системе точек. Кристаллическое вещество никоим образом нельзя рассматривать как одну единственную систему точек. Ему соответствует бесконечное количество равных, одинаково ориентированных и поставленных рядом систем точек. Такие системы, взятые вместе, целиком выполняют пространство. Иными словами: кристаллическое вещество является системой параллелоэдров, усаженных бесконечным количеством точек.

Таким образом мы пришли к заключению, что возможные виды структур следует искать лишь среди правильных систем точек. Возможный вид структуры следует определить как такую закономерную систему, которую можно разделить на равные идентичные параллельные участки пространства, или параллелоэдры, усаженные точками. Те системы точек, которые удовлетворяют такому условию, принадлежат к возможным видам структур. Если для одной и той же системы точек имеются различные возможности подразделения на пространственные участки, то существуют также и различные возможные виды структур, которые могут быть представлены с помощью одной системы точек. Все это — основные вопросы теории кристаллической структуры. Мы видим теперь, что первый шаг в развитии этой теории состоит в разрешении следующих чисто геометрических задач: 1) в установлении всех вообще существующих параллелоэдров, 2) в нахождении общих подразделений пространства, отвечающих каждой системе точек.

Глава II

ПАРАЛЛЕЛОГОНЫ И ПАРАЛЛЕЛОЭДРЫ

Представим себе, что мы двигаемся вдоль одного периметра. Каждой стороне этого периметра припишем направление движения (которое должно мыслиться как направленное вперед всегда в одном и том же смысле) и обозначим это направление стрелкой. Угол, образуемый любой стороной с каждой другой стороной, должен измеряться в направлении от предыдущей стороны к последующей. При этом тот угол, для которого движение от одной к другой стороне отвечает движению часовой стрелки, назовем положительным. Угол, которому соответствует противоположное вращение является отрицательным. При этих условиях будет иметь место следующая сама собой разумеющаяся теорема.

Теорема 1. *Угол между двумя прямыми, принадлежащими некоторой ломаной, равен алгебраической сумме углов, образованных вышеупомянутыми двумя прямыми с какой-либо прямой, лежащей между ними.*

Позволим себе привести еще следующие определения.

Определение 1. Под *выполнением плоскости* подразумевается такое сочетание плоских фигур, при котором каждая сторона каждой фигуры принадлежит одновременно двум соседним фигурам.

Определение 2. Под *параллельным выполнением плоскости* подразумевается такое, при котором фигуры, целиком выполняющие плоскости, равны и параллельны.

Определение 3. Равные (и симметричные) фигуры, без остатка и правильно[1] выполняющие плоскость, называются *планигонами;* называются *параллелогонами* в том

---

[1] Т. е. так, что каждая фигура присоединяется к соседней всегда одним и тем же способом.

случае, если плоскость выполнена ими в параллельном положении.

Определение 4. *Четноугольником* называется такой многоугольник, стороны которого попарно параллельны.

Определение 5. *Парносторонником* называется такой четноугольник, у которого соответственные параллельные стороны равны между собой.

Определение 6. Параллелогон, обладающий центром инверсии, называется *первичным;* в противном случае он будет *вторичным*.

Определение 7. Первичный параллелогон, обладающий лишь двумя параллельными сторонами, называется *простым;* в противном случае он будет *сложным*.

Теорема 2. *В выпуклом многоугольнике не может быть больше двух параллельных сторон.*

Доказательство. Допустим, что в многоугольнике $abc \ldots def \ldots klm$ три стороны, a, d, k, параллельны. Если две из них, например a и k, обратно параллельны (т. е. образуют угол в 180°), то третья сторона d должна быть во всяком случае прямо-параллельной одной из этих сторон (т. е. должна образовать с одной из них угол в 0°). Так как нами взят выпуклый многоугольник, то углы между его смежными сторонами должны быть положительными и при этом возрастать, начиная с первой стороны a. Следовательно угол в 0° является невозможным, так как больше двух параллельных сторон не может быть.

Следствие. Каждый выпуклый четноугольник имеет лишь две параллельные стороны.

Теорема 3. *Выпуклый парносторонник обладает центром инверсии.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что выпуклый парносторонник обладает лишь двумя параллельными, вернее обратно-параллельными, сторонами. Пусть сторона a равна и обратно-параллельна стороне a' и

пусть за a следует сторона b. В то же время обратно-параллельная ей сторона b' не следует за a'. Непосредственно за a' следуют стороны c', d' ... и, наконец, b'. Согласно теореме 1 углы a' c', a' d'... $a'b'$ образуют ряд, члены которого постоянно возрастают. Следовательно какой-нибудь промежуточный угол $a'd'$ меньше, чем $a'b'$.

Так как величина этого угла положительна, то сторона d, равная и обратно-параллельная d', должна находиться в ряду $ab \ldots d$; при этом ad должен быть больше, чем ab.

С другой стороны мы должны иметь равенства углов $ad = a'd'$ и $ab = a'b'$. Но так как $ad > ab$ и $a'b' > a'd'$, то допущение, противоречащее условию теоремы, становится невозможным. Тем самым теорема доказана.

Теорема 4. *Параллелогон есть парносторонник.*

Доказательство. Если для стороны AB отсутствует равная и параллельная сторона, то AB была бы единственной смежной для двух соседних параллелогонов стороной, которая совмещалась бы с соответственной стороной смежного параллелогона, при их совмещении друг с другом в параллельном положении (последнее всегда возможно, согласно определению параллелогонов). Однако, в силу параллельности фигур при их совмещении в параллельном положении, точка A совпадает с соответственной точкой A' и точка B с соответственной точкой B' смежного параллелогона, точно также должны совпасть и следующие стороны BC и $B'C'$, и т. д.; словом, произойдет полное совмещение самих фигур, причем совмещаются соответственные точки смежных фигур. Тем самым положение о смежности соседней фигуры с первой по стороне AB является абсурдным. Следовательно, допущение, противоречащее теореме, невозможно.

Следствие. На основании теорем 3 и 4 заключаем, что каждый выпуклый параллелогон является простым.

Исходя из вышеизложенного, легко сделать полный вывод выпуклых параллелогонов. Пусть имеется параллелогон, число сторон которого равно m. Средняя величина одного угла такого параллелогона $\frac{2d(m-2)}{m}$ должна или равняться или быть меньшей, чем $\frac{4d}{3}$, так как в одной вершине встречаются, по меньшей мере, три угла, и средняя наибольшая величина их достигает значения $\frac{4d}{3}$. Тем самым мы приходим к условию, что $m \leqslant 6$. Следовательно число m (которое является обязательно положительным четным числом и никогда не может быть меньше 3) соответствует лишь двум величинам, 6 и 4. Иными словами, лишь два типа параллелогонов являются возможными: трипараллелогоны и дипараллелогоны (параллелограммы).

Если выбрать в одном из параллелогонов некоторую точку и взять аналогичные точки во всех других параллелогонах (такие точки будут совпадать друг с другом, если привести в совмещение сами фигуры в параллельном положении), то мы получим плоскую сетку.

Если параллелогон является симметричным, то его можно расчленить на равные (или симметричные) части, число которых соответствует величине его симметрии. Разделив одинаковым образом все параллелогоны выполняющей плоскость системы, получим правильную систему планигонов. Каждый из таких планигонов, взятый отдельно, вовсе не обладает симметрией. Выбрав в одном из них точку и найдя все аналогичные точки во всех остальных планигонах, получим плоскую правильную систему точек.[1]

Каждой системе планигонов отвечает правильная система точек. Следовательно, если мы найдем все деления пло-

---

[1] Полный вывод всех таких систем дан в моей работе „Симметрия на плоскости“ (1891).

скости, подчиняющиеся каждой системе точек, мы придем к полному их выводу.

Прежде чем перейти к исчерпывающему выводу всех видов параллелоэдров, необходимо привести некоторые определения и теоремы, относящиеся к поясам (зонам) и зоноэдрам.

Определение 8. Под *первичным* поясом подразумевается ряд граней, пересекающихся по параллельным ребрам фигуры. Пояса, не удовлетворяющие этому условию, являются *вторичными*.

Определение 9. Под *основным* поясом подразумевается любой пояс, принятый за исходный пункт при изучении зональных отношений.

Определение 10. Под *главным* поясом подразумевается всякий пояс, имеющий с основным общую пару граней, называемых основаниями. Все другие пояса будут называться *побочными*. Между побочными поясами будем различать *поперечные*, число граней которых равно числу главных поясов; другие побочные пояса называются *перекрестными*.

Определение 11. *Зоноэдром* называется такой многогранник, все грани которого слагаются в первичные пояса.

Теорема 5. *Грани зоноэдра являются четноугольниками. Согласно определению зоноэдра, каждая грань его должна со смежными, взятыми попарно гранями образовать пояс, а, следовательно, ее стороны будут попарно параллельны друг другу.*

Теорема 6. *Все пояса зоноэдра пересекаются в его гранях. Полюсы граней одного и того же пояса находятся на одном большом круге сферы. Два больших круга всегда пересекаются; при этом точки пересечения должны быть полюсами граней зоноэдра, так как в противном случае смежные с этим полюсом полюса граней не находились бы в зональной связи.*

Следствие. Отсюда следует, что грани зоноэдра попарно параллельны друг другу, так как два пояса всегда пересекаются по двум параллельным граням. Следовательно зоноэдры являются *четногранниками*, а плоские сечения их поясов будут четноугольники.

В дальнейшем, для краткости, будем называть произведение $a\,(a-1)$, где a — любое число, функцией числа a. В частности, произведение $p\,(p-1)$, где p — число поясов зоноэдра, назовем функцией зоноэдра.

Теорема 7. *Функция зоноэдра равна сумме функций его граней.*

Примем какой-нибудь пояс за основной. Число всех остальных поясов равно половине числа сторон боковых граней основного пояса, не считая сторон, входящих в состав самого пояса. Поэтому, если число четырех-, шести-, восьми-... угольников, входящих в состав боковых граней основного пояса обозначить через f_2, f_3, $f_4 \ldots$, то получим

$$p-1 = 1\cdot f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \ldots + (n-1)\,f_n + \ldots$$

так как, согласно вышесказанному, в счет входят из четырехугольника одна, из шестиугольника две стороны и т. д. Подобные же равенства можно получить и для всех других поясов. Суммирование этих равенств дает:

$$p\,(p-1) = \sum_{1}^{p} (1\cdot f_2 + 2f_3 + \ldots + (n-1)\,f_n + \ldots)$$

При таком суммировании происходит повторение величин, причем каждая грань повторяется столько раз, для скольких поясов она служит общей гранью. Например, $2n$-угольник повторяется в этой сумме n раз.

Приняв это во внимание, мы получим окончательно

$$p\,(p-1) = 1\cdot 2\cdot f_2 + 2\cdot 3\cdot f_3 + \ldots + (n-1)\,nf_n + \ldots$$

что и требовалось вывести.

Теперь перейдем к другим определениям и теоремам.

Определение 12. *Парногранником* называется многогранник, грани которого попарно равны и параллельны.

Определение 13. *Равнореберным* зоноэдром называется зоноэдр, пояса которого имеют равные ребра.

Определение 14. *Выполнением пространства* называется такое сочетание телесных фигур в пространстве, при котором каждая грань каждой фигуры есть общая двум.

Определение 15. Выполнением пространства в параллельном положении называется такое, при котором выполняющие пространство равные фигуры находятся в параллельном положении.

Определение 16. Равные (или симметричные) многогранники, без остатка и правильно [1] выполняющие пространство, называются *стереоэдрами;* если же они выполняют пространство в параллельном положении, то называются *параллелоэдрами.*

Определение 17. Параллелоэдр, имеющий центр инверсии, называется первичным; в противном случае он вторичный.

Определение 18. Первичный параллелоэдр называется *простым,* если он имеет лишь по одной паре равных и параллельных сторон; в противном случае он *сложный.*

Теорема 8. *Выпуклый парногранник обладает центром инверсии.*

Если грани a параллельна грань a', а смежной с a грани b параллельна грань b', смежная с a', и т. д., то все прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекутся в одном и том же центре инверсии. Если же такой точки не имеется, то последовательность соответственных граней не может быть одинаковой.

---

[1] Т. е. так, что каждая фигура присоединяется к соседней всегда одним и тем же способом.

Пусть грани a соответствует равная и параллельная ей грань a', а смежной с a грани b соответствует грань b', не смежная с a.

Как в a', так и в b должно заключаться по стороне, равной и параллельной общему ребру граней a и b. Если с гранью a' по этому ребру смежна грань c', а с гранью b' — d', то все грани a, b, c, d, a', b', c', d' неминуемо должны принадлежать одному и тому же (вторичному) поясу.

Пересечем этот пояс плоскостью и применим к фигуре сечения доказательство теоремы 3. На основании этого мы убедимся в невозможности допущения, противоречащего теореме.

Теорема 9. *Параллелоэдр является парногранником.*

Общая грань двух смежных фигур имеет обратное направление сторон, смотря по тому, будем ли мы ее рассматривать как грань одного или как грань другого многогранника.[1] Следовательно эти две грани не равны, а обратно равны. Потому, если выполняющие пространство фигуры равны между собой, то в каждой из них должна заключаться пара граней параллельных и обратно-равных, что и требовалось доказать.

Теорема 10. *Первичный параллелоэдр является равнореберным зоноэдром.*

Как параллелоэдр, фигура должна обладать попарно равными, совместимыми в параллельном положении гранями. Вместе с тем, вследствие наличия центра инверсии, грани могут совмещаться друг с другом после поворота одной из граней в ее плоскости на 180°. Тем самым обе параллельные стороны каждой грани равны, что и требовалось доказать.

---

[1] В „Началах учения о фигурах" автор предложил каждому периметру грани приписывать определенное направление. Это направление соответствует ходу часовой стрелки, если представить себя стоящим вертикально на внешней стороне грани.

Теорема 11. *Всякий выпуклый параллелоэдр является простым.*

На основании теорем 8 и 9 заключаем, что он имеет центр инверсии и, следовательно, является первичным, а также равнореберным зоноэдром. Если бы в нем было больше одной, например, две пары, параллельных граней, то рассекши соответственный пояс плоскостью, мы получили бы выпуклый многоугольник с более чем одной парой параллельных сторон. Согласно теореме 2, это невозможно.

Теорема 12. *Плоское сечение пояса простого параллелоэдра является простым параллелогоном.*

Каждая грань зоны является общей гранью для двух параллелоэдров системы — заданного и смежного с ним. То же самое относится и к граням всех других параллелоэдров, принадлежащих к зоне с параллельным положением ребер. Совокупность полученных таким образом параллелоэдров представляет слой. Продолжив все общие грани этого слоя до бесконечности, мы получим систему бесконечных призм бесконечной длины, выполняющих пространство в параллельном положении. Плоское сечение такой системы призм является системой параллелогонов. Ясно, что фигура сечения каждой отдельной призмы также является параллелогональной.

Теорема 13. *Грани простого параллелоэдра являются простыми параллелогонами.*

По теореме 10 грани эти являются парносторонниками, обладающими также центром инверсии. Число сторон этих граней не может превышать шести, так как в противном случае все побочные пояса имели бы больше шести граней, что по предыдущей теореме невозможно.

О наличии двух пар параллельных граней не может быть и речи.

Теперь легко приступить к полному выводу всех видов выпуклых параллелоэдров. Для этого следует только пере-

смотреть все случаи, в которых равнобедренный зоноэдр обладает какими-либо параллелогональными зонами и какими-либо параллелогональными гранями. Таких возможных случаев очень немного, так как существует лишь два рода параллелогонов. Ясно, что помимо нижеследующих случаев никаких других быть не может.

1) Основной пояс трипараллелогональный; боковые его грани — трипараллелогоны. За основную грань будем всегда брать дипаралеллогон (параллелограмм). Подобная грань должна обязательно существовать, так как согласно известной теореме из учения о фигурах невозможен такой многогранник, все грани которого имеют больше пяти сторон.[1] В этом случае параллелоэдр, помимо основного пояса и другого, главного пояса, имеет еще четыре побочных пояса. Таким образом

$$5 \times 6 = 30 = 1 \times 2 \cdot f_2 + 2 \cdot 3 f_3$$

Главная зона также должна быть трипараллелогональной. Иначе боковая грань была бы десятиугольником, что невозможно.[2] Обе боковые грани главной зоны являются снова шестиугольниками. Все это полностью определяет зональные отношения этого гептапараллелоэдра, для которого $f_2 = 3$ и $f_3 = 4$. Помимо граней двух главных зон, существует еще две пары граней, в которых пересекаются четыре перекрестных пояса.

2) Основной пояс трипараллелогональный; боковые его грани — три- и дипараллелогоны.

[1] Упомянутая теорема (18) дана в журнале „Zeitschrift für Kristallographie“ (Bd. XXI, S. 686) в несколько иной форме. В русском тексте доказательство дано в этой же форме. Помимо того, данную теорему мы встречаем у ряда авторов — Браве, Каталана и самого Лежандра.

[2] Так как каждый из четырех побочных поясов придаст ей по две стороны, к которым нужно прибавить еще две стороны, принадлежащие главной зоне.

В этом случае параллелоэдр, помимо основного и другого главного пояса, обладает еще тремя побочными поясами. Следовательно

$$4 \times 5 = 20 = 1 \times 2 = f_2 + 2 \times 3 = f_3$$

Главная зона также должна быть трипараллелогональной, так как в противном случае ее боковые грани были бы восьмиугольниками. Отсюда следует, что ее боковые грани являются четырехугольником и шестиугольником. Согласно только что приведенной главной зоноэдрической формуле, f_3 не может равняться 3 или быть меньше 3, так как тогда f_2 оказалось бы меньше 2, а мы только что видели, что f_2 соответствует по меньшей мере 3. Следовательно $f_3=2$ и $f_2=4$. Это определяет полностью и однозначно зональные отношения полученного вытянутого гексапараллелоэдра. Кроме граней обоих главных зон существует еще пара граней, в которых пересекаются два перекрестных пояса.

3) Основной пояс трипараллелогональный; обе боковые грани — дипараллелогоны.

В этом случае параллелоэдр, помимо основного пояса и другого главного пояса, имеет еще два других пояса. Таким образом

$$3 \times 4 = 1 \cdot 2 f_2 + 2 \cdot 3 f_3$$

Здесь можно допустить две возможности: a) главный пояс дипараллелогонален; боковая грань его шестиугольник и b) главный пояс трипараллелогонален, боковая грань его — дипараллелогон. Оба эти случая возможны, в результате чего получаем различные виды параллелоэдров.

$$f_3 = 1 \text{ и } f_2 = 3 \qquad (3a)$$

Здесь нет перекрестных поясов. Получаем *тетрапараллелоэдр*, который может быть представлен как шестиуголь-

ная призма, противоположные грани которой параллельны и равны.

$$f_3=0 \text{ и } f_2=6 \qquad (3\,b)$$

В этом случае помимо граней обоих главных поясов имеется еще пара четырехугольных граней, в которых пересекаются два перекрестных пояса. Наиболее симметричная форма этого *гексапараллелоэдра* называется ромбододекаэдром.

4) Основной пояс дипараллелогональный; боковые грани должны быть тоже дипараллелогонами, так как иначе мы придем к тому случаю, который был нами исследован под номером (3a). В этом случае имеем всего три пояса и, следовательно,

$$2 \times 3 = 1 \cdot 2 f_2$$

т. е. $f_2 = 3$. В результате получаем обычный параллелепипед, который назовем *трипараллелоэдром.* Этим заканчивается вывод.

Другие виды параллелоэдров, помимо только что выведенных, невозможны, как это было установлено выдающимися математиками через десять лет после появления моего первого, повторенного здесь, вывода.

Из общих свойств систем параллелоэдров, которые выявляются так просто, что не требуют особых доказательств, необходимо отметить следующие: a) совокупность аналогичных точек системы параллелоэдров (например их центральных точек) образует пространственную решетку; b) оси симметрии и плоскости симметрии проходят либо через центральные точки параллелоэдров, либо совпадают с их поверхностными гранями; ни одна часть их не находится внутри; c) центр симметрии (т. е. точка, в которой пересекаются элементы симметрии) лежит или в центральной точке параллелоэдра или находится на его поверхности.

Глава III

НОРМАЛЬНЫЕ ПАРАЛЛЕЛОЭДРЫ

Перейдем теперь к разбору вопроса о том, действительно ли все виды параллелоэдров возможны как виды структур. Ход мысли при этом исследовании приводит нас к понятию о нормальных параллелоэдрах. Это понятие связано с учением об однородных деформациях фигур, т. е. с учением об изменениях, вызываемых растяжениями и сдвигами. В связи с этим мы приступим к краткому очерку этого учения.

А. Однородные деформации в плоскости

Определение 19. *Растяжением* плоской фигуры называется такое ее изменение, при котором только одна прямая (так называемая ось растяжения) сохраняет свое первоначальное положение; все же другие точки удалятся или приблизятся к этой прямой по направлению растяжения на величину, прямо пропорциональную их расстояниям от оси. Если направление растяжения перпендикулярно к оси растяжения, то растяжение называется *прямым*; в противном случае оно является *косым*.

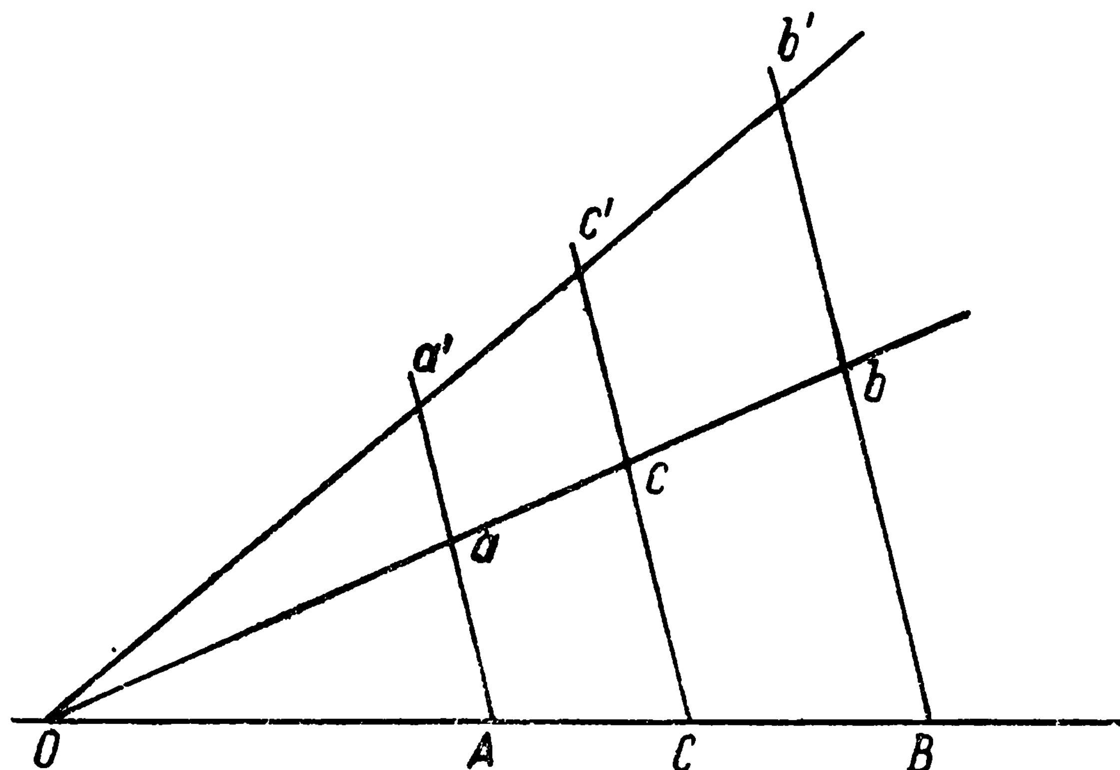
Отношение расстояний точек до и после растяжения называется *коэффициентом растяжения*.

Определение 20. *Сдвигом* плоской фигуры называется такое ее изменение, при котором только одна прямая, называемая осью сдвига, сохраняет свое первоначальное положение, а все другие прямые, ей параллельные, передвигаются по своему направлению в ту или иную сторону на величины, прямо пропорциональные их расстояниям от оси.

Отношение величины этого передвижения к расстоянию от оси сдвига называется *коэффициентом сдвига*. Эта величина равна тангенсу угла, образованного нормалью к оси сдвига с прямой, положение которой упомянутая нормаль займет после сдвига.

Теорема 14. *Прямые до растяжения остаются прямыми и после растяжения. Параллельные до растяжения остаются параллельными и после растяжения.*

Пусть AB (фиг. 1) является осью растяжения, Aa — направлением растяжения.



Фиг. 1.

Точки a, b, c, лежащие на одной прямой, после растяжения приходят в положения a', b', c'. При этом растяжение определяется следующими отношениями:

$$\frac{Aa'}{Aa} = \frac{Bb'}{Bb} = \frac{Cc'}{Cc}.$$

Этого достаточно, чтобы убедиться в том, что новое положение Oa' прямой Oa также суть прямая.

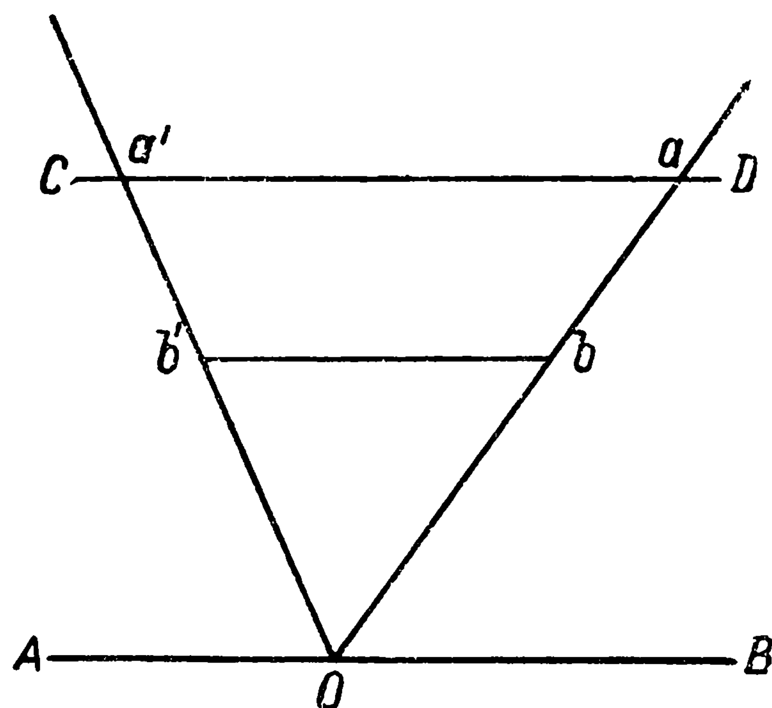
Теперь нам легко определить угол, на который заданная прямая Oa повернулась после растяжения. Это, разумеется, тот угол, на который повернется любая прямая, параллельная заданной, так как нужное для этого построение остается одним и тем же. Отсюда следует, что параллельность прямых сохраняется после растяжения.

Из этой теоремы вытекает ряд важных следствий. Так, например, параллелограмм после растяжения остается

параллелограммом; два равных и параллельных отрезка после растяжения остаются равными и параллельными. Отсюда же следует, что параллелогоны после растяжения остаются таковыми же.

Теорема 15. *Прямые до сдвига остаются прямыми и после сдвига; параллельные прямые после сдвига остаются параллельными же.*

Пусть AB (фиг. 2) является осью сдвига, а Oa представляет заданную прямую. Точки a и b после сдвига приходят в положения a' и b'; при этом имеют место отношения: $\frac{aa'}{ba'} = \frac{aO}{bO}$.



Фиг. 2.

Теперь ясно, что точка b' находится на прямой Oa'; следовательно прямая Oa после сдвига приходит в положение Oa'. Легко определить угол, образованный прямой в ее первоначальном положении с прямой, соответствующей ее новому положению, т. е. угол aOa'. Так как построение остается одним и тем же для всех параллельных, то ясно, что после сдвига параллельные прямые остаются параллельными.

Из этой теоремы можно получить ряд аналогичных следствий о двух равных и параллельных отрезках, о параллелограммах, а также вообще о параллелогонах, которые в общем сохраняют свои основные свойства после сдвига. Данные следствия можно обобщить в том отношении, что рассматривать можно в определенном порядке не только одно растяжение или один сдвиг, а любое число определенных растяжений и сдвигов.

Такая любая совокупность растяжений и сдвигов приводит к тому, что мы подразумеваем под „однородными де-

формациями“; Мебиус называл это „аффинностью“, а в кристаллографии это соответствует „кристаллографической проективности“.

Приведенные различные названия, а также исследования указанного понятия с точки зрения различных научных отраслей достаточно говорят о важности самого понятия.

Вышеупомянутое обобщение можно сформулировать следующим образом; все кристаллографически проективные (аффинные, полученные путем однородных деформаций, т. е. с помощью любого числа растяжений и сдвигов) фигуры для параллелограмма являются также параллелограммами. Параллелогону соответствует также параллелогон.

Теорема 16. *Всякий параллелограмм можно растяжениями и сдвигами превратить во всякий другой.*

Пусть даны параллелограммы *A* и *B*. Требуется так изменить *A*, чтобы из него получился *B*. Этого можно, например, достигнуть с помощью сдвига параллельно одной из сторон *A*, который производится до тех пор, пока один из углов (а следовательно, и все другие углы) не станет равным соответственному углу в *B*. Далее нужно провести еще два растяжения, причем для обоих нужно принять одну из сторон параллелограмма за ось растяжения и другую сторону за направление растяжения. При этом в обоих случаях роль указанных сторон должна меняться, т. е. та сторона, которая в первом случае служила осью растяжения, во втором случае должна стать направлением растяжения и наоборот.

Сдвиг, параллельный одной из сторон, принимается за одну из констант; два последующих растяжения дают еще три константы (величины обоих растяжений и угол между осью растяжения и направлением растяжения). Следовательно в общем кристаллографическая проективность определяется четырьмя константами, что может быть легко выражено аналитически. Оба растяжения, связанные друг с

другом так, что для них роли оси растяжения и направления растяжения меняются, называются *сопряженными.*

Следовательно кристаллографическая проективность в общем однозначно и полностью определяется с помощью одного сдвига и двух сопряженных растяжений.

В. Однородные деформации в пространстве

Определение 21. *Растяжением* телесной фигуры называется такое ее изменение, при котором только одна плоскость сохраняет свое первоначальное положение, а все другие параллельные ей плоскости переместятся в некотором направлении на величины, пропорциональные их расстояниям от нее. Растяжение называется *прямым* в том случае, когда направление растяжения перпендикулярно плоскости растяжения. В противном случае оно является *косым.*

Определение 22. *Сдвигом* телесной фигуры называется такое ее изменение, когда неподвижной остается лишь одна ее плоскость, а все другие параллельные ей плоскости перемещаются в самих себе по некоторому направлению на величины, прямо пропорциональные их расстояниям от неподвижной плоскости.

Теорема 17. *Прямые до растяжения остаются прямыми и после растяжения; равные и параллельные прямые остаются такими же и после растяжения.*

Доказательство. Это легко доказать, если принять во внимание, что проекция растяжения равна растяжению проекции. Если проектировать заданное растяжение на две плоскости (например, на плоскость, вертикальную и параллельную направлению растяжения, и на другую, тоже вертикальную, но перпендикулярную к первой, причем плоскость растяжения является горизонтальной), то мы получим на этих плоскостях, как проекции заданного растяжения, два растяжения. К ним применима теорема 14, согласно которой

прямая остается прямой и после растяжения, а две параллельные прямые сохраняют свою параллельность. То, что имеет место по отношению к двум проекциям, является, конечно, справедливым и для самих заданных прямых, что и требовалось доказать. Из этой теоремы вытекают различные следствия.

Следствие a. Плоскость до растяжения остается плоскостью и после растяжения. В самом деле, две параллельные прямые остаются параллельными и после растяжения. Всякая прямая, находящаяся в плоскости этих прямых, остается прямой и будет пересекаться с теми же прямыми в их новом положении. Следовательно она будет находиться в определяемой ими плоскости. Последняя, значит, и будет той плоскостью, которая произошла из данной от растяжения.

Следствие b. На основании той же теоремы и предыдущего следствия заключаем, что два равных и параллельных плоских многоугольника остаются равными и параллельными и после растяжения.

Следствие c. Отсюда непосредственно заключаем, что параллелепипед остается параллелепипедом и после растяжения.

Следствие d. Далее следует, что зоноэдр остается зоноэдром и после растяжения.

Следствие e. Всякий многогранник, имеющий центр инверсии, и после растяжения будет иметь центр, так как после растяжения каждый диаметр средней точкой многогранника делится пополам.

Следствие f. Всякий выпуклый многогранник остается выпуклым и после растяжения. В самом деле, все точки выпуклого многогранника будут находиться по одну сторону от плоскости, составляющей продолжение одной из его граней. Это свойство может даже служить для определения выпуклого многогранника. Исходя из определения растяжения, можно заключить, что то, что находилось по

одну сторону грани до растяжения, сохранит свои свойства и после растяжения.

Мы не выведем нового следствия, если скажем, что параллелоэдр останется параллелоэдром и после растяжения. Это справедливо и по отношению к важнейшей разновидности таких фигур — к простым параллелоэдрам. Данное заключение уже содержится в вышеприведенных следствиях.

Теорема 18. *Прямые до сдвига остаются прямыми и после сдвига; равные и параллельные прямые остаются равными и параллельными и после сдвига.*

Доказательство. Теорема эта доказывается аналогично предыдущей, так как проекции сдвигов на плоскости, перпендикулярные к плоскости сдвига, выглядят, как сдвиги проекций. Лучше всего при этом за одну из проекционных плоскостей взять плоскость, параллельную направлению сдвига, а вторую выбрать ей перпендикулярно.

На последней проекция сдвига остается без изменений, как будто бы заданная фигура не испытала никаких сдвигов. Согласно теореме 15, проекции двух параллельных прямых после сдвига остаются параллельными прямыми. Это справедливо также по отношению к прямым, заданным в пространстве.

Из предыдущей теоремы вытекают аналогичные следствия, относящиеся к последствиям сдвигов. Они касаются a) плоскостей, b) равных и параллельных многоугольников, c) параллелепипедов, d) зоноэдров, e) многогранников, обладающих центром инверсии, f) выпуклых многогранников.

Теперь мы можем обобщить эти следствия и говорить не об отдельных растяжениях и сдвигах, а о любых совокупностях растяжений и сдвигов. Мы можем сказать, что каждая кристаллографически-проективная фигура с параллелепипедом или зоноэдром или простым параллелоэдром также является параллелепипедом или зоноэдром или простым параллелоэдром и т. п.

В заключение приведем еще следующую теорему.

Теорема 19. Всякий параллелепипед сдвигами и растяжениями можно превратить во всякий другой. Пусть даны два параллелепипеда, *A* и *B*. Требуется превратить *A* в *B* с помощью растяжений и сдвигов. Для этого достаточно двух сдвигов, которые один из телесных углов (а вместе с тем и все другие углы) параллелепипеда *A* делают равным с соответственным углом в *B*, и трех сопряженных растяжений, которые оставляют этот угол неизменным, изменяя длины сторон в *A* до тех пор, пока они не уравняются со сторонами в *B*.

За плоскость первого сдвига можно взять плоскость, перпендикулярную одной из граней *A*, а в качестве направления сдвига — одно из ребер. Сдвиг производится до тех пор, пока плоский угол в *A* не станет равным соответственному углу в *B*. Это изменение определяется с помощью одной константы, а именно величины (коэффициента) сдвига.

За плоскость второго сдвига возьмем грань, образованную уже исправленным плоским углом. Направление сдвига и его величину выберем так, чтобы не лежащие в этой плоскости ребра телесного угла получили свое правильное положение, соответствующее положению ребер в *B*. Приведенное изменение определяется двумя константами: положением направления сдвига в грани и величиной сдвига. Что же касается трех сопряженных растяжений, то для их определения требуется шесть констант; три константы определяют телесные углы, грани которых служат плоскостями растяжений, отвечающих трем ребрам телесного угла.

Следовательно, в самом общем виде однородная деформация в пространстве определяется девятью константами. Тем самым результат ее очень легко представить аналитически. [1] Эти девять констант являются девятью коэффи-

[1] Это обстоятельство было подробно изложено в „Этюдах по аналитической кристаллографии“ автора. В 1-м этюде рассмотрены проективные связи вообще, 3-й этюд касается специально кристаллографической проективности.

циентами в трех уравнениях кристаллографической проективности.

Теперь перейдем к общему определению *нормальных* параллелогонов и параллелоэдров. Так называем мы такие параллелогоны и параллелоэдры, которые являются кристаллографически проективными с наиболее симметричными формами, или, иными словами, которые выводятся из наиболее симметричных форм с помощью растяжений и сдвигов.

Из этого ясно, что нормальными дипараллелогонами называются все те, которые являются кристаллографически проективными с наиболее симметричной их формой — квадратом. Соответственно нормальные трипараллелоэдры кристаллографически проективны с кубом (гексаэдром).

Однако в отношении трипараллелогонов дело обстоит иначе, в чем можно легко убедиться. Наиболее симметричной формой трипараллелогонов является правильный шестиугольник (гексагон); он будет нормальным параллелогоном.

Удлиним пару его сторон на равные величины, ничего больше не изменяя в нем. Тогда мы получим аномальный трипараллелогон с равными углами. Путем растяжения (или сжатия) из этого шестиугольника правильный шестиугольник получить нельзя, так как при этом частично или целиком изменятся углы. Тем самым все кристаллографически проективные с ним фигуры являются аномальными трипараллелогонами. Таким же образом выясняется, что между тетра-, гекса- и гептапараллелоэдрами существует лишь сравнительно немного нормальных параллелоэдров. К последним относятся только такие, которые кристаллографически проективны с правильной гексагональной призмой, с ромбододекаэдром и с особым кубооктаэдром.

Большинство остальных параллелоэдров, в частности и удлиненный гексапараллелоэдр, а также все кристаллографически-проективные относительно их фигуры являются аномальными.

Закончим эту главу постановкой вопроса, с которого мы и начали: все или не все параллелоэдры возможны как виды структур?

Примем во внимание следующее: 1) так как все кристаллические формы кристаллографически проективны с наиболее симметричными формами октаэдрического и дигексагонально-бипирамидального вида симметрии (на этом основывается предложенная мной система кристаллографических вычислений), то естественно предположить, что то же имеет место и по отношению к важнейшему структурному элементу—параллелоэдру кристаллического вещества. Отсюда следует, что такой параллелоэдр должен быть нормальным.

Далее учтем следующее: 2) если за определяющий структурный элемент взять аномальный параллелоэдр, то его элементы огранения теряют всякое структурное значение, так как кристаллографически выраженные значения таких элементов огранения в общем иррациональны.

Последнее еще более подтверждает наше заключение. На этом основании мы можем заключить данную главу теоремой, согласно которой в качестве определяющих структуру элементов могут служить отнюдь не все простые параллелоэдры, но исключительно лишь нормальные параллелоэдры.

Я упомянул лишь простые параллелоэдры, так как мне кажется совершенно невозможным, чтобы не выпуклые многогранники являлись определяющими структуру элементарными участками пространства. Вместе с тем, согласно теореме 11, все выпуклые параллелоэдры принадлежат к простым.

Глава IV

ВЫВОД ВСЕХ ПРОСТЫХ ВОЗМОЖНЫХ ВИДОВ СТРУКТУР

Для того, чтобы разрешить задачу этого труда, требуется вывести все возможные виды структур, т. е. отыскать все нормальные параллелоэдры, принадлежащие каждой

правильной системе точек. Для ясности представим себе, что задана некоторая правильная система точек и что упомянутая выше задача для нас разрешена, т. е. что все относящиеся к ней системы нормальных параллелоэдров найдены. Зададим себе вопрос о взаимоотношениях, существующих между системой точек и системами параллелоэдров. Параллелоэдр системы может содержать в себе несколько или только одну точку системы. [1]

Для всех параллелоэдров имеет место одно и то же требование: каждый из них должен, при операциях совмещения точечной системы самой с собой, совмещаться в разных положениях с другим параллелоэдром (совмещение может быть прямым или симметричным).

Таким образом во всех случаях центры параллелоэдров будут совмещаться. Следовательно, центры должны принадлежать к однородным точкам системы. Иными словами, найдя одну точку, мы получаем возможность найти все остальные, так как они выводятся операциями прямого совмещения с помощью элементов симметрии или с помощью трансляций, принадлежащих системе.

Полученный результат сводится к тому, что для решения поставленной нами задачи нужно найти все *главные точки* системы. При этом под главными точками правильной системы точек подразумеваются такие однородные точки, которые с помощью всех операций прямого совмещения (движений) образуют пространственную решетку.

Перейдем к нашему исследованию.

Величина симметрии параллелоэдра равна числу содержащихся в нем точек, так как это число равно числу операций совмещения, приводящих фигуру в совмещение саму с собой.

---

[1] Иногда внутри параллелоэдров точки могут даже вовсе отсутствовать. В этом случае точки системы лежат, разумеется, на поверхности параллелоэдра. Это, однако, особый случай, который следует иметь в виду.

Однако величина симметрии правильной системы может быть и больше. Эту величину мы получим, если определим число различных ориентировок параллелоэдров. Произведение обоих чисел и соответствует искомой величине симметрии системы. Если параллелоэдр содержит полное число точек, характеризующих систему, т. е. если число содержащихся в параллелоэдре точек системы равно величине симметрии системы, то достаточно одних трансляций для того, чтобы совместить параллелоэдр с любым другим параллелоэдром. Такие системы мы, как известно, называем *симморфными*. Центр параллелоэдра подобной системы будем называть *главным центром.*

Если параллелоэдры содержат половинное число точек, т. е. если число содержащихся в параллелоэдре точек равно половине величины симметрии системы, то должно существовать два рода параллелоэдров, причем параллелоэдры одного рода являются не совместимо-равными, а симметрично-равными по отношению к параллелоэдрам второго рода.

В этом случае мы получаем *гемисимморфную* систему параллелоэдров. Здесь также можно говорить о главных центрах, так как никакие центры высшего порядка здесь невозможны.

Для *асимморфных* систем параллелоэдров, т. е. таких, где параллелоэдры ориентированы различно, не может быть больше речи о главных центрах. Если, однако, центры таких параллелоэдров действительно представляют центры системы точек, то мы назовем их *побочными центрами*. Сами параллелоэдры в отличие от вышеописанных *обыкновенных* параллелоэдров мы назовем *необыкновенными*. Во всех, однако, случаях сами параллелоэдры (если отвлечься от их внутреннего содержания и принимать во внимание только их внешнее огранение) совмещаются в параллельном положении. Следовательно они совмещаются во всех ориентировках, тем самым их симметрия должна обладать полной

симметрией системы точек. Всегда возможно перейти от заданной системы к другой симморфной, которая выражается в точности теми же параллелоэдрами.

Полное решение проблем сводится, следовательно, к частичным решениям, опирающимся на симморфные системы.

Невозможны никакие другие системы параллелоэдров, помимо тех, которые легко можно полностью вывести как симморфные. При этом требуется только принять во внимание равнозначные главные центры *симморфных* точечных систем и принять за центры параллелоэдров системы.

Все те системы, для которых внешнее огранение параллелоэдров обладает одной и той же системой, относятся к одной и той же сингонии или являются сингоничными. Часто случается, что две различные системы выражаются в точности одинаковыми параллелоэдрами. Разница заключается исключительно в симметрии самих параллелоэдров, т. е. в числе находящихся в них точек системы.

Можно уменьшать число точек, причем система параллелоэдров останется одной и той же до тех пор, пока, наконец, оставшиеся элементы симметрии системы не будут вызывать необходимости заданной симметричной формы параллелоэдров.

В качестве примера возьмем систему октаэдрического вида симметрии.

Число точек системы, находящихся в параллелоэдре системы, равно 48. Мы можем уменьшить это число до 12, в случае тетартоэдрической симметрии, и все же параллелоэдры (их внешнее огранение) и сингония системы остаются теми же. Если продолжать уменьшать это число, взяв, например 6, что отвечает тригонально-трапецоэдрической симметрии, то сингония перестает быть кубической, а высокосимметричная форма параллелоэдров перестанет быть необходимой. Система останется правильной, если ее подвергнуть прямому растяжению вдоль тройной оси: точки

системы при таком изменении останутся равнозначными, тем самым истинная симметрия системы останется той же.

Из этого всего следует, что если существует система параллелоэдров, отдельные фигуры которой включают в себя больше точек системы, чем это требуется для данного сорта параллелоэдров, то существует также другая система иной сингонии, фигуры которой содержат только необходимое число точек системы. Прямая симметрия при этом не принимается во внимание, так как нормальные параллелоэдры системы, согласно их определению, всегда отличаются прямой симметрией (центр инверсии = двойная ось и плоскость сложной симметрии).

Если встретим систему, в которой параллелоэдры (нормальные) не обладают высшей им присущей внешней симметрией, то, согласно определению нормальных параллелоэдров, всегда возможно подвергнуть систему такой однородной деформации, при которой параллелоэдры примут наиболее симметричную форму.

И обратно, если по отношению к какой-либо заданной системе точек соответствующие ей параллелоэдры не определены, то прежде всего следует найти деформации, которые придадут данной точечной системе наивысшую симметрию.

Найдя соответствующие системы параллелоэдров, мы тем самым найдем параллелоэдры для заданной системы точек. Нужно только найденную систему параллелоэдров подвергнуть противоположным (т. е. проведенным в обратном порядке) деформациям.

Теперь мы видим, что для полного нахождения всех систем параллелоэдров требуется сперва найти системы параллелоэдров, соответствующие симморфным системам точек. Начинать всегда следует с тех систем, которые обладают наивысшей сингонией и при этом принадлежат к наиболее низким видам симметрии.

Для систем с низкими сингониями необходимо использование однородных деформаций.

А. Симморфные системы параллелоэдров

Для отыскания систем следует брать непосредственно главные центры и рассматривать их как центры искомых параллелоэдров.

1. Кубическая сингония

Самый низкий из относящихся сюда видов симметрии — тетартоэдрический; к нему принадлежат системы точек (59 s), (60 s) и (61 s), для которых параллелоэдрами служат, очевидно, куб, особый кубооктаэдр и ромбододекаэдр соответственно.

Далее возможны также все более высокие виды симметрии. Если мы примем все их во внимание, то простым путем найдем следующую таблицу (ср. таблицу, вклейку в конце статьи после 554 стр.):

Симметрия	Куб	Особый кубооктаэдр	Ромбододекаэдр
Октаэдрическая ...	129) 68 χ III	130) 69 χ VII	131) 70 χ VI
Гироэдрическая ...	126) 68 III	127) 69 VII	128) 70 VI
Тетраэдрическая...	123) 59 δ III	124) 60 δ VII	125) 61 δ VI
Додекаэдрическая	120) 59 χ III	121) 60 χ VII	122) 61 χ VI
Тетартоэдрическая	117) 59 III	118) 60 VII	119) 69 VI

2. Гексагональная сингония

В этой сингонии возможны все четыре нормальных вида параллелоэдров, но не для всех видов симметрии. Очевидно, например, что в том случае, когда имеются шестерные оси симметрии, невозможны никакие другие параллелоэдры, кроме тетрапараллелоэдров.

В этой сингонии тетрапараллелоэдр имеет свою самую симметричную форму, которая является гексагональной призмой. Чтобы различить, какой системе точек соответствует система параллелоэдров, нужно дать себе отчет в том, каким способом расположены главные центры: распо-

ложены ли они в слоях, проектирующихся друг в друга или нет. В первом случае параллелоэдром будет гексагональная призма. Во втором случае главные центры имеют особое расположение, а именно они лежат в одном слое в вершинах правильных треугольников, выполняющих плоскость. При этом мы можем различать два рода треугольников, обратно-параллельных друг другу. Если главные центры ближайшего слоя проектируются в центры этих треугольников, и именно, если главные центры соседнего слоя проектируются в центры треугольников одного рода, то главные центры следующего слоя проектируются в центры треугольников второго рода. Такое расположение центров отвечает трем остальным видам параллелоэдров. Но так как они не соответствуют высшей симметрии данной сингонии и являются лишь просто три-, гекса- и гептапараллелоэдрами, то следует приступить к их однородной деформации, а именно произвести одно прямое растяжение вдоль главной оси, пока заданная система не перейдет в более высокую сингонию. Нетрудно найти, что в этом случае возможны три различных растяжения, приводящих к этому результату, и в этих трех случаях в качестве параллелоэдров получаются куб, ромбододекаэдр и особый кубооктаэдр.

Принимая все это во внимание, мы получим окончательно следующую таблицу (см. стр. 434).

3. Тетрагональная сингония

В этой сингонии тетрапараллелоэдр снова невозможен и, следовательно, остаются возможными только такие параллелоэдры, которые были возможными и для тессеральной сингонии, т. е. три-, гекса- и гептапараллелоэдр. Однако здесь не возникает ни одна из трех симметричнейших форм; каждый тетрагональный параллелоэдр может быть переведен в такую форму посредством (прямого) растяжения вдоль главной оси. Здесь опять различают два случая: в одном главные центры лежат в слоях, которые прямо проекти-

Симметрия	Гексагональная призма	Трипараллелоэдр	Гексапараллелоэдр	Гептапараллелоэдр
Дигексаг.-бипирамидальная. .	116) 54 ϰ IV			
Скаленоэдрическая	111) 44 δ IV 112) 45 δ IV	113) 46 δ III	114) 46 δ VI	115) 46 δ VII
Трапецоэдрическая	110) 54 IV	—	—	—
Бипирамидальная	109) 49 ϰ IV	—	—	—
Ромбоэдрическая	105) 38 π IV	106) 39 π III	107) 39 π IV	108) 39 π VII
Дигексаг.-пирамидальная . . .	104) 49 φ IV	—	—	—
Гекс.-пирамидальная	103) 49 IV	—	—	—
Дитриг.-бипирамидальная . .	101) 44 ϰ IV 102) 45 ϰ IV	—	—	—
Триг.-трапецоэдрическая . . .	96) 44 IV 97) 45 IV[1]	98) 46 III	99) 46 VI	100) 46 VII
Триг.-дипирамидальная	95) 38 ϰ IV	—	—	—
Дитриг.-пирамидальная	90) 38 φ IV 91) 38 φ[1] IV	92) 39 φ III	93) 39 φ VI	94) 39 φ VII
Триг. пирамидальная	86) 38 IV	87) 39 III	88) 39 VI	89) 39 VII

[1]) В табл. во введении по недосмотру пропущена результирующая (горизонтальная) двойная винтовая ось.

руются друг в друга: в другом этого нет, и центры ближайшего слоя проектируются в центры квадратов, вершинами которых являются главные центры. Но второй случай имеет место как в гекса-, так и в гептапараллелоэдре и поэтому отвечает одной и той же системе точек, принадлежащей второму случаю; однако здесь имеют место две различные системы параллелоэдров и к их наиболее симметричной форме мы приходим с помощью вышеупомянутого растяжения, которое имеет две различные величины.

Принимая все это во внимание, мы получили в результате следующую таблицу:

Симметрия	Трипараллелоэдр	Гексапараллелоэдр	Гептапараллелоэдр
Дитетраг.-бипирам. . .	83) 30 χ III	84) 31 χ VI	85) 31 χ VII
Скаленоэдрическая . .	77) 9 δ III	79) 11 δ VI	81) 11 δ VII
	78) 10 δ III	80) 12 δ VI	82) 12 δ VII
Трапецоэдрическая . .	74) 30 III	75) 31 VI	76) 31 VII
Бипирамидальная . . .	71) 22 χ III	72) 23 χ VI	73) 23 χ VII
Сфеноэдрическая . . .	68) 3 π III	69) 4 π VI	70) 4 π VII
Дитетраг.-пирамид. . . .	65) 22 φ III	66) 23 φ VI	67) 23 φ VII
Тетрагон.-пирамид. . . .	62) 22 III	63) 23 VI	64) 23 VII

4. Ромбическая сингония

В этой, как и в менее симметричных родах сингоний, опять возможны все четыре вида параллелоэдров. Но чтобы решить, какие из них отвечают данному случаю, нужно согласно вышесказанному подвергнуть данную систему всем возможным деформациям, которые производились с системами гексагональной и тессеральной сингонии.

В связи с тем, что ромбическая сингония является значительно более низкой, деформации могут быть выполнены различными способами. Поэтому получается, что к одной и той же системе принадлежат часто очень различные параллелоэдры, а иногда даже является один и тот же вид параллелоэдров в существенно различной ориентировке фигур.

Я нашел ненужным давать здесь во всей подробности для каждой системы возможные деформации и находить этим путем все системы параллелоэдров. Это исследование настолько просто, что я изложу результаты в следующей таблице:

Симметрия	Трипараллелоэдр	Трипараллелоэдр	Гексапараллелоэдр	Гептапараллелоэдр
Бипирамидальная . .	55) 9 χ III	57) 10 χ IV	58) 11 χ VI	60) 11 χ VII
	56) 10 χ III		59) 12 χ VI	61) 12 χ VII
Пирамидальная . . .	43) 3 φ III	46) 3 φ′IV	49) 4 φ VI	52) 4 φ VII
	44) 3 φ′III	47) 4 φ IV	50) 4 φ VI	53) 4 φ VII
	45) 4 φ III	48) 4 φ IV′	51) 4 φ VI	54) 4 φ″VII
Сфеноэдрическая . .	36) 9 III		39) 11 VI	41) 11 VII
	37) 10 III	38) 10 IV	40) 12 VI	42) 12 VII

5. Моноклинная сингония

Для этого и в еще большей степени для следующего рода сингоний — снова имеет место вышесказанное. Думаю, что здесь ничего не нужно больше добавлять, и ограничусь исключительно одними результатами, которые представлены в следующей таблице:

Симметрия	Трипараллелоэдр	Тетрапараллелоэдр	Гексапараллелоэдр	Гептапараллелоэдр
Призматическая . .	27) 3 χ III	29) 3 χ IV	32) 4 χ VI	34) 4 χ VII
	28) 4 χ III	30) 4 χ IV	33) 4 χ VI′	35) 4 χ VII′
		31) 4 χ IV′		
Гемипризматическая безосная	18) 1 χ III	20) 1 χ IV	23) 1 χ′ VI	25) 1 χ VII
	19) 1 χ′III	21) 1 χ′IV	24) 1 χ VI′	26) 1 χ VII′
		22) 1 χ′IV′		
Гемипризматическая осевая	9) 3 III	11) 3 IV	11) 4 VI	16) 4 VII
	10) 4 III	12) 4 IV	15) 4 VI′	17) 4 VII′
		13) 4 IV′		

6. Триклинная сингония

Здесь можно получить результаты самым простым образом, благодаря тому, что относящиеся сюда системы точек посредством бесконечного числа деформаций можно преобразовать в любую систему, принадлежащую высшим видам сингоний.

Симметрия	Трипараллелоэдр	Тетрапараллелоэдр	Гексапараллелоэдр	Гептапараллелоэдр
Пинакоидальная . .	5) 1 π III	6) 1 π IV	7) 1 π VI	8) 1 π VII
Гемипинакоидальн. .	1) 1 III	2) 1 IV	3) 1 VI	4) 1 VII

Этим путем мы получаем в совокупности 131 симморфную ординарную систему параллелоэдров, причем никакие другие невозможны.[1]

B. Гемисимморфные системы параллелоэдров

Под гемисимморфной системой параллелоэдров понимают такую, для которой отдельная фигура обладает симметрией совмещения соответствующей системы точек и, следовательно, не обладает прямой симметрией, потому что она иначе была бы симморфной. Центры этих параллелоэдров суть главные центры. Сами параллелоэдры здесь двоякого рода, причем одни из них в отношении других прямо симметричны.

Движение совмещения является симметрической операцией. В общем случае она отвечает движению найденной плоскости скольжения. В частности она превращается в пло-

[1] Этот результат вместе с графическими изображениями был впервые опубликован в „Симметрии правильных систем фигур“. Вместе с тем он был напечатан уже раньше (1883) в „Началах учения о фигурах“ (стр. 238).

скость симметрии (что возможно лишь исключительно для плоскости базиса прямых три- и тетрапараллелоэдров) или в центр инверсии (он совпадает по необходимости с центром грани или серединой ребра, или наконец с вершиной, но ни в коем случае не лежит внутри параллелоэдра), или, наконец, в сложную симметрию.

Если существует некоторая гемисимморфная система параллелоэдров, то достаточно добавить плоскость симметрии, проходящую через главные центры, чтобы система превратилась в симморфную. Следовательно справедливо и обратное: если дана гемисимморфная система точек, то легко найти соответствующую систему параллелоэдров, в которой к главным центрам прибавлена плоскость симметрии, и вследствие чего система превращается в симморфную. Тогда система параллелоэдров определена, и не остается ничего другого как устранить добавленную плоскость симметрии.

Основываясь на этом принципе, мною были составлены следующие далее таблицы. В них первая колонка относится к гемисимморфным системам точек, вторая дает параметры вставленной плоскости симметрии, в третьей находится символ возникающей из этого симморфной системы точек; параллелоэдр, а вместе с ним и система параллелоэдра поэтому точно и однозначно определены; четвертая колонка дает соответствующий им символ или символы.

Следует принять также во внимание, что простые параллелоэдры здесь не являются уже параллелоэдрами в полном смысле этого слова, так как они связаны вместе друг с другом не посредством трансляционных движений, а посредством элементов прямой симметрии. Тем самым собственный параллелоэдр этой системы является составным, а именно он составлен из двух связанных друг с другом прямой симметрией параллелоэдров, которые еще раньше автором были обозначены как составные стереоэдры. Подробней об этом будет сказано при выводе асимморфных систем.

Моноклинная сингония

1. Гемипризматический безосный (доматический) вид симметрии

В этом случае недостает главных центров, вследствие чего положение добавочной плоскости симметрии неопределенно. Здесь допустимы два и только два предположения: а) эта плоскость совпадает с плоскостью скольжения, и тогда в системе 1 χ 1 не остается никакой плоскости скольжения, а присутствуют только плоскости симметрии; компонента скольжения при этом превращается в компоненту совмещения; b) эта плоскость попадает в середину между ближайшими плоскостями скольжения; последнее допустимо только в системе 1 χ 1 (а не в 1 χ' 1).

Кроме того мы должны принять во внимание, что в случае а) система параллелоэдров различается, смотря по тому, сопряжены или нет обе компоненты скольжения, попадающие в плоскость скольжения.

В соответствии с этим, мы можем различать следующие системы:

а) Плоскость симметрии совпадает с плоскостью скольжения

α. *компонента совмещения и компонента скольжения сопряжены*

1) 1 χ 1 — 1 III 1 χ 1 III	Равные параллелоэдры образуют вертикальные слои.
2) - — 1 IV 1 χ 1 IV	То же.

β. *Компонента совмещения не сопряжена (компонента скольжения сопряжена)*

3) 1 χ 1 — 1 III 1 χ 1 III′	Равные параллелоэдры образуют вертикальные колонки.

Переходя к системе 1 χ' 1, мы получим после устранения вспомогательной плоскости симметрии тот результат, что обе ближайшие плоскости скольжения отнюдь не обладают параллельными компонентами скольжения. Если централь-

ные компоненты скольжения сопряжены, то нецентральные компоненты скольжения диагональны; кроме того нужно полагать компоненту скольжения сопряженной с другими.

4) 1 χ′ 1 — 1 III 1 χ′ 1 III	Каждый параллелоэдр по отношению к соседнему прямо симметричен (плоскость скольжения диаметральна).
5) - — 1 V 1 χ′ 1 IV	Плоскости скольжения диаметральны. Равные параллелоэдры образуют по боковым граням вертикальные колонки.
6) - — 1 VI 1 χ′ 1 IV′	Плоскости скольжения перпендикулярны к одной паре боковых граней. Равные параллелоэдры образуют по боковым граням горизонтальные колонки.
7) - — 1 VI 1 χ′ 1 VI	Центральные плоскости скольжения проходят через пары коротких диагоналей граней. Равные параллелоэдры образуют вертикальные слои по первичной зоне граней, которые параллельны (горизонтальны) плоскости скольжения.
8) 1 χ′ 1 — 1 VI 1 χ′ 1 VI′	Центральные плоскости скольжения проходят через длинные (горизонтальные) диагонали граней. Равные параллелоэдры образуют вертикальные слои по вторичной зоне.
9) 1 χ′ 1 — 1 VII 1 χ′ 1 VII	Центральные плоскости скольжения проходят через две пары диагоналей четырехугольной грани. Равные параллелоэдры образуют вертикальные слои по первичной зоне.
10) 1 χ′ 1 — 1 VII′ 1 χ′ 1 VII′	Центральные плоскости скольжения проходят через середины ребер первичной зоны. Равные параллелоэдры образуют горизонтальные колонки по одной паре четырехугольных граней.

b) Плоскости симметрии находятся посредине между двумя плоскостями скольжения

После устранения плоскостей симметрии остаются, следовательно, периферические плоскости скольжения.

11) 1 χ 1 — 1 III 1 χ 1 III″	Равные параллелоэдры образуют горизонтальные слои.
12) - — 1 IV 1 χ 1 IV′	То же.

5. Призматический вид симметрии

В относящейся сюда системе параллелоэдров элементарные участки пространства обладают вертикальной двойной осью симметрии. Ясно, что после устранения этой оси остается система, относящаяся к предыдущему виду симметрии Следовательно мы сможем сразу же перечислить сюда относящиеся системы:

13)	3 χ 1	3 3	III	3 χ 1	III
14)	-	3 3	IV	3 χ 1	IV
15)	-	3 3	III	3 χ 1	III′
16)	4 χ 1	3 4	III	4 χ 1	III
17)	-	3 4	IV	4 χ 1	IV
18)	-	3 4	IV′	4 χ 1	IV′
19)	-	3 4	VI′	4 χ 1	VI
20)	-	3 4	VI	4 χ 1	VI′
21)	-	3 4	VII	4 χ 1	VII
22)	-	3 4	VII′	4 χ 1	VII′
23)	3 χ 1	3 3	III	3 χ 1	III′′
24)	-	3 3	IV	3 χ 1	IV′

Ромбическая сингония

1. Ромбопирамидальный вид симметрии

3 φ 1 φ 3 φ	25) 3 φ 1 III		
3 φ 2 φ 3 φ	26) 3 φ 2 III		
3 φ 3 φ 4 φ[1]	27) 3 φ 3 III	28) 3 φ 3 IV	29) 2φ 3 IV
3 φ 4 φ 4 φ′	30) 3 φ 4 VI	31) 3 φ 4 VI′	32) φ 4 VII′
3 φ 5 φ 3 φ′	33) 3 φ 5 III	34) 3 φ 5 IV	

---

[1] Мы видим, что лежащая здесь в основании простая система точек уже другая. Это происходит потому, что совпадение плоскости симметрии и плоскости скольжения с косым относительно вертикальной оси симметрии движением совмещения эквивалентно движению совмещения, не совпадающему с осью; отсюда в результате получаются вертикальные винтовые оси. Аналогичное имеет место и в других случаях.

3 φ′ 1[1] φ 4 φ″	35) 3 φ′ 1 VI	36) 3 φ′ 1 VII	37) 3 φ′ VII′
– [2] φ 3 φ′	38) 3 φ′ 1 III	39) 3 φ′ 1 IV	
4 φ 1 φ 3 φ	40) 4 φ 1 III		
4 φ 2 φ 4 φ	41) 4 φ 2 III	42) 4 φ 2 IV	43) 4 φ 2 IV′
4 φ 3 φ 4 φ″	44) 4 φ 3 VI	45) 4 φ 3 VII	46) 4 φ 3 VII′
4 φ′ 1 φ 4 φ	47) 4 φ′ 1 III	48) 4 φ′ 1 IV	49) 4 φ′ 1 IV′
4 φ′ 2 φ 3 φ′	50) 4 φ′ 2 III	51) 4 φ′ 2 IV	

Относительно системы 4 φ″ 1 = 16 h) легко найти, что добавление плоскости симметрии не приведет ни к какой симморфной системе точек. Тем самым этот исключительный случай не соответствует никакой гемисимморфной системе параллелоэдров.

8. Ромбобипирамидальный вид симметрии

9 χ 1 χ 9 χ	52) 9 χ 1 III	
9 χ 2 χ 10 χ	53) 9 χ 2 III	54) 9 χ 2 IV
9 χ 3 χ 11 χ	55) 9 χ 3 VI	56) 9 χ 3 VII
10 χ 1 χ 10 χ	57) 10 χ 1 III	58) 10 χ 1 IV
10 χ 2 χ 9 χ	59) 10 χ 2 III	
10 χ 3 χ 12 χ	60) 10 χ 3 VI	61) 10 χ 3 VII
11 χ 1 χ 10 χ	62) 11 χ 1 III	63) 11 χ 1 IV

Относительно системы 12 χ 1 = 29 h) доказывается невозможность соответствующей системы параллелоэдров, аналогично системе 16 h).

Тетрагональная сингония

10. Дитригонально-пирамидальный вид симметрии

22 φ 1 φ 22 φ	64) 22 φ 1 III	
22 φ 2 φ 22 φ[3]	65) 22 φ 2 III	
22 φ 3 φ 23 φ	66) 22 φ 3 VI	67) 22 φ 3 VII
23 φ 1 φ 22 φ	68) 23 φ 1 III	

[1] Здесь дополнительная плоскость симметрии совпадает с плоскостью скольжения с косым скольжением.

[2] Здесь эта плоскость совпадает с плоскостью скольжения с вертикальной компонентой скольжения.

[3] См. сноску на стр. 443.

12. Тетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

22 χ 1 χ 22 χ[1] 69) 22 χ 1 III

14. Тетрагонально-скаленоэдрический вид симметрии

9 δ 1 δ 9 δ 70) 9 δ 1 III
10 δ 1 δ 10 δ 71) 10 δ 1 III
10 δ 2 δ 9 δ 72) 10 δ 2 III
10 δ 3 δ 12 δ 73) 10 δ 3 VI 74) 10 δ 3 VII
12 δ 1 δ 9 δ 75) 12 δ 1 III

15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

30 χ 1 χ 30 χ 76) 30 χ 1 III
30 χ 2 χ 30 χ 77) 30 χ 2 III
30 χ 3 χ 31 χ 78) 30 χ 3 VI 79) 30 χ VII
31 χ 1 χ 30 χ 80) 31 χ 1 III

Гексагональная сингония

17. Дитригонально-пирамидальный вид симметрии

38 φ 1 φ 38 φ 81) 38 φ 1 IV
38 φ′ 1 φ 38 φ′ 82) 38 φ′ 1 IV
39 φ 1 φ 39 φ 83) 39 φ 1 III 84) 39 φ 1 VI
85) 39 φ 1 VII

20. Дитригонально-бипирамидальный вид симметрии

44 χ 1 χ 44 χ 86) 44 χ 1 IV
45 χ 1 χ 45 χ 87) 45 χ 1 IV

22. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии

49 φ 1 φ 49 φ 88) 49 φ 1 IV

26. Гексагонально-скаленоэдрический вид симметрии

44 δ 1 δ 44 δ 89) 44 δ 1 IV
45 δ 1 δ 45 δ 90) 45 δ 1 IV
46 δ 1 δ 46 δ 91) 46 δ 1 III 92) 46 δ 1 VI 93) 46 δ 1 VII

---

[1] Как видно, одна и та же система точек имеет разную ориентировку. Это же самое относится конечно и к параллелоэдрам (плоскость симметрии и плоскость скольжения приводят к совмещению).

27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симметрии

54 χ 1[1] χ 54 χ 94) 54 χ 1 IV

Кубическая сингония

29. (Диакис-) Додекаэдрический вид симметрии

59 χ[2] 1 χ 60 χ 95) 59 χ 1 VII
61 χ 1 χ 59 χ 96) 61 χ 1 III

30. (Гексакис-) Тетраэдрический вид симметрии

59 δ 1 δ 60 δ 97) 59 δ 1 VII
61 δ 1 δ 59 δ 98) 61 δ 1 III

32. (Гексакис-) Октаэдрический вид симметрии

68 χ 1 χ 69 χ 99) 69 χ 1 VII
70 χ 1 χ 68 χ 100) 70 χ 1 III

Из вышеприведенной таблицы видно, что имеются две гемисимморфные системы точек (4 φ'' 1 и 12 χ 1), для которых по общему способу не выводится никаких возможных родов структур. Что это действительно так, легко доказывается непосредственно, если использовать данный в 6-й главе общий способ, по которому удвоенная система точек заменяется простой системой, обладающей той же системой элементарных участков пространства. При этом только элементы симметрии совмещения (двойные оси совмещения) должны быть заменены данными элементами простой симметрии. Такая простая система, как это следует из вышеупомянутого положения 6-й главы, необходимо должна

---

[1] В табл. II (см. вклейку после 396 стр.) по краям линии, которая соответствует плоскости симметрии, по недосмотру пропущена цифра 1 (в скобках), которая должна указывать отступление этой плоскости от плоскости проекции на $\lambda/4$.

[2] В табл. II (там же) по недосмотру вертикальная плоскость скольжения была дана с вертикальным направлением скольжения; правильней ей придать диагональное (косое) направление скольжения.

существовать в том случае, если данной системе точек действительно соответствует возможная система элементарных участков пространства. Применяя этот способ, мы приходим к заключению, что обе упомянутые системы не могут быть заменены какой-нибудь простой системой, т. е., что они действительно не отвечают никакой из возможных систем элементарных участков пространства.

Глава V

ВЫВОД ВСЕХ НЕОБЫЧНЫХ ВОЗМОЖНЫХ ВИДОВ СТРУКТУР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СИММОРФНЫМ СИСТЕМАМ ТОЧЕК

В предыдущей главе исчерпывающим образом выведены все обычные роды структур. Все эти роды структур не только возможны, но также наиболее вероятны, так как их элементарные параллелоэдры, соответствующие действительным элементарным участкам пространства, параллельно расположены и ориентированы. В симморфных системах все эти элементарные участки пространства однородны и обладают полной симметрией системы. В гемисимморфных системах они двоякого рода, причем участки первого прямо симметричны участкам второго рода; отдельно взятые, они энантиоморфны, т. е. не обладают прямой симметрией.

Однако мы нисколько не будем противоречить основному закону кристаллографии, если примем, что все элементарные участки пространства кристаллической структуры не параллельно ориентированы, а обладают различной ориентировкой. Такого рода структуры нами обозначены как обычные, так как совсем непонятно, почему элементарные участки пространства различно расположены друг относительно друга, в то время как известные кристаллы показывают ясно выраженную тенденцию принимать в мельчайших частицах всегда параллельную ориентировку.

Факт образования двойников кристаллов показывает только, что одинаковые кристаллические образования со взаимно параллельно расположенными частичками кристаллов могут срастаться также в непараллельном положении. Но такие образования, конечно, являются не простыми кристаллическими образованиями, а только закономерными срастаниями. Теория кристаллического строения уже a priori предвидит возможность таких срастаний и даже может развить некоторые ведущие идеи, предсказывающие их возможность. Однако для простых кристаллических образований различно ориентированные частички невероятны.

Но невероятность еще не есть невозможность. Невозможными мы должны называть такие образования, которые противоречат основным законам, т. е. не совместимы с понятием однородности в кристаллографии.

Как известно, некоторые авторы считают такие непараллельные положения частичек не только вероятными, но ищут в этом ключ к объяснению некоторых известных фактов, в первую очередь вращения плоскости поляризации.

Вследствие этого, мы никоим образом не можем сейчас считать категорически такого рода структуры невозможными и должны произвести полный вывод всех сюда относящихся видов структур. Тогда будет видно, являются ли эти виды структур действительно вероятными или невероятными.

Прежде всего нам нужно самым строгим образом отделить возможные виды структур от невозможных и дать точную характеристику первых.

В главе I было показано, что элементарный участок пространства, принадлежащий какому-либо виду структуры, может быть только простым параллелоэдром. Он совершенно однозначно определяет строение кристалла и соответствующую сингонию. Если бы определяющие структуру и различно ориентированные элементарные участки простран-

ства не были параллелоэдрами, то они должны были бы быть стереоэдрами, образующими только часть соответствующего параллелоэдра. Тем самым они уже не являются истинными элементарными участками пространства и больше не определяют сингонии.

Вместе с тем относящиеся сюда простые параллелоэдры уже не являются параллелоэдрами в строгом смысле этого слова, так как все они по определению должны быть одинаково ориентированы, а здесь имеют место такие частички кристаллов, которые не все одинаково ориентированы. Но как элементарные участки пространства, по форме, а не по содержанию, они все же действительно являются параллелоэдрами.[1]

В работе автора „Симметрия правильных систем" они были точнее определены как „сложные" стереоэдры. При этом нельзя упускать из виду, что они тоже не являются истинными стереоэдрами, а обладают формой действительного параллелоэдра. Истинные сюда относящиеся параллелоэдры (так же, как и в гемисимморфных системах), однако, являются (согласно определению) „сложными параллелоэдрами". Но они, как сказано, не являются элементарными

---

[1] Я думаю использовать этот случай, чтобы строго отделить друг от друга понятия „формы" и „фигуры", которые часто путаются. Под формой мы можем, конечно, подразумевать только саму форму. Так, мы можем, например, сказать, что форма куба и комбинация трех пинакоидов ромбической сингонии суть одно и то же. Но если принимать во внимание также и содержание, то никоим образом нельзя эти тела идентифицировать, так как содержание обоих предполагается различным. Как „фигуры" оба эти тела тоже очень различны. В кристаллографии (в противоположность чистой геометрии, поскольку она имеет своим предметом исключительно форму) к слову „форма" обычно добавляется также и содержание. Таким образом мы можем сказать, что как формы параллелоэдры симморфной, гемисимморфной и асимморфной систем будут одни и те же. Как таковые они не могут обладать различными ориентировками. Если же речь идет о последних, то при этом имеются в виду фигуры, как это обычно делается в кристаллографии.

участками пространства. Последними могут быть только простые параллелоэдры.

Согласно определению однородности кристаллического вещества, сложные стереоэдры правильно выполняют пространство.

Если взять внутри такого стереоэдра некоторую точку и найти все равнозначные точки, связанные с ней отношениями симметрии, затем эту совокупность точек подвергнуть всем операциям совмещения системы, то мы получим неизбежно правильную систему точек.

Из этого вытекает теорема 1. *Каждому возможному роду структуры принадлежит одна правильная система точек, но не обратно.*

Все операции совмещения этой системы точек, так же как и сложных стереоэдров, определяются элементами симметрии. Таким образом, для того чтобы судить о возможности какого-либо рода структуры, нужно определить возможные отношения элементов симметрии к сложным системам стереоэдров.

Полный вывод завершится тогда, когда мы, основываясь на точном знании этих соотношений, найдем для каждой системы точек принадлежащий ей элементарный участок пространства.

Мы начнем наше исследование с определения этого соотношения.

Известно, что все элементы симметрии конечной фигуры пересекаются в единственной точке — центре симметрии фигуры.[1]

---

[1] Я употребляю слово „центр симметрии" именно в этом, а не в общепринятом смысле. Потому что ошибка Браве и состояла в том, что старое понятие „центр инверсии" он выразил новым словом, без того, чтобы ввести какое-нибудь изменение в это понятие. Для конечных фигур мы имеем центры различных родов: центры вписанного и описанного шара, гравитационный центр или центр тяжести, центр инверсии и т. д. Но существует также и центр симметрии или симметричный центр; центр инверсии является только частным его случаем.

Ни ось симметрии, ни плоскости симметрии, ни также центр сложной симметрии (центр инверсии понимается здесь как частный случай) не могут находиться внутри фигуры без того, чтобы не проходить через центр симметрии или не совпадать бы с ним.

Из этого следует теорема 2. *Всякая ось симметрии, всякая плоскость симметрии или центр сложной симметрии правильной системы проходит через центр элементарного участка пространства либо совпадая с ним, либо находясь на его поверхности.*

Но центр элементарного участка пространства является главной точкой правильной системы точек; иными словами, совокупность точек, равных этой точке, образует пространственную решетку. Уже вышеприведенная теорема дает немало для представления о положении главной точки. Но мы приведем еще и другие теоремы, которые внесут еще бо́льшую определенность в решение этого вопроса.

Возьмем двойную ось симметрии и найдем относительно ее положение главной точки. Она либо находится на этой оси, либо лежит вне ее. Но в последнем случае она должна лежать точно на середине между двумя ближайшими (хотя бы и неравными) осями, потому что иначе мы не получили бы конгруэнтного рода точек, что согласно определению должно иметь место для главной точки.

Эту теорему 3 можно выразить следующим образом: *главная точка должна лежать на равнодействующей двойной оси симметрии, если взять две равнозначные оси, связанные перпендикулярной к ним трансляцией.*

Можно пойти еще дальше, обобщив это положение на все оси симметрии и выразить это в виде теоремы 4: *Если в правильной системе точек существует одна m-численная ось симметрии, и главная точка не лежит на ней, то она должна находиться на равнодействующей m-численной оси, если взять две ближайшие (параллель-*

ные, хотя бы и неравные) оси подобного рода, связанные посредством перпендикулярной к ним трансляции. [1]

Чтобы доказать это положение, мы должны сначала принять во внимание следующее.

Главная точка является центром элементарного участка пространства, а последняя имеет форму простого параллелоэдра. Если система асимморфна, и параллелоэдр совмещается не только посредством параллельного перемещения, но и посредством различных симметрических операций, то форма такого параллелоэдра должна обладать полной симметрией системы. Вследствие этого всегда можно к нему добавлять новые элементы симметрии, в результате чего он, а с ним также и сама система точек, превращаются в симморфные. Так как согласно заданию данная ось не проходит через центр, то, следовательно, она находится на поверхности параллелоэдра; равным образом другая ось, как ближайшая, должна также находиться на той же поверхности. Если мы превращаем параллелоэдр в симморфный (полносимметричный), то по необходимости должна возникнуть третья, такая же равнозначная ось, параллельная центральной оси симметрии. Примем теперь во внимание, что с добавлением этой оси неизбежно добавляется другая, ей параллельная равнодействующая ось, которая также находится на поверхности параллелоэдра и никоим образом не может быть равной с прежней осью; дальше отметим, что из двух ближайших параллельных осей, лежащих на поверхности, мы последовательно можем внести два и только два сорта этих осей; так как один сорт их по предыдущему как раз добавлен, то мы находим, что прежние оси обязательно равнозначны. Тем самым теорема доказана.

Кроме общего понятия о положении главной точки относительно элементов симметрии правильной системы точек,

---

[1] Положение этой оси определяется теоремой 9 из Введения.

требуется выяснить ближайшую связь возможных положений этих элементов симметрии с параллелоэдром.

Исследуем поочередно возможные положения центров симметрии, осей симметрии и плоскостей симметрии.

Нельзя оставить без внимания того, что для параллелоэдров асимморфных систем элементы симметрии каждого сорта никоим образом не проходят через центр элементарного участка пространства; следовательно эти дополнительные элементы симметрии лежат на поверхности параллелоэдра. Задача, следовательно, состоит в определении того, каким образом это возможно.

Это мы выразим в виде теоремы 5. 1) *Для двойных осей симметрии возможны весьма различные положения на поверхности параллелоэдра; но не во всех случаях оси лежат полностью на этой поверхности.*

Для кубооктаэдра мы легко находим, что ось, лежащая диагонально на поверхности фигуры, вообще находится на поверхности фигур системы; но те оси, которые идут параллельно стороне четырехугольной грани, проникают во внутрь (центр) близлежащей фигуры.

Для ромбododекаэдра и куба мы находим, что все оси, лежащие на поверхности, принадлежат лишь этой поверхности.

Для всех этих фигур возможные положения осей симметрии на гранях диагональны; для куба кроме того возможны прямые, параллельные ребрам, проходящие через среднюю точку граней и сами ребра. То же самое имеет, наконец, место и в случае гексагональной призмы для всех осей симметрии, лежащих на базисной грани. Что же касается осей, находящихся на вертикальных гранях, то сюда относятся лишь вертикальные (а не горизонтальные).

То, что было сказано относительно наиболее симметричных видов параллелоэдров, имеет значение, конечно, и для других параллелоэдров. Только для них возможны не

все положения осей на поверхности, которые были возможны для вышеназванных фигур.

2) *Для тройных осей мы вообще не находим никаких возможных положений на поверхности кубооктаэдра.*

В случае ромбододекаэдра эти оси могли бы совпадать с ребрами, но они лежат не вполне на поверхности. Следовательно, для этой фигуры также невозможны относящиеся сюда положения.

Для куба имеет значение то же, что и для кубооктаэдра; отнюсящиеся сюда случаи невозможны.

Остаются, следовательно, вертикальные ребра гексагональной призмы, как единственно возможные положения тройных осей, которые принадлежат поверхности параллелоэдра.

Из этого следует, что если тройные оси существуют в асимморфной системе и не проходят через центр параллелоэдра, то, следовательно, этот параллелоэдр является гексагональной призмой.

3) *В случае четверных осей симметрии мы находим также ребра куба, как единственно возможные положения для них на поверхности.*

Наконец, 4) *для шестерных осей симметрии положение на поверхности вообще невозможно.*

Из этого следует, что если асимморфная система обладает шестерной осью симметрии, то она должна проходить через центр параллелоэдра и именно гексагональной призмы.

Если мы рассмотрим положение осей симметрии на поверхности параллелоэдра, то легко найдем возможные положения центров симметрии на этой поверхности, а именно:

5) *Сфеноидальные центры симметрии*[1] *могут совпадать со всеми вершинами* (*p*) *и центрами четырехугольных граней кубооктаэдра* (*h*), *со всеми тетрагоноэдриче-*

[1] Т. е. центры симметрии сфеноидального вида симметрии, т. е. три друг с другом пересекающиеся под прямыми углами двойные оси симметрии.

скими (h) и тригоноэдрическими (p) вершинами ромбододекаэдра и всеми вершинами (h и p), центрами граней (h) и серединами ребер куба (h) со всеми центрами граней (h) и серединами горизонтальных ребер (h) гексагональной призмы.

6) *Тетрагонально-трапецоэдрические центры симметрии могут совпадать с центрами четырехугольных граней (h) кубооктаэдра, с тетрагоноэдрическими вершинами (h) ромбододекаэдра и с вершинами (h и p) и центрами граней (h) куба. При наличии таких центров возможность гексагональной призмы, как параллелоэдра, исключается.*

7) *Тригонально-трапецоэдрические центры симметрии могут совпадать с центрами шестиугольных граней (h) кубооктаэдра, с тригоноэдрическими вершинами (h) ромбододекаэдра, с вершинами (h) куба и вершинами (p) и центрами (h) базисной грани гексагональной призмы, а также с серединой ее вертикальных ребер (h).*

8) *Гексагонально-трапецоэдрические центры симметрии могут совпадать исключительно лишь с центрами базисной грани (h) гексагональной призмы.*

9) *Тетартоэдрические центры симметрии могут совпадать исключительно лишь с вершинами ромбододекаэдра (h) и куба (h).*

Наконец, 10) *гироэдрические центры симметрии могут совпадать с тетрагоноэдрическими вершинами ромбододекаэдра (h) и с вершинами куба (h).*

При этом мы различаем *чисто периферические центры симметрии*, оси симметрии которых не проходят через центры параллелоэдров, и *полупериферические центры симметрии*, оси симметрии которых не находятся полностью на поверхности параллелоэдра системы. Эти разновидности центров симметрии в вышеприведенном перечислении обозначены соответственно буквам *p* и *h* (в скобках). О значении такого подразделения для полного вывода видов структур будет сказано позже. Из этого видно, что некоторые

центры в зависимости от их положения могут быть периферическими или полупериферическими.

На возможное положение винтовых осей мы вначале можем не обращать внимания, так как они в симморфных и гемисимморфных системах имеют подчиненное значение и являются равнодействующими осей симметрии того же наименования и трансляций.

11) *Для плоскостей симметрии, которые находятся исключительно на поверхности параллелоэдра, легко констатировать как единственно возможные положения грани куба и базисные грани гексагональной призмы.*

Плоскости скольжения мы также пока можем не рассматривать по тем же соображениям, и тогда останутся для рассмотрения только возможные положения для центров сложной симметрии.

12) *Центры гексагональной сложной симметрии могут совпадать с шестиугольными гранями (h) кубооктаэдров, с тетрагоноэдрическими вершинами (h) ромбододекаэдра с центром базисной грани гексагональной призмы и с вершинами куба.*

13) *Центры тетрагональной сложной симметрии могут совпадать с центром четырехугольных граней кубооктаэдра (h), с вершинами этой фигуры (p), с тетрагоноэдрическими вершинами ромбододекаэдра (h), с тригоноэдрическими вершинами этой же фигуры (p), с вершинами куба (p), с центрами граней (h) и с серединами ребер (p) этой фигуры. Гексагональная призма при этом исключается.*

Наконец, 14) *центры двойной сложной симметрии (= центры инверсии) могут совпадать со всеми центрами граней всех фигур и, кроме того, с тетрагоноэдрическими вершинами ромбододекаэдра и с вершинами и с серединами ребер куба так же, как и с серединами горизонтальных ребер гексагональной призмы. Все эти центры периферические.*

Думается, что полезным будет развитие следующих понятий и следующих теорем.

Еще во Введении было указано на важность понятия полных комбинаций примитивных элементов симметрии. Мы знаем, что каждое совмещающее движение симметрической фигуры может быть заменено некоторым числом элементарных совмещающих движений, принадлежащих элементам симметрии, т. е. каждое движение принимается как равнодействующая этих элементарных совмещающих движений. Однако параллелоэдр асимморфной системы содержит в себе не все элементы симметрии, т. е. ему принадлежит только часть примитивных элементов полной комбинации; выпадающие дополнительные элементы симметрии этих комбинаций лежат также целиком на поверхности этих фигур и обусловливают их различную ориентировку. Упомянутое отношение фигур друг относительно друга мы можем обозначить как симметрию связи.

Из этого вытекает теорема 6. *Величина симметрии системы равна произведению величины симметрии элементарных фигур и симметрии связи.*

Теперь представим себе, что для некоторого вида симметрии определена система параллелоэдров, соответствующих некоторой системе точек. Пусть предстоит задача найти соответствующей системы параллелоэдр для других видов симметрии той же сингонии. При этом пусть новая система точек отличается от прежней только введением новых дополнительных элементов симметрии, причем вновь введенные элементы симметрии проходят через центры сложных стереоэдров ранее найденной системы.

Ясно, что *система при этом остается неизменной, а только повысится величина симметрии элементарных фигур.*

На основании этой теоремы 7 вывод новых высокосимметричных систем в высшей степени сокращается, потому что мы прямо можем принять за возможные все

системы, в которых введенные дополнительные элементы симметрии проходят через центры элементарных фигур.

Эта теорема приобретает совсем особое применение в тех случаях, в которых добавлены элементы прямой симметрии (плоскости симметрии и центры сложной симметрии).

Теперь скажем несколько слов о значении периферических и полупериферических центров симметрии.

Если мы ищем в системе точек все центры симметрии и принимаем сначала, что ни один из них не совпадает с центрами элементарных пространственных участков систем, то все они должны находиться на поверхности последних. Каждый полупериферический центр создает внутри элементарного участка пространства ось симметрии, проходящую через центр. Достаточно таким образом констатировать в системе существование двух таких неравных центров, чтобы можно было утверждать, что центры элементарных участков пространства являются также центром симметрии. Достаточно констатировать существование единственного такого центра, чтобы можно было утверждать, что главная точка должна находиться на оси симметрии, проходящей через этот центр.

Наконец, нужно принять во внимание еще следующее.

Для каждой асимморфной системы параллелоэдров главные центры никаким образом не совпадают с центрами элементарных участков пространства. Но так как параллелоэдр или сложный стереоэдр каждого вида сингонии наперед известен, а с ним идентичны симморфные параллелоэдры того же вида сингонии, то при систематических поисках всех сюда относящихся видов структур нужно испытать все возможные положения главных центров.

Посредством совмещающих движений, принадлежащих этим центрам, упомянутые сложные стереоэдры принимают различные положения. Когда они примут положение сложных параллелоэдров, то мы и получаем истинные параллелоэдры системы.

Для всех предполагаемых случаев надо сделать проверку, является ли возникающая таким образом совокупность фигур действительно параллелоэдром, т. е. способна ли она выполнить пространство в параллельном положении. Если это имеет место, то предполагаемый случай для положения главных центров должен быть исключен как невозможный.

Если проверить этим способом все найденные предполагаемые случаи, то мы увидим, что наш вывод действительно исчерпает все возможные случаи и что никакие другие виды структур невозможны.

Здесь нельзя также упускать из виду того, что настоящий элементарный участок пространства теперь является сложным стереоэдром, который обладает формой простого параллелоэдра. Следовательно, формой найденного сложного параллелоэдра трансляция совмещения определяется не однозначно: здесь могут быть сделаны различные предположения, и следует еще проверить, как трансляция и совмещения подходят к каждому виду сложных параллелоэдров.

Чтобы убедиться в возможности найденного вида сложного параллелоэдра нужно принять во внимание следующее. Пусть найденная система параллелоэдров превращена в симморфную (посредством добавления соответствующих элементов симметрии). Центры параллелоэдров теперь являются главными центрами и одновременно главными точками, т. е. они образуют пространственную решетку. Если мы теперь снова отнимем добавленные элементы симметрии, то простые параллелоэдры, которые образуются из всех сложных параллелоэдров, останутся только в одной единственной главной точке; во всех других они должны исчезнуть. Для этой точки мы можем взять, конечно, главные центры той же поверхности, которые представляют центры симметрии сложных параллелоэдров. Если параллелоэдр действительно возможен, то совокупность этих точек образует равнозначные точки пространственной решетки. Иначе параллелоэдр невозможен.

Справедливо и обратное: если совокупность этих точек образует пространственную решетку, то сложный параллелоэдр действительно возможен, потому что точки могут быть приняты за главные точки простых параллелоэдров симморфной системы, которые с соответственными сложными обладают одинаковым пространством и являются ничем иным как *первичными* параллелоэдрами. В противоположность им сложные параллелоэдры являются *вторичными.*

Обратимся теперь к упомянутым проверкам в отдельности.

Для трипараллелоэдра прежде всего допустимо предположение, что главный центр совпадает с центром грани. Сложный параллелоэдр тогда вдвое больше простого трипараллелоэдра (совокупность параллелоэдров, смежных по двум граням). Фигура очевидно возможна, и мы обозначим ее как IIIα.

Соответственно этой фигуре трансляции совмещения могут, однако, выбираться различно.

Если мы обозначим величины трансляций совмещения системы, равные ребрам простого параллелоэдра и действующие в том же направлении, через λ (соответствует двойной длине ребра), λ_0 и λ_1, то мы получим в качестве возможных следующие операции совмещения.

1) $(2\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda_0, 0)$ и $(0, 0, \lambda)$. Эту систему мы обозначим через IIIα_1.

2) $(\lambda, \lambda_0, 0)$, $(0, 0, \lambda)$, $(2\lambda, 0, 0)$. Эту систему мы могли бы обозначить через IIIα_2.

3) $(\lambda, \lambda_0, 0)$, $(\lambda, 0, \lambda_1)$, $(2\lambda, 0, 0)$. Пусть эта система будет IIIα_3.

Далее предположим, что главные центры совпадают с серединой ребер. Ребра могут быть приняты за двойные оси или в серединах ребер предполагается сфеноэдрический центр симметрии. В первом случае мы получим сложный параллелоэдр, состоящий из двух простых параллелоэдров,

которые имеют общие ребра. Это действительно возможный параллелоэдр. Непременное наличие трансляции совмещения, произведенной в направлении, перпендикулярном оси симметрии, приводит к возникновению равнодействующей оси симметрии, которая проходит через середину грани. Таким образом мы придем к одной из систем IIIα.

Случай периферического сфеноэдрического центра симметрии приводит к сложному параллелоэдру, состоящему из четырех трипараллелоэдров. Возможность его совершенно очевидна. Обозначим его через IIIβ.

При этом возможны следующие трансляции совмещения, где λ должна соответствовать особому ребру.

1) $(\lambda, 0, 0)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$, $(0, 0, 2\lambda_1)$. Эту систему, соответствующую системе точек (9), можно обозначить как IIIβ_1.

2) $(\lambda, 0, 0)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$, $(0, \lambda_0, 2\lambda_1)$. Эту систему, соответствующую системе точек (10), обозначим через IIIβ_2.

3) $(\lambda, 0, \lambda_1)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$, $(0, 0, 2\lambda_1)$. Эту систему, тоже соответствующую системе (10), мы обозначим через IIIβ_3.

4) $(\lambda, \lambda_0, \lambda_1)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$, $(0, 0, 2\lambda_1)$. Эту систему, соответствующую системе точек (11), можно обозначить как IIIβ_4.

5) $(\lambda, \lambda_0, 0)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$ $(0, \lambda_0, 2\lambda_1)$. Эту систему, соответствующую системе точек (12), можно обозначить как IIIβ_5.

Мыслим еще один случай, когда из четырех элементарных участков пространства, образующих один сложный параллелоэдр, каждые два противолежащих участка обладают одинаковой ориентировкой. Это будет, например, в случае, когда кроме вертикальных осей симметрии, которые общи всем четырем элементарным участкам пространства, каждый из них в отдельности еще обладает такой же осью.

В этом случае для элементарных участков пространства различаются только две ориентировки, аналогично системе IIIα. Если величина совмещающего движения составляет $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda_0, 0)$, $(0, 0, \lambda_1)$, то получаем систему, аналогичную IIIα_2, которую мы обозначим как IIIβ_6.

Остается еще добавить операцию совмещения $(\lambda, 0, \lambda_1)$, $(0, \lambda_0, 0)$, $(0, 0_1, \lambda_1)$, и тогда получаем систему III β_7, аналогичную III α_3.

Все остальные мыслимые случаи приводят уже к симморфным системам параллелоэдров.

Рассмотрим теперь случай, когда главный центр совпадает с вершиной. Пусть это будет центр инверсии; тогда мы имеем один сложный параллелоэдр, состоящий из двух трипараллелоэдров, имеющих только одну общую вершину.

Если принять для нее сфеноэдрический центр симметрии, то при этом получаются два различных случая, смотря по тому, все ли оси совпадают с ребрами или же две из них имеют диагональное положение. Для первого случая мы получим параллелоэдр, составленный из четырех трипараллелоэдров, которые имеют только одну общую вершину. Каждый из них, кроме того, имеет с двумя ближайшими одно общее ребро. Во втором случае они попарно имеют два общих ребра. Наконец, главный центр может соответствовать ромбобипирамидальному центру симметрии. Тогда восемь трипараллелоэдров составят один большой.

Для первых трех случаев мы получаем, если примем во внимание также трансляцию совмещения, кроме уже найденных случаев, два параллелоэдра, имеющих одну общую грань, или четыре параллелоэдра, имеющих одно общее ребро.

Остается рассмотреть еще последнее предположение ромбобипирамидального центра симметрии. Мы получаем следующие случаи:

1) $(2\lambda, 0, 0)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$, $(0, 0, 2\lambda_1)$. Можно было бы эту систему точек, соответствующую системе 9χ, обозначить через III γ_1.

2) $(2\lambda, 0, 0)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$, $(0, \lambda_0, 2\lambda_1)$. Эта система точек, соответствующая системе 10χ, будет обозначаться, как III γ_2.

3) $(2\lambda, \lambda_0, \lambda_1)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$, $(0, 0, 2\lambda_1)$. Эта система точек, соответствующая системе 11χ, могла бы быть обозначенной через III γ_3.

4) $(2\lambda, 0, 0)$, $(\lambda, 2\lambda_0, 0)$, $(\lambda, 0, 2\lambda_1)$. Эта система, соответствующая системе точек 12χ, будет обозначаться через $\mathrm{III}\gamma_4$.

Здесь также допустимо предположение, что различные элементарные участки пространства, образующие сложный параллелоэдр, частично параллельно ориентированы. Если два из них одинаковы, то получаем систему $\mathrm{III}\gamma_5$, с трансляциями совмещения: $(2\lambda, 0, 0)$, $(0, 2\lambda_0, 0)$, $(0, 0, 2\lambda_1)$; при прочих трансляциях совмещения мы обозначаем результат как систему $\mathrm{III}\gamma_6$. Если оказывается, что четыре элементарных участка пространства одинаково ориентированы, то система будет обозначаться как $\mathrm{III}\gamma_7$. Обратимся теперь к системах тетрапараллелоэдров.

Если главный центр совпадает с центром грани, то должны быть приняты во внимание две возможности: a) главный центр совпадает с центром базисной грани, и b) главный центр совпадает с центром вертикальной грани. В обоих случаях сложные параллелоэдры очевидно возможны.

При втором предположении, для относящегося сюда параллелоэдра, который можно было бы обозначить через $\mathrm{IV}\alpha$, возможны следующие трансляции совмещения (при этом через λ обозначаются соответствующие элементарные совмещающие движения базисной грани, а через λ_1 — обеих вертикальных граней).

1) $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda_0, —)$, $(0, —, 2\lambda_1)$. Соответствующую систему можно обозначить через $\mathrm{IV}\alpha_1$[1].

2) $(\lambda, 0, \lambda_0)$, $(0, \lambda_0, —)$, $(0, —, 2\lambda_1)$. Соответствующая система будет обозначаться через $\mathrm{IV}\alpha_2$.

Никакие другие предположения невозможны.

При первом предположении, для относящихся сюда парал-

---

[1] Здесь, а также и для следующих сложных параллелоэдров, мы можем не принимать во внимание две горизонтальные координаты, так как для однозначного определения трансляции совмещения достаточно уже одной.

лелоэдров, которые можно было бы обозначить через IV β, принимаются во внимание еще следующие трансляции:

1) $(2\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda_0, -)$, $(0, -, \lambda_1)$. Соответствующая система будет обозначаться через IV β_1.

Если двойные оси симметрии, перпендикулярные к одной паре ребер, идут через главные центры, то мыслимы еще следующие трансляции совмещения; $(\lambda, \lambda_0, -)$, $(2\lambda, 0, 0)$, $(0, -, \lambda_1)$. Эта система будет обозначаться через IV β_2.

В случае, если одна двойная ось симметрии оказывается совпадающей с ребром, мы получаем два параллелоэдра, которые имеют только одно общее горизонтальное ребро. Приняв во внимание необходимые трансляции, мы найдем, что в этом случае две элементарные фигуры непременно связаны главным центром, находящимся в центре вертикальной грани (или базисной грани).

Таким образом остается принять во внимание только тот случай, при котором главный центр является призматическим центром симметрии.

Сложный параллелоэдр, состоящий из четырех имеющих общее горизонтальное ребро параллелоэдров, будет обозначаться как IV γ.

Здесь принимаются во внимание только три трансляции совмещения:

1) $(2\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda_0, -)$, $(0, -, 2\lambda_1)$.[1] Пусть это будет система IV γ_1.

2) $(2\lambda, 0, \lambda_1)$, $(0, \lambda_0, -)$, $(0, -, 2\lambda_1)$. Это будет система IV γ_2.

3) $(2\lambda, 0, 0)$, $(\lambda, \lambda_0, -)$, $(0, -, 2\lambda_1)$. Это будет система IV γ_3.[2]

Теперь мы исследуем такие случаи, при которых середина вертикального ребра является центром симметрии, с этим

---

[1] Направление оси λ является направлением оси симметрии (принятой за вертикальную).

[2] Кроме того, мыслим еще такой случай, при котором два из четырех элементарных участков пространства обладают одинаковой ориентировкой (например, если мыслится центр инверсии). Операции совмещения такие же, как у системы IV γ_1. Система могла бы быть обозначена как IV γ_4.

ребром должна совпадать лишь тройная ось симметрии. Сложный параллелоэдр, соответствующий гексагональной призме и имеющий из трех ребер лишь одно общее вертикальное ребро, оказывается единственно возможным и обозначается через IV δ. Ему принадлежат следующие трансляции совмещения:

1) $(\lambda, 0, 0)$, $(0, -, \lambda_1)$, $(0, 2\lambda_0, -)$. Эта система, соответствующая системе точек 38, может быть обозначена как IV δ_1.

2) $(\lambda, 0, \lambda_1)$, $(0, -, \lambda_1)$, $(0, 2\lambda, -)$. Эта система, соответствующая системе точек, обозначается как IV δ_2.

Наконец, не отрицается возможность установить такой сложный параллелоэдр, для которого одна вершина является общей точкой для шести соседних элементарных участков пространства. Это имеет место, например, для тригонально-трапецоэдрического центра симметрии. Здесь различаем еще следующие подчиненные случаи: 1) $(2\lambda, 0, 0)$, $(0, +3\lambda/2, 3\lambda_1/2)$, $(0, -3\lambda_0/2, 3\lambda_1/2)$; система могла бы быть обозначена через IV ε_1, 2) $(2\lambda, \lambda_0, \lambda_1/2)$, $(0, +\lambda_0/2, \lambda_1/2)$, $(0, \lambda_0, \lambda_1/2)$; система обозначается как IV ε_2, и 3) $(2\lambda, 0, 0)$, $(\lambda, +3\lambda_0/2, 3\lambda_1/2)$, $(-\lambda, -3\lambda_0/2, 3\lambda_1/2)$; система могла бы иметь обозначение IV ε_3.

Перейдем далее к исследованию системы гексапараллелоэдров.

a) Главный центр совпадает с центром грани; b) ребро является тройной осью симметрии; c) главный центр совпадает с тригоноэдрической вершиной, и d) главный центр совпадает с тетрагоноэдрической вершиной. Случай b) исключается, так как ось симметрии обязательно проникает внутрь соседней фигуры.

Случай a) относится к сложному параллелоэдру, состоящему из двух элементарных участков пространства, обладающих одной общей гранью.[1] Здесь мы получаем две возможные трансляции совмещения, которые при кубиче-

---

[1] Например грань (110).

ских осях 1) обладают компонентами ($\lambda/2$, $\lambda_0/2$, 0), (0, λ_0, 0), (0, 0, λ_1); эту систему можно было бы обозначить IV α_1, и 2) компонентами ($\lambda/2$, $\lambda_0/2$, 0), (0, λ_0, λ_1), (0, $\lambda_0/2-\lambda_1/2$); эта система будет обозначаться через VI α_2.

В случае c), для которого периферически-сфеноэдрический центр симметрии предполагался бы в тригоноэдрической вершине, мы получим возможный сложный параллелоэдр, состоящий из четырех элементарных участков пространства, обладающих одной общей вершиной.

Ему принадлежат две различные трансляции совмещения: 1) с компонентой (λ, 0, 0), (0, λ_0, 0), (0, 0, λ_1); эта система [1] могла бы быть обозначена через VI β_1, и 2) с компонентами (λ, $\lambda_0/2$, $\lambda_1/2$), (0, λ_0, 0), (0, 0, λ_1) система [2] будет обозначаться через VI β_2, наконец случай 2), соответствующий сложному параллелоэдру, состоящему из двух элементарных участков пространства, обладающих одной общей вершиной, исключается, так как необходимая трансляция совмещения приводит нас к уже найденной системе. Остается, следовательно, только один случай сложного параллелоэдра, состоящего из шести элементарных участков пространства, обладающих одной общей вершиной, который имеет место лишь для полупериферически-тетартоэдрического центра симметрии [3]. Мыслим еще случай, когда три единицы пространства обладают одинаковой ориентировкой.

В согласии с вышеприведенной теорией находим, что такая сложная фигура не может быть параллелоэдром.

Теперь остается нам еще отыскать системы *гептапараллелоэдров*. Здесь должны быть приняты во внимание следующие случаи: a) главный центр совпадает с центром четырехугольной грани, b) главный центр совпадает с центром

---

1) Соответствует системе точек (9).

2) Соответствует системе точек (11).

3) В действительности такой не существует, как в этом можно легко убедиться из расположения точек пространственной решетки.

шестиугольной грани и с) главный центр совпадает с вершиной.

Для первого случая мы получим возможный сложный параллелоэдр, состоящий из двух элементарных участков пространства, имеющих одну общую четырехугольную грань, которому соответствует одна единственная трансляция совмещения с компонентами $(0, \lambda_0, \lambda_1,)$, $(0, \lambda_0, -\lambda_1,)$, $(\lambda/2, \lambda_0/2, \lambda_1/2)$. Эта система будет обозначаться как VII α.

Для второго случая мы опять получаем возможный сложный параллелоэдр, состоящий из двух элементарных участков пространства, имеющих шестиугольную грань. Ему соответствует одна единственная общая трансляция совмещения с компонентами $(\lambda, 0, 0)$, $(0, \lambda_0, 0)$, $(0, 0, \lambda_1)$. Эта система будет обозначаться как VII β.

В последнем случае мы получаем, наконец, возможный сложный параллелоэдр, состоящий из четырех элементарных участков пространства, имеющих одну общую вершину: 1) при компонентах $(\lambda_1, 0, 0)$, $(0, \lambda_0, 0,)$, $(0, \lambda_0, -\lambda_1)$; эта система[1] могла бы быть обозначена как VII γ_1, и 2) при компонентах $(\lambda, \lambda_0, 0)$, $(0, \lambda_0, \lambda_1)$, $(0, \lambda_0, -\lambda_1)$; система[2] будет обозначаться через VII γ_2.

Этим исчерпывается вывод всех возможных сложных параллелоэдров, которые представляют возможные асимморфные виды структур. Остается лишь при систематическом отыскании всех видов структур отмечать возможные положения главных центров для каждого вида симметрии.

При настоящем выводе сюда относящихся систем, для каждого вида симметрии в качестве ведущего элемента принимается ряд сложных параллелоэдров (а не система точек; для последней неоднократно доказывается, что каждая из них обязательно соответствует одному или многим системам

---

1) Расположение точек пространственной решетки соответствует системе (9).

2) Соответствует системе (11).

параллелоэдров). Если мы затем примем во внимание положение элементов симметрии, то соответствующая система точек находится сама собой.

Мы хотим этот вывод дать снова в форме таблицы. В колонках этой таблицы приведены все данные, характеризующие системы и наглядно представляющие их. В первой колонке даны порядковые номера; во второй — символы сложных параллелоэдров (если для какого-либо вида симметрии он невозможен, то символ опущен); в третьей соответствующим числом выражена симметрия сложного параллелоэдра; в четвертой дана соответствующая система точек; в пятой находится символ соответствующей симморфной системы параллелоэдров, т. е. такой системы, при которой параллелоэдры принадлежат одному и тому же виду, относятся к тому же самому виду симметрии и все взаимно-параллельны; в шестой колонке стоит символ системы, который получается сам собой, если написать вместе один за другим символ системы точек и символ симморфной системы параллелоэдров; наконец, в седьмой колонке для облегчения представления дана симметрия связи, либо с помощью положения главного центра, либо посредством особого примечания, которое лучше всего служит для представления относительного положения ближайшего сложного стереоэдра. С целью достижения краткости введен значок ÷ для обозначения слов „положение соответственного образования следующее:“.

Таблица необычных (экстраординарных) возможных видов структур, принадлежащих симморфным системам точек

Триклинная сингония

1. Гемипинакоидальный (педиальный) вид симметрии

Так как симметрия в системах, принадлежащих этому виду симметрии, полностью отсутствует, то, конечно, нет

возможности говорить о главном центре. Следовательно, и принадлежащие сюда системы параллелоэдров полностью отсутствуют.

2. Пинакоидальный вид симметрии

1) $III\alpha_1$	—	1π	1 III	1π	(1 III);	2[1]	÷ Центр одной (базисной) грани, ее вершины и середины ребер.
2) $III\alpha_2$	—	-	-	1π	(1 III)′;	2	÷ Центр, пара середин ребер (базисных) граней и средние точки и вершины пары ребер центральной плоскости сечения.
3) $III\alpha_3$	—	-	-	1π	(1 III)″;	2	÷ Центры трех пар граней.
4) $IV\alpha_1$	—	-	1 IV	1π	(1 IV);	2	÷ Центры двух пар боковых граней и средние точки четырех пар горизонтальных ребер.
5) $IV\alpha_2$	—	-	-	1π	(1 IV)′;	2	÷ Центры базисных граней и двух пар боковых граней и средние точки двух пар горизонтальных ребер.
6) $IV\beta_1$	—	-	-	1π	(1 IV)″;	2	÷ Центры базисных граней и четырех пар горизонтальных ребер.
7) $VI\alpha_1$	—	-	1 VI	1π	(1 VI);	2	÷ Центры двух пар вертикальных и двух пар косых граней.
8) $VI\alpha_2$	—	-	-	1π	(1 VI)′;	2	÷ Центры одной пары вертикальных, двух пар косых граней и двух пар тетрагоноэдрических вершин.
9) $VII\alpha$	—	-	1 VII	1π	(1 VII),	2	÷ Центры двух пар четырехугольных и двух пар шестиугольных граней.
10) $VII\beta$	—	-	-	1π	(1 VII)′,	2	÷ Центры всех шестиугольных граней.

[1] Т. е. центр второго рода симметрии или инверсионный центр.

Моноклинная сингония

3. Гемипризматический аксиальный (сфеноидический) вид симметрии

11)	III α_1	—	3 1 III	3 (1 III);	3 [1]	÷	Средние прямые одной пары граней (‖ ребрам) и все параллельные им ребра.
12)	III α_1	—	4 1 III	4 (1 III);	3	÷	Диагонали граней для одной пары (базисных) граней. [2]
13)	III α_2	—	3 -	3 (1 III)′;	3	÷	Средние прямые двух пар граней.
14)	-	—	4 -	4 (1 III)′;	3	÷	Средние прямые одной пары граней и всех вертикальных ребер. [3]
15)	III α_3	—	4 1 III	4 (1 III)″,	3	÷	Средние прямые двух пар граней. [4]
16)	-	—	4 -	4 (1 III)′″;	3	÷	Диагонали граней для двух пар (базисных) граней. [5]
17)	IV α_1	—	3 1 IV	3 (1 IV);	3	÷	Средние прямые двух пар вертикальных граней.
18)	IV α_2	—	4 -	4 (1 IV);	3	÷	То же. [4]
19)	IV β_1	—	4 -	4 (1 IV)′;	3	÷	Нормали к ребрам, лежащие в базисных гранях. [6]
20)	-	—	4 -	4 (1 IV)″;	3	÷	Диагонали, лежащие в базисных гранях. [6]
21)	IV β_2	—	4 -	4 (1 IV)^{IV};	3	÷	Нормали к ребрам, лежащие в базисных гранях. [5]
22)	-	—	4 -	4 (1 IV)^{IV};	3	÷	Диагонали, лежащие в базисных гранях. [5]

[1] Т. е. одна двойная ось симметрии.

[2] Винтовые оси на гранях между двумя осями симметрии.

[3] Винтовые оси, проходящие через центры элементарных участков пространства.

[4] Винтовые оси, проходящие через центры элементарных участков пространства.

[5] Винтовые оси, проходящие через центры боковых граней.

[6] Винтовые оси на гранях между двумя осями симметрии.

23)	VI α_1	—	4	1 VI	4 (1 VI);	3	÷ Все (короткие) вертикальные диагонали. [1]
24)	VI α_2	—	4	-	4 (1 VI)';	3	÷ Одна пара длинных горизонтальных диагоналей. [2]
25)	VII α	—	4	1 VII	4 (1 VII);	3	÷ Все вертикальные диагонали. [1]
26)	VII β	—	4	-	4 (1 VII)';	3	÷ Две пары горизонтальных диагоналей шестиугольных граней. [3]

4. Гемипризматический безосный (доматический) вид симметрии

В этом виде симметрии исследование систем очень упрощается, так как плоскости симметрии могут быть только гранями одного трипараллелоэдра, а базисными гранями могут служить лишь грани одного тетрапараллелоэдра.

Поэтому мы получаем следующие системы:

27)	III σ_1	—	1 χ	1 III	1 χ (1 III);	4	÷ Одна пара граней.
28)	III α_2	—	1 χ'	1 III	1 χ' (1 III);	4	÷ То же. [4]
29)	III α_3	—	1 χ'	-	1 χ' (1 III)';	4	÷ То же. [5]
30)	IV β_1	—	1 χ	1 IV	1 χ (1 IV);	4	÷ Базисные грани.
31)	IV β_2	—	1 χ'	-	1 χ' (1 IV);	4	÷ То же. [5]

5. Призматический вид симметрии

Следуя теореме 7, очень легко точно установить все те системы, через центры элементарных участков пространства которых проходят оси симметрии или плоскости сим-

---

[1] Винтовые оси, проходящие через две пары центров косых граней.

[2] Винтовые оси, проходящие через центры двух косых граней.

[3] Винтовые оси, проходящие через средние точки других двух пар шестиугольных граней.

[4] Плоскости скольжения проходят через центры элементарных участков пространства. Направление скольжения || ребрам; все другие направления скольжения не сопряжены с первым.

[5] Оба направления скольжения сопряжены.

метрии. Далее остается найти те системы, элементарные участки пространств которых вовсе не имеют симметрии.

Добавляя к системам третьего вида симметрии одну плоскость симметрии, мы получаем сначала следующее:

32)	III α_1	4	3χ	1χ III	3χ	$(1\chi$ III)
33)	-	4	4χ	$1\chi'$ III	4χ	$(1\chi'$ III)
34)	III α_2	4	3χ	1χ III	3χ	$(1\chi$ III)′
35)	-	4	4χ	-	4χ	$(1\chi$ III)
36)	III α_3	4	-	$1\chi'$ III	4χ	$(1\chi'$ III)′
37)	-	4	-	-	4χ	$(1\chi'$ III)″
38)	IV α_1	4	3χ	1χ IV	3χ	$(1\chi$ IV)
39)	IV α_2	4	4χ	$1\chi'$ IV	4χ	$(1\chi'$ IV)
40)	IV β_1	4	4χ	$1\chi'$ IV	4χ	$(1\chi'$ IV)′
41)	-	4	-	$1\chi'$ IV′	4χ	$(1\chi'$ IV′)
42)	IV β_2	4	-	$1\chi'$ IV	4χ	$(1\chi'$ IV)″
43)	-	4	-	$1\chi'$ IV′	4χ	$(1\chi'$ IV′)′
44)	VI α_1	4	-	-	4χ	$(1\chi'$ VI′)
45)	VI α_2	4	-	$1\chi'$ VI	4χ	$(1\chi'$ VI)
46)	VII α	4	-	$1\chi'$ VII	4χ	$(1\chi'$ VII)
47)	VII β	4	-	$1\chi'$ VII′	4χ	$(1\chi'$ VII′)

Прибавляя к системам четвертого вида симметрии двойные оси симметрии, проходящие через центры элементарных участков пространства, получаем следующие новые системы:

48)	III α_1	3	3χ	3 III	3χ	(3 III)
49)	III α_2	3	4χ	-	4χ	(3 III)
50)	III α_3	3	-	-	4χ	(3 III)′
51)	IV α_1	3	3χ	3 IV	3χ	(3 IV)
52)	IV α_2	3	4χ	-	4χ	(3 IV)

Остается найти те системы, которым никакая симметрия не соответствует. Исследование может вестись по общему принципу. При этом за исходные точки следует выбирать положения сюда принадлежащих (призматических) центров симметрии, для которых в общем все четыре элементарных участка пространства вовсе не имеют параллельной ориентировки.

Следуя вышеуказанному, речь идет о средней точке ребра трипараллелоэдра и о средней точке горизонтального ребра тетрапараллелоэдра, т. е. о системах III β и IV γ. [1]

53)	III β_1	—	3χ	1 III	3χ	(1 III); 5 ÷	Центры и конечные точки всех вертикальных ребер.
54)	III β_2	—	4χ	-	4χ	(1 III); 5 ÷	То же [2] и 2 ÷ две точки в противоположных гранях, содержащих винтовые оси.
55)	-	—	-	-	4χ	(1 III)′, 5 ÷	То же [3] и 2 ÷ две точки в противоположных гранях по плоскостям симметрии.
56)	III β_3	—	3χ	-	3χ	(1 III)′; 5 ÷	Средние точки всех ребер, лежащих в плоскости симметрии.
57)	-	—	4χ	-	4χ	(1 III)″; 5 ÷	Средние точки всех вертикальных ребер. [4]
58)	III β_4	—	-	-	4χ	$(1\ \mathrm{III})^{\mathrm{III}}$; 5 ÷	То же. [5]
59)	III β_5	—	-	-	4χ	$(1\ \mathrm{III})^{\mathrm{IV}}$; 5 ÷	Конечные точки осей симметрии и обеих, им параллельных, лежащих в горизонтальных гранях, средних прямых.
60)	-	—	-	-	4χ	$(1\ \mathrm{III})^{\mathrm{V}}$; 5 ÷	Конечные точки средних прямых, лежащих в плоскости симметрии, и параллельных им прямых, лежащих в горизонтальных гранях.

---

[1] Имеются в виду горизонтальные оси симметрии и вертикальные плоскости симметрии.

[2] Но только одна пара вертикальных ребер (в плоскости оси симметрии).

[3] Но только одна пара вертикальных ребер (в плоскости симметрии).

[4] 2 ÷ средние точки всех горизонтальных ребер.

[5] 2 ÷ средние точки обеих горизонтальных плоскостей.

61) IV γ_1	—	3χ	1 IV	3χ	(1 IV);	5 ÷ Конечные точки двух пар вертикальных средних прямых (оси симметрии).
62) IV γ_2	—	4χ	-	4χ	(1 IV);	5 ÷ То же [1]) 2 ÷ средние точки базисных граней, которые совпадают с плоскостями скольжения.
63) IV γ_3	—	-	-	4χ	(1 IV)';	5 ÷ Конечные точки одной пары вертикальных средних прямых (осей симметрии) и 2 ÷ пара средних точек параллельных боковых граней.

Элементарный участок пространства, кроме простых элементов симметрии, может иметь сложную симметрию, т. е. инверсионный центр. Конечно, никакая комбинация его с осью симметрии или плоскостью симметрии недопустима. Следовательно, принадлежащие сюда системы находятся в связи с только-что найденными асимметрическими системами. Иными словами, мы можем их найти независимо, исходя из сложных параллелоэдров III β_6, III β_7 и IV γ_4. Таким образом мы получаем три новых системы и все три отвечают системе точек 4χ, где точки пересечения винтовых осей и плоскостей скольжения являются единственными точками, которые расположены особняком вне других элементов симметрии, и, следовательно, представляют главные точки новых искомых систем.

64) III β_6	2	4χ	1π	III	4χ	(1π III); 5 ÷ Средние и конечные точки всех вертикальных ребер. 2 ÷ средние точки горизонтальных граней.
65) III β_7	2	-	-		4χ	(1π III)': 5 ÷ Средние точки всех ребер, лежащих в пло-

[1]) Только те, которые лежат в плоскости симметрии.

							скости симметрии. 2 ÷ средние точки всех ребер, параллельных оси симметрии.
66)	-	2	-	-	4χ	$(1\,\pi\,\mathrm{III})''$; 5 ÷	Средние точки всех вертикальных ребер. 2 ÷ средние точки всех горизонтальных ребер.
67)	IV γ_4	2	-	1÷IV	4χ	$(1\,\pi\,\mathrm{IV})$; 5 ÷	Средние точки двух пар горизонтальных ребер. 2 ÷ средние точки одной пары боковых граней.

Ромбическая сингония

6. Сфеноэдрический (бисфеноидический) вид симметрии

Принадлежащие сюда сложные стереоэдры либо вовсе не обладают симметрией, и тогда применяется общий ход исследования, либо они обладают единственной двойной осью симметрии. К системам последнего типа мы можем применить теорему 7 и вывести их непосредственно из систем третьего вида симметрии. При этом, однако, нужно обратить внимание на то, чтобы каждая система соответствовала новой сингонии.

Таким путем мы получим сначала следующие системы:

68)	III α_1	3[1]	9	3 III	9	(3 III); 6 ÷	Средние точки горизонтальных плоскостей и конечные точки всех вертикальных средних прямых и всех вертикальных ребер.
69)	-	3	10	-	10	(3 III); 6 ÷	Средние точки базисных граней и конечные точки всех вертикальных ребер.

---

[1]) Ось симметрии элементарного участка пространства мыслится вертикальной.

70)	III α_2	3	10	-	10 (3 III)';	6	÷	Средние точки горизонтальных граней и конечные точки одной пары вертикальных средних прямых. [1]
71)	III α_3	3	12	-	12 (3 III);	6	÷	Средние точки горизонтальных граней [2] и вертикальных ребер.
72)	III α_3	3	11	3 III	11 (3 III);	6	÷	Средние точки базисных граней и всех вершин. [3]
73)	IV β_1	3	10	3 IV	10 (3 IV);	6	÷	Средние точки базисных граней и двух пар горизонтальных ребер. [4]
74)	IV β_2	3	11	-	11 (3 IV);	6	÷	То же. [5]

Переходя к системам, элементарные участки пространства которых не обладают симметрией, мы имеем сложные параллелоэдры III β, VI β и VII γ, тогда как IV γ с самого начала исключаются.

75)	III β_1	—	9	1 III	9 (1 III);	6	÷	Средние точки и конечные точки всех вертикальных ребер.
76)	III β_2	—	10	-	10 (1 III),	6	÷	Средние точки и угловые точки двух ближайших вертикальных ребер. [6]
77)	III β_3	—	10	-	10 (1 III)';	6	÷	Средние точки всех вертикальных ребер. [7]

[1] Все средние прямые, перпендикулярные плоскости винтовых осей, являются осями симметрии.

[2] Все горизонтальные средние прямые являются осями симметрии.

[3] Винтовые оси идут через средние точки боковых граней.

[4] Все вертикальные средние прямые являются осями симметрии.

[5] Две пары вертикальных средних прямых являются винтовыми осями.

[6] Средняя прямая, лежащая в грани, параллельной плоскости этих осей, является осью симметрии.

[7] Одна пара горизонтальных средних прямых (базисных граней) является осями симметрии (особыми).

78)	III β_4	—	11	-	11 (1 III);	6	∸	То же. [1]
79)	III β_5	—	12	-	12 (1 III);	6	∸	Средние точки двух ближайших вертикальных ребер и двух горизонтальных ребер противоположных граней.
80)	III β_6	3	10	3 III	10 (3 III)″,	6	∸	Средние точки и конечные точки всех вертикальных ребер.
81)	VI β_1	—	9	1 VI	9 (1 VI);	6	∸	Все тригоноэдрические вершины.
82)	VI β_2	—	11	-	11 (1 VI);	6	∸	Четыре тригоноэдрические вершины одной половины. [2]
83)	VII γ_1	—	9	1 VII	9 (1 VII);	6	∸	Все угловые точки, не принадлежащие базисным граням и горизонтальной центральной плоскости.
84)	VII γ_2	—	11	-	11 (1 VII);	6	∸	Такие же угловые точки одной половины. [2]

Этим вывод заканчивается.

7. Пирамидальный вид симметрии

Для этого вида симметрии проще следовать общему ходу исследования, чем специальному, основанному на теореме 7, так как в последнем случае, вследствие другой сингонии, приходится принимать во внимание многие подчиненные случаи. Вследствие того, что теперь с осью симметрии непосредственно связаны две идущие через нее плоскости, то исследованию подлежат системы параллелоэдров III α, III β и IV β, причем, вследствие наличия плоскостей симметрии, все другие предположения исключаются.

---

[1] Эти же прямые являются винтовыми осями.

[2] Через средние точки граней другой половины проходят винтовые оси.

85)	III α_1	4	3φ	1χ	III 3φ	(1χ III);	7[1]	÷	Одна пара вертикальных средних прямых и все вертикальные ребра.
86)	-	4	4φ	$1\chi'$	III 4φ	($1\chi'$ III);	7	÷	Одна пара диагоналей базисных граней.
87)	III α_2	4	$3\varphi'$	1χ	III $3\varphi'$	(1χ III);	7	÷	Одна пара вертикальных средних прямых.[2]
88)	-	4	4φ	-	4φ	(1χ III);	7	÷	Одна пара вертикальных средних прямых и все вертикальные ребра.[3]
89)	III α_3	4	$4\varphi''$	-	$4\varphi''$	(1χ III);	7	÷	Две пары вертикальных средних прямых.[4]
90)	-	4	$4\varphi'$	$1\varkappa'$	III $4\varphi'$	($1\varkappa'$ III);	7	÷	Одна пара вертикальных диагоналей.[5]
91)	III β_1	—	3φ	1	III 3φ	(1 III);	7	÷	Все вертикальные ребра.
92)	III β_2	—	$3\varphi'$	-	$3\varphi'$	(1 III);	7	÷	Два ближайших вертикальных ребра.[6]
93)	III β_3	—	4φ	-	4φ	(1 III);	7	÷	Все вертикальные ребра.[7]
94)	III β_4	—	$4\varphi'$	-	$4\varphi'$	(1 III);	7	÷	То же (винтовые оси проходят через центр элементарного участка пространства).

---

[1] Центр симметрии является здесь любой точкой на вертикальной оси симметрии.

[2] Другая пара вертикальных средних прямых соответствует осям симметрии.

[3] Пара других вертикальных средних прямых соответствует винтовым осям (также идущим через центр элементарного участка пространства).

[4] Пара других средних прямых соответствует осям симметрии. Винтовые оси проходят через центр.

[5] Через средние точки граней проходят вертикальные винтовые оси.

[6] Вертикальные средние прямые, лежащие в гранях, параллельных плоскостям этих осей, являются осями симметрии.

[7] Пара вертикальных средних прямых является винтовыми осями.

95)	III β_5	—	4φ''	-		4φ'' (1	III);	7 ÷	Два ближайших вертикальных ребра.[1]
96)	III β_6	3	3φ'	-		3φ' (3	III);	7 ÷	Все вертикальные ребра.
97)	III β_7	3	4φ''	-		4φ'' (3	III);	7 ÷	То же.
98)	IV β_1	4	4φ	1χ'	IV'	4φ (1χ'	IV');	7 ÷	Нормали к ребрам, лежащие в базисных гранях.
99)	-	4	-	1χ'	IV	4φ (1χ'	IV);	7 ÷	Диагонали, лежащие в базисных гранях.
100)	IV β_2	4	4φ'	1χ'	IV'	4φ' (1χ'	IV');	7 ÷	Нормали к ребрам, лежащие в базисных гранях.[2]
101)	-	4	-	1χ'	IV	4φ' (1χ'	IV);	7 ÷	Диагонали, лежащие в базисных гранях.[2]

8. Бипирамидальный вид симметрии

По теореме 7 нет надобности исследовать принадлежащие сюда системы, сложные стереоэдры которых обладают осями и плоскостями симметрии. Все эти системы можно просто найти, прибавляя к системам шестого и седьмого видов симметрии дополнительные элементы симметрии. Таким путем получаем сперва следующие системы:

102)	III α_1	7	9χ	3φ	III	9χ	(3φ	III)
103)	-	7	10χ	3φ'	III	10χ	(3φ'	III)
104)	III α_2	7	-	3φ	III	10χ	(3φ	III)
105)	III α_3	7	12χ	-		12χ	(3φ	III)
106)	-	7	11χ	3φ'	III	11χ	(3φ'	III)
107)	IV β_1	7	10χ	3φ'	IV	10χ	(3φ'	IV)
108)	IV β_2	7	11χ	-		11χ	(3φ'	IV)
109)	III β_1	4	9χ	1χ	III	9χ	(1χ	III)
110)	III β_2	4	10χ	-		10χ	(1χ	III)
111)	III β_3	4	-	-		10χ	(1χ	III)'
112)	III β_4	4	11χ	-		11χ	(1χ	III)

[1] Вертикальные средние прямые, лежащие в гранях, параллельных плоскостям этих осей, являются осями симметрии.

[2] Через средние точки граней идут вертикальные винтовые оси.

113)	III β_5	4	12χ	-		12χ	(1χ	III)
114)	III β_6	5	10χ	3χ	III	10χ	(3χ	III)
115)	III β_7	5	12χ	-		12χ	(3χ	III)

Переходя к системам с асимметричными элементарными участками пространства, мы должны следовать общему ходу вывода, но при этом надо использовать только системы IIIγ.

116)	III γ_1	—	9χ	1 III	9χ	(1 III);	8	÷	Все вершины.
117)	III γ_2	—	10χ	-	10χ	(1 III);	8	÷	Все вершины, лежащие в одной вертикальной грани. [1]
118)	III γ_3	—	11χ	-	11χ	(1 III);	8	÷	Все вершины, лежащие в одной горизонтальной грани. 2÷ центры всех других горизонтальных граней.
119)	III γ_4	—	12χ	-	12χ	(1 III);	8	÷	Конечные точки одного горизонтального ребра. [2]
120)	III γ_5	2	11χ	1π III	11χ	(1π III);	8	÷	Все вершины.

Тетрагональная сингония

9. Пирамидальный вид симметрии

Элементарные участки пространства, возможные в этом виде симметрии, нам уже известны. Эго нормальные трипараллелоэдры, гексапараллелоэдры и гептапараллелоэдры. При исследовании принадлежащих сюда систем обратимся в теореме 4 (3); тогда получим:

121)	III β_1	—	22	1 III	22	(1 III)
122)	III β_4	—	23	-	23	(1 III)

Здесь также допустимо предположение, что два лежащих диагонально друг против друга элементарных участка

[1] Средняя прямая в параллельных гранях является осью симметрии.

[2] Средняя точка ближайшего к нему параллельного ребра и противоположная точка являются центрами инверсии.

пространства одного и того же сложного параллелоэдра одинаково ориентированы и обладают двойной осью симметрии.

Тогда получаем еще:

123) III β_6 3 22 3 III 22 (3 III)
124) III β_7 3 23 3 III 23 (3 III)

10. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии

Принадлежащие сюда системы можно непосредственно вывести из предыдущих путем простого добавления вертикальной диаметральной плоскости симметрии. Таким образом получим:

125) III β_1 4 22φ 1χ' III 22φ (1χ' III)
126) III β_2 4 23φ 1χ' III 23φ (1χ' III)
127) III β_6 7 22φ 3φ' III 22φ (3φ' III)
128) III β_7 7 23φ 3φ' III 23φ (3φ' III)

11. Тетрагонально-сфеноэдрический (бисфеноидический) вид симметрии

Если мы примем во внимание, что центры сложной симметрии лежат в центрах граней, средних точках ребер и вершинах трипараллелоэдра и могут совпадать с тригоноэдрическими вершинами гексапараллелоэдра, а также с вершинами гептапараллелоэдра, то при общем ходе исследования следует принимать во внимание системы IIIα, IIIβ, VIβ и VIIγ; системы IIIγ не учитываются, так как они требуют минимальную величину симметрии, равную восьми.

129) III α_1 3 3π 3 III 3π (3 III); 11 $\div$ Центры базисных граней и все вершины.
130) III α_3 3 4π - 4π (3 III); 11 $\div$ Центр базисной грани и средние точки вертикальных ребер.
131) III β_1 — 3π 1 III 3π (1 III); 11 $\div$ Две средние точки диагоналей вертикальных ребер.

132)	III β_4	—	4π	-	4π	(1 III);	11 ÷	Две средние точки диагоналей базисных граней и две вертикальных ребер.
133)	III β_6	3	3π	3 IV	3π	(3 III)′;	11 ÷	Все вершины.
134)	VI β_1	—	3π	1 VI	3π	(1 VI);	11 ÷	Четыре вершины в диагональной плоскости.
135)	VI β_2	—	4π	-	4π	(1 VI);	11 ÷	Четыре вершины в положении вершин сфеноэдра.
136)	VII γ_1	—	3π	1 VII	3π	(1 VII);	11 ÷	Четыре вершины в главной плоскости.
137)	VII γ_2	—	4π	1 VII	4π	(1 VII);	11 ÷	Четыре вершины в положении вершин сфеноэдра.

12. Бипирамидальный вид симметрии

Принадлежащие сюда системы можно непосредственно вывести из систем, принадлежащих девятому виду симметрии, путем простого прибавления горизонтальной плоскости симметрии и учета допущений, сделанных для систем IIIα и IIIγ

138)	III β_2	4	22χ	1χ III	22χ	(1χ III)
139)	III β_4	4	23χ	-	23χ	(1χ III)
140)	III β_6	5	22χ	3χ III	22χ	(3χ III)
141)	III β_7	5	23χ	-	23χ	(3χ III)
142)	III α_1	9	22χ	22 III	22χ	(III)
143)	III α_3	9	23χ	-	23χ	(22 III)
144)	III γ_1	—	22χ	1 III	22χ	(1 III)
145)	III γ_3	—	23χ	-	23χ	(1 III)
146)	III γ_4	—	23χ	-	23χ	(1 III)′
147)	III γ_5	3	22χ	3 III	22χ	(3 III)
148)	III γ_6	3	23χ	-	23χ	(3 III)

13. Трапецоэдрический вид симметрии

Здесь нужно применить общий ход исследования. При этом принимаются во внимание системы IIIα, IIIβ и IIIγ.

149)	IIIα_1	9	30	22 III	30	(22 III);	13 ÷	Центры базисных граней и все вершины,

150)	$III\alpha_3$	9	31[1]	-	31	(22 III):	13 ÷ Центры базисных граней; 6 ÷ все вершины.
151)	$III\beta_1$	3	30	4 III	30	(4 III):	13 ÷ Средние точки двух противоположных вертикальных ребер.
152)	$III\beta_4$	2	31	-	31	(4 III);	13 ÷ То же.
153)	$III\beta_6$	6	30	10 III	30	(10 III);	13 ÷ Средние точки всех вертикальных ребер.
154)	$III\beta_7$	6	31	-	31	(10 III);	13 ÷ То же.
155)	$III\gamma_1$	—	30	1 III	30	(1 III);	13 ÷ Конечные точки двух противоположных вертикальных ребер.
156)	$III\gamma_3$	—	31	-	31	(1 III);	13 ÷ То же.
157)	$III\gamma_4$	—	31	1 III	31	(1 III);	13 ÷ Конечные точки одного вертикального ребра.
158)	$III\gamma_5$	3	30	3 III	30	(3 III);	13 ÷ Все вершины.
159)	$III\gamma_6$	3	31	-	31	(3 III);	13 ÷ То же.

14. Скаленоэдрический вид симметрии

Здесь мы также будем следовать общему ходу исследования. Речь идет об исследовании системы IIIα, IIIβ, IIIγ, VIβ и VIIγ.

160)	$III\alpha_1$	7	9δ 3φ′ III	9δ	(3φ′ III);	14 ÷ Центры базисных граней и конечные точки всех вертикальных ребер.
161)	—	7	10δ 3φ III	10δ	(3φ III);	14 ÷ То же.[2]
162)	$III\alpha_3$	7	12δ 3φ′ III	12δ	(3φ′ III);	14 ÷ То же.
163)	—	7	11δ 3φ III	11δ	(3φ III).	14 ÷ То же.
164)	$III\beta_1$	4	9δ 1χ′ III	9δ	(1χ′ III);	14 ÷ Средние точки двух вертикальных ребер.
165)	—	3	10δ 4 III	10δ	(4 III);	14 ÷ Средние точки двух противоположных вертикальных ребер.[3]
166)	$III\beta_4$	4	11δ 1χ′ III	11δ	(1χ′ III);	14 ÷ Средние точки всех вертикальных ребер.

---

[1]) На табл. I (стр. 394) отсутствует в центре фигуры для этой системы вертикальная двойная винтовая ось.

[2]) Вертикальные средние прямые являются осями симметрии.

[3]) Оба других вертикальных ребра являются осями симметрии.

167)	—	3	12δ	4 III	12δ	(4 III);	14 ÷ То же.
168)	$III\beta_6$	7	10δ	$3\varphi'$ III	10δ	($3\varphi'$ III);	14 ÷ То же.
169)	$III\beta_7$	6	11δ	10 III	11δ	(10 III);	14 ÷ То же.
170)	$III\gamma_1$	-	10δ	1 III	10δ	(1 III);	14 ÷ Конечные точки противоположных вертикальных ребер.
171)	$III\gamma_3$	-	12δ	-	12δ	(1 III);	14 ÷ Четыре вершины в положении вершин сфеноэдра.
172)	$VII\gamma_4$	-	11δ	-	11δ	(1 III);	14 ÷ Конечные точки одного вертикального ребра; 6 ÷ противоположные точки.
173	$VI\beta_1$	4	9δ	$1\chi'$VI'	9δ	($1\chi'$VI');	14 ÷ Все тригоноэдрические вершины.
174)	$VI\beta_2$	4	11δ	-	11δ	($1\chi'$VI');	14 ÷ Четыре тригоноэдрические вершины одной половины.
175)	$VII\gamma_1$	4	9δ	$1\chi'$ VII	9δ	($1\chi'$VII);	14 ÷ Все вершины, не принадлежащие базисным граням и горизонтальной центральной плоскости.
176)	$VII\gamma_2$	4	11δ	-	11δ	($1\chi'$ VII);	14 ÷ Такие же точки одной половины.

Наконец, представляется возможным испытать такие случаи, в которых элементарный участок пространства обладает центром сложной симметрии. Этот случай относится, очевидно; к системе $III\gamma_5$. Предположив это, легко находим положение всех элементов симметрии. Таким образом мы приходим к новой системе:

177) $III\gamma_5$ 11 11δ 3π III 11δ (3π III); 14 ÷ Все вершины.

Тем самым заключается этот длинный вывод.

15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

Все принадлежащие сюда системы можно непосредственно вывести из системы 13 вида симметрии, причем к ним прибавляются добавочные плоскости симметрии.

178)	$III\alpha_1$	10	30χ	22φ III	30χ	(22φ III)
179)	$III\alpha_3$	1	31χ	-	31χ	(22φ III)
180)	$III\beta_1$	7	30χ	4φ III	30χ	(4φ III)

181)	$III\beta_4$	7	31χ	-	31χ (4φ III)
182)	$III\beta_5$	7	30χ	10χ III	30χ (10χ III)
183)	$III\beta_7$	7	31χ	-	31χ (10χ III)
184)	$III\gamma_1$	4	30χ	$1\chi'$ III	30χ ($1\chi'$ III)
185)	$III\gamma_3$	4	31χ	-	31χ ($1\chi'$ III)
186)	$III\gamma_4$	4	31χ	$1\chi'$ III	31χ ($1\chi'$ III)
187)	$III\gamma_5$	7	30χ	$3\varphi'$ III	30χ ($3\varphi'$ III)
188)	$III\gamma_6$	7	31χ	-	31χ ($3\varphi'$ III)

Гексагональная сингония

16. Тригонально-пирамидальный вид симметрии

189)	$IV\delta_1$	—	38	1 IV	38	(1 IV);	16 ÷ Чередующиеся вертикальные ребра.
190)	$IV\delta_2$	—	39	-	39	(1 IV);	16 ÷ То же[1]) с правыми винтовыми осями.
191	-	—	39	-	39	(1 IV)′;	16 ÷ То же — с левыми винтовыми осями.

17. Дитригонально-пирамидальный вид симметрии

Для этого вида симметрии характерно то, что системе точек 38 φ не отвечает ни одна из принадлежащих сюда систем параллелоэдров. Это можно легко доказать, если провести плоскость симметрии через одно вертикальное ребро, которое представляет собою общую тройную ось симметрии для трех соседних элементарных участков пространства, и через центр этих участков. Тогда мы придем сразу же к системе 38 φ', единственной, которая таким образом отвечает системе (38). Отсюда находим:

192) $IV\delta_1$ 4 $38\varphi'$ $1\chi'$ IV 38φ ($1\chi'$ IV)

---

[1]) Другие вертикальные ребра и вертикальные оси элементарных участков пространства являются тройными винтовыми осями. Следует иметь в виду, что когда вообще имеются ребра, которые являются тройными винтовыми осями, то ось параллелоэдра должна быть именно такой же осью. В связи с этим следует различать системы с правыми и левыми осями.

18. Тригонально-бипирамидальный вид симметрии

193)	IVβ	16	38χ	38 IV	38χ	(38 IV)
194)	IVδ	4	—	1χ IV	38χ	(1χ IV)
195)	$IV\varepsilon_1$	—	—	1 IV	38χ	(1 IV)

19. Тригонально-трапецоэдрический вид симметрии

Сюда относится то же самое замечание, которое давалось для предыдущего вида симметрии. Соответственно этому, к системе (45) не принадлежит ни одна из возможных систем параллелоэдров, которая обладает ребром, совпадающим с осью симметрии. Согласно этому получаем:

196)	$IV\beta_1$	16	44	38 IV	44	(38 IV)	
197)	-	16	45	-	45	(38 IV)	
198)	$IV\delta_1$	3	44	4 IV′	44	(4 IV′)	
199)	$IV\delta_2$	3	46	-	46	(4 IV′)	С правыми осями.
200)	-	3	46	-	46	(4 IV′)′	С левыми осями.
201)	$IV\varepsilon_1$	—	44	1 IV	44	(1 IV)	
202)	$IV\varepsilon_2$	—	46	-	46	(1 IV)	С правыми осями.
203)	-	—	46	-	46	(1 IV)′	С левыми осями.

20. Дитригонально-бипирамидальный вид симметрии

204)	$IV\beta_1$	17	44χ	38χ IV	44χ	(38χ IV)
205)	-	17	45χ	-	45χ	(38χ IV)
206)	$IV\delta_1$	7	44χ	4φ IV	44χ	(4φ IV)
207)	$IV\varepsilon_1$	4	-	1χ′ IV	44χ	(4χ′ IV)

21. Гексагонально-пирамидальный вид симметрии

Согласно теореме 5 (4) принадлежащие сюда системы параллелоэдров целиком отсутствуют.

22. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии

Сюда относится то же замечание.

23. Ромбоэдрический вид симметрии

208) $III\alpha_3$ 9 39π 39 III 39π 39 (III)
209) $VI\gamma$ 9 — 39 VI 39π (39 VII)
210) $VII\beta$ 9 — 39 VII 39π (39 VII)
211) $IV\beta_1$ 9 38π 38 VI 38π (38 IV); 23 ÷ Средние точки базисных граней.

24. Гексагонально-бипирамидальный вид симметрии

212) $IV\beta_1$ 21 49χ 49 IV 49χ (49 IV); 24 ÷ Средние точки базисных граней.

25. Гексагонально-трапецоэдрический вид симметрии

213) $IV\beta_1$ 21 54 49 IV 54 (49 IV); 25 ÷ Средние точки базисных граней.

26. Гексагонально-скаленоэдрический вид симметрии

214) $IV\beta_1$ 17 44δ 38φ IV 44δ ($38\varphi'$ IV); 26 ÷ Средние точки базисных граней.
215) - 17 45δ $38\varphi'$ IV 45δ ($38\varphi'$ IV); 26 ÷ То же.

27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симметрии

216) $IV\beta_1$ 22 54χ 49φ IV 54χ (49φ IV); 27 ÷ Средние точки базисных граней.

Кубическая сингония

28. Тетраэдрический вид симметрии

217) $VI\beta_1$ 16 59 39 VI 59 (39 VI); 28 ÷ Две противоположные тригоноэдрические вершины.

29. Додекаэдрический вид симметрии

218) $III\gamma_1$ 16 61χ 39 III 61χ (39 III); 29 ÷ Две противоположные вершины.

30. Тетраэдрический вид симметрии

219) $VI\beta_1$ 17 59δ 39φ VI 59δ (39φ VI); 30 ÷ Две противоположные вершины.

31. Гироэдрический вид симметрии

220) IIIγ_1 16 68 39 III 68 (39 III); 31 ÷ Две противоположные вершины.

32. Октаэдрический вид симметрии

221) IIIγ_1 22 69χ 39φ III 68χ (39φ III); 32 ÷ Две противоположные вершины.

Глава VI

ВЫВОД ВСЕХ НЕОБЫЧНЫХ (ЭКСТРАОРДИНАРНЫХ) ВОЗМОЖНЫХ ВИДОВ СТРУКТУР, ОТВЕЧАЮЩИХ ГЕМИСИММОРФНЫМ СИСТЕМАМ ТОЧЕК

Пусть имеется одна, принадлежащая сюда, система. Выведем другую систему, которая обладает теми же элементарными участками пространства, но является симморфной. Она получается из первой благодаря тому, что к каждому элементарному участку пространства прибавляются все дополнительные элементы симметрии, [1] что всегда возможно, так как элементарные участки пространства асимморфных систем обладают теми же формами, какими обладают и симморфные той же сингонии.

Следует сразу же выделить два различных случая:

1) Данная система обладает проходящей через центры элементарных участков пространства плоскостью симметрии или совпадающими с ними центрами инверсии или центрами сложной симметрии вообще.

Согласно теореме 7 (гл. 5) мы можем их опустить и тогда придем к системе, которая отвечает простой симморфной системе точек.

Отыскание принадлежащих сюда систем ограничивается уже решенной задачей нахождения необычных (экстраорди-

[1] Конечно также и такие, которые являются равнодействующими направлений и величин совмещающих движений однозначно определенной формы элементарных участков пространства.

нарных) систем, относящихся к этой системе точек. Из них здесь принимаются во внимание только те, центры элементарных участков пространства которых лежат в плоскостях, отвечающих по положению сокращенным плоскостям симметрии или центры которых совпадают с центрами сложной симметрии.

2) Данная система не обладает такой плоскостью симметрии или центрами сложной симметрии (последние могут, однако, занимать периферическое положение и, таким образом, являться элементами связующей симметрии).

Если мы превратим снова такую систему элементарных участков пространства в симморфную, упраздним в последней элементы прямой симметрии (т. е. плоскости симметрии элементарных участков пространства и соответствующие им равнодействующие элементы симметрии), то придем к обычной (ординарной) системе, отвечающей простой симморфной системе точек. Сравнение этой системы с данной покажет нам, какие оси симметрии имеются в элементарных участках пространства вспомогательной системы, которые отсутствуют в элементарных участках данной системы, являясь в последней лишь элементами связующей симметрии. Если мы их упраздним (но не их равнодействующие), то мы придем к новой необычной (экстраординарной) системе с теми же элементарными участками пространства, которая, однако, отвечает простой симморфной системе точек.

Система, очевидно, симморфна, так как согласно определению гемисимморфной системы на поверхности ее элементарных участков должны быть симморфные центры симметрии. Эта система является необычной (экстраординарной), так как согласно определению необычной системы такие центры могут находиться только на поверхности.

Таким образом мы пришли к теореме, которая дает обоснование полному выводу сюда принадлежащих систем.

Теорема 1. *Каждой необычной (экстраординарной) системе параллелоэдров, в основе которой лежит гемисимморфная система точек, отвечает необычная (экстраординарная) система с простой симморфной системой точек.*

Элементы прямой симметрии, которые в искомой системе играют роль элементов связующей симметрии, являются теперь элементами симметрии совмещения. Это будут двойные оси и винтовые оси, так как другие элементы симметрии второго порядка для симметрии совмещения вообще невозможны. Но так как такие оси совмещения должны присутствовать в системе с самого начала, то, следовательно, принадлежащие сюда системы возможны только тогда, когда среди осей совмещения имеются двойные оси. В противном случае гемисимморфной системе точек не отвечает ни одна необычная (экстраординарная) система.

Вспомогательные оси совмещения замещают в гемисимморфной системе те элементы прямой симметрии, которые действуют как элементы связующей симметрии. Если они являются двойными винтовыми осями, то могут занимать в системе любые положения. Может случиться, что они совпадут с центральной осью симметрии; ясно что тогда эта ось симметрии останется такой же осью, но соответствующая ей величина совмещающего движения будет в два раза большей. Если вспомогательная ось совмещения является осью симметрии, то она может занимать только периферическое положение; центральное положение она не сможет занять, так как по теореме 7 ее снова можно принять во внимание без того, чтобы при этом изменилась система параллелоэдров.

Если выпустить один из элементов связующей симметрии, то обязательно останутся пустые участки пространства; тем самым система параллелоэдров при этом будет заменена другой. При отбрасывании элементов прямой симметрии и замещении данной гемисимморфной системы простой сим-

морфной, сингония может остаться той же самой или стать более низкой. Если сингония сохраняется, то получаем, благодаря замене выпущенных элементов прямой симметрии вспомогательными осями совмещения, относящуюся сюда необычную (экстраординарную) систему, т. е. количественная величина этой системы точно равна количественной величине соответствующей экстраординарной системы, которая принадлежит простой симморфной системе точек, служащей для построения.

Если сингония понижается, то из найденных необычных (экстраординарных) систем выбираются такие, в которых оси симметрии занимают положения, подходящие к более высоким родам сингоний.

Таким путем мы приходим к следующему общему способу нахождения принадлежащих сюда систем.

Если в системе точек имеются плоскости симметрии или центры сложной симметрии, то мы ее примем за центральную и попросту отбросим эти элементы. Из найденных простых симморфных систем выберем те необычные (экстраординарные) системы параллелоэдров, сингония которых по положению элементов симметрии совместима с данной и центры которых находятся в отброшенной плоскости симметрии или совпадают с опущенными центрами сложной симметрии. Тогда остается только снова добавить последние, и искомые системы будут найдены.

Далее примем эти плоскости симметрии за элементы связующей симметрии и исследуем, какие главные точки приведут благодаря им к симметрическому совмещению. Затем заменим их соответствующими осями совмещения, которые вызывают то же совмещение и одновременно являются параллельными уже существующим в системе двойным осям симметрии. Этот же прием действителен также в случае отсутствия плоскостей симметрии, когда обязательно появляются, как элементы связующей симметрии, плоскости скольжения.

После того как мы таким путем получили соответствующую простую симморфную систему точек, найдем по вышеупомянутому правилу принадлежащие сюда необычные (экстраординарные) системы, принимая во внимание то обстоятельство, что добавленные вспомогательные оси функционируют как элементы связующей симметрии. Затем лишь нужно последние снова заменить отброшенными элементами прямой симметрии, и искомые системы будут найдены.

Для системы точек, в которой плоскости симметрии функционируют как элементы связующей симметрии, гекса- и гептапараллелоэдры, конечно, отпадают. Эти плоскости должны совпадать с гранями трипараллелоэдра или с базисными гранями тетрапараллелоэдра.

Когда через оси симметрии единственного (вертикального) направления проходят плоскости скольжения с также вертикальными направлениями скольжения, то имеются две возможности заменить эти элементы симметрии, как элементы связующей симметрии, двойными осями совмещения. С одной стороны, мы можем эти оси сохранить и только уменьшить вдвое величину соответствующего движения, а с другой стороны мы можем прибавить двойные оси, которые будут перпендикулярны к первым. Следует остерегаться того, чтобы при таком введении вспомогательных осей совмещения не принять одну и ту же систему за две разные.

Принадлежащие сюда системы перечислены опять-таки в форме таблиц. Данные в вертикальных колонках, служащие для их определения, обозначают следующее: 1) порядковый номер, 2) номер гемисимморфной системы, 3) симметрия элементарного участка пространства, выраженная номером вида симметрии, 4) симморфная простая вспомогательная система, 5) отвечающая ей необычная (экстраординарная) система параллелоэдров и, наконец, 6) символ новой необычной (экстраординарной) системы.

Таблица необычных (экстраординарных) возможных видов структур, принадлежащих гемисимморфным системам точек

Моноклинная сингония

4. Гемипризматический безосный (доматический) вид симметрии

Так как в этом виде еще отсутствуют двойные оси совмещения, то, на основании вышеизложенного, здесь нельзя указать принадлежащих сюда систем.

5. Призматический вид симметрии

1) 3χ 1	—	3	3 (1 III)	3χ 1 (1 III)
2) -	—	3	3 (1 III)′	3χ 1 (1 III)′
3) -	—	3	3 (1 IV)	3χ 1 (1 IV)
4) 4χ 1	—	4	4 (1 III)	4χ 1 (1 III)
5) -	—	4	4 (1 III)′	4χ 1 (1 III)′
6) -	—	4	4 (1 III)″	4χ 1 (1 III)″
7) -	—	4	4 (1 III)‴	4χ 1 (1 III)‴
8) -	—	4	4 (1 IV)	4χ 1 (1 IV)
9) -	—	4	4 (1 IV)′	4χ 1 (1 IV)′
10)• -	—	4	4 (1 IV)″	4χ 1 (1 IV)″
11) -	—	4	4 (1 IV)‴	4χ 1 (1 IV)‴
12) -	—	4	4 (1 IV)^{IV}	4χ 1 (1 IV)^{IV}
13) -	—	4	4 (1 VI)	4χ 1 (1 VI)
14) -	—	4	4 (1 VI)′	4χ 1 (1 VI)′
15) -	—	4	4 (1 VII)	4χ 1 (1 VII)
16) -	—	4	4 (1 VII)″	4χ 1 (1 VII)′

Ромбическая сингония

7. Пирамидальный вид симметрии

17) 3φ 1	—	9	9 (1 III)	3φ 1 (1 III)	
18) -	—	9	9 (1 VI)	3φ 1 (1 VI)	
19) -	—	9	9 (1 VII)	3φ 1 (1 VII)	
20) 3φ 2	4	3	3 (1 III)	3φ 2 (1χ III)	
21) -	4	3	3 (1 III)′	3φ 2 (1χ′ III)	
22) -	4	3	3 (1 IV)	3φ 2 (1χ′ IV)	Плоскость симметрии перпендикулярна одной паре граней.

23)	-	4	3	-	3φ 2 (1χ′ IV′)	Плоскость симметрии диагональна.
24)	-	—	3	3 (1 III)	3φ 2 (1 III)	
25)	3φ 3	—	4	4 (1 III)	3φ 3 (1 III)	
26)	-	—	4	4 (1 III)′	3φ 3 (1 III)′	
27)	-	—	4	4 (1 IV)′	3φ 3 (1 IV)	
28)	-	—	4	4 (1 IV)″	3φ 3 (1 IV)′	
29)	-	—	4	4 (1 VI)	3φ 3 (1 VI)	
30)	-	—	4	4 (1 VII)	3φ 3 (1 VII)	
31)	-	—	4	4 (1 VII)′	3φ 3 (1 VII)′	
32)	3φ 4	—	4	4 (1 III)″	3φ 4 (1 III)	
33)	-	—	4	4 (1 III)‴	3φ 4 (1 III)	
34)	-	—	4	4 (1 IV)	3φ 4 (1 IV)	
35)	-	—	4	4 (1 IV)‴	3φ 4 (1 IV)′	
36)	-	—	4	1 (1 III)^{IV}	3φ 4 (1 IV)″	
37)	3φ 5	—	3	3 (1 III)′	3φ 5 (1 III)	
38)	3φ′ 1	—	4	4 (1 III)″	3φ′ 1 (1 III)	
39)	4φ 1	4	4	4 (1 III)′	4φ 1 (1χ III)	
40)	-	4	4	4 (1 VI)	4φ 1 (1χ′ VI)	
41)	-	4	4	4 (1 VII)	4φ 1 (1χ′ VII′)	
42)	-	4	4	4 (1 VII)′	4φ 1 (1χ′ VII′)′	
43)	4φ 1	—	3	3 (1 III)	4φ 1 (1 III)	
44)	4φ 2	4	4	4 (1 III)	4φ 2 (1χ III)	
45)	-	4	4	4 (1 IV)′	4φ 2 (1χ IV)	
46)	-	4	4	4 (1 IV)″	4φ 2 (1χ IV)′	
47)	-	—	4	4 (1 III)	4φ 2 (1 III)	
48)	-	—	4	4 (1 III)′	4φ 2 (1 III)′	
49)	-	—	4	4 (1 IV)′	4φ 2 (1 IV)	
50)	-	—	4	4 (1 IV)″	4φ 2 (1 IV)′	
51)	4φ 3	—	4	4 (1 III)″	4φ 3 (1 III)	
52)	4φ′ 1	—	4	4 (1 III)″	4φ′ 1 (1χ′ III)	
53)	-	4	4	4 (1 III)‴	4φ′ 1 (1χ III)	
54)	-	4	4	4 (1 IV)	4φ′ 1 (1χ′ IV)	Плоскость симметрии перпендикулярна паре граней.
55)	-	4	4	-	-	Плоскость симметрии диагональна.
56)	-	4	4	4 (1 IV)‴	4φ′ 1 (1χ IV)	
57)	-	4	4	4 (1 IV)^{VI}	4φ′ 1 (1χ IV)′	
58)	-	—	4	4 (1 III)	4φ′ 1 (1 III)	
59)	-	—	4	4 (1 III)′	4φ′ 1 (1 III)′	
60)	-	—	4	4 (1 IV)′	4φ′ 1 (1 IV)	

61)	-	—	4	4 (1 IV)″	4φ′ 1 (1 IV)′
62)	4φ′	2	11	11 (1 III)	4φ′ 2 (1 III)
63)	-	—	11	11 (1 VI)	4φ′ 2 (1 VI)
64)	-	—	11	11 (1 VII)	4φ′ 2 (1 VII)

Относительно символа 16h = 4φ″ 1 легко видéть, что, следуя общему способу исследования, мы не получим принадлежащих сюда симморфных систем, так как двойные винтовые оси с переносом λ / 4 невозможны.

8. Бипирамидальный вид симметрии

65)	9χ 1	5	9	9 (3 III)	9χ 1 (3χ III)
66)	-	4	9	9 (1 III)	9χ 1 (1χ III)
67)	-	4	9	9 (1 VI)	9χ 1 (1χ′ VI)
68)	-	4	9	9 (1 VII)	9χ 1 (1χ′ VII′)
69)	-	3	9	9 (3 III)	9χ 1 (3 III)
70)		—	9	9 (1 III)	9χ 1 (1 III)
71)	9χ 2	2	9	-	9χ 2 (1π III)
72)	-	3	10	10 (3 III)	9χ 2 (3 III)
73)	-	3	10	10 (3 III)′	9χ 2 (3 III)′
74)	-	3	10	10 (3 IV)	9χ 2 (3 IV)
75)	-	—	10	10 (1 III)	9χ 2 (1 III)
76)	-	—	10	10 (1 III)′	9χ 2 (1 III)′
77)	9χ 3	2	9	9 (1 VI)	9χ 3 (1π VI)
78)	-	2	9	9 (1 VII)	9χ 3 (1π VII)
79)	9χ 3	3	11	11 (3 III)	9χ 3 (3 III)
80)	-	3	11	11 (3 IV)	9χ 3 (3 IV)
81)	-	—	11	11 (1 III)	9χ 3 (1 III)
82)	10χ 1	5	10	10 (3 III)	10χ 1 (3χ III)
83)	-	5	10	10 (3 III)′	10χ 1 (3χ III)′
84)	-	5	10	10 (3 IV)	10χ 1 (3 IV)
85)	-	4	10	10 (1 III)′	10χ 1 (1χ III)
86)	-	3	10	10 (3 III)	10χ 1 (3 III)
87)	-	3	10	10 (3 III)′	10χ 1 (3 III)′
88)	-	3	10	10 (3 IV)	10χ 1 (3 IV)
89)	-	3	10	10 (3 III)″	10χ 1 (3 III)″
90)	-	—	10	10 (1 III)	10χ 1 (1 III)
91)	-	—	10	10 (1 III)′	10χ 1 (1 III)′
92)	10χ 2	7	10	10 (3 III)″	10χ 2 (3φ III)
93)	-	4	10	10 (1 III)	10χ 2 (1χ III)
94)	-	4	10	10 (1 III)′	10χ 2 (1χ III)′

95)	-	3	9	9 (3 III)	10χ 2 (3 III)
96)	-	—	9	9 (1 III)	10χ 2 (1 III)
97)	10χ 3	2	10	10 (1 III)′	10χ 3 (1π III)
98)	-	3	12	12 (3 III)	10χ 3 (3 III)
99)	-	—	12	12 (1 III)	10χ 3 (1 III)
100)	11χ 1	5	11	11 (3 III)	11χ 1 (3χ III)
101)	-	5	11	11 (3 IV)	11χ 1 (3χ IV)
102)	-	2	11	11 (1 III)	11χ 1 (1π III)
103)	-	3	10	10 (3 III)	11χ 1 (3 III)
104)	-	3	10	10 (3 III)′	11χ 1 (3 III)′
105)	-	3	10	10 (3 IV)	11χ 1 (3 IV)
106)	-	—	10	10 (1 III)	11χ 1 (1 III)
107)	-	—	10	10 (1 III)′	11χ 1 (1 III)′

Относительно символа 12χ 1 легко видеть, что по общему способу ему не отвечает ни одна простая симморфорная система (аналогично случаю с системой 4φ″ 1).

Тетрагональная сингония

10. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии

108)	22φ 1	3	30	30 (3 III)	22φ 1 (3 III)
109)	-	—	30	30 (1 III)	22φ 1 (1 III)
110)	22φ 2	7	22	22 (3 III)	22φ 2 (3φ III)
111)	-	4	22	22 (1 III)	22φ 2 (1χ′ III)
112)	-	—	22	-	22φ 2 (1 III)
113)	22φ 3	3	23	23 (3 III)	22φ 3 (3 III)
114)	-	—	23	23 (1 III)	22φ 3 (1 III)
115)	23φ 1	7	23	23 (3 III)	23φ 2 (3φ III)
116)	-	4	23	23 (1 III)	23φ 2 (1χ′ III)
117)	-	—	31	31 (1 III)	23φ 2 (1 III)

12. Тетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

118)	22χ 1	4	22	22 (1 III)	22χ 1 (1π III)
119)	-	3	22	22 (3 III)	22χ 1 (3 III)
120)	-	—	22	22 (1 III)	22χ 1 (1 III)

14. Тетрагонально-скаленоэдрический вид симметрии

121)	9δ 1	11	9	9 (3 III)	9δ 1 (3π III)
122)	-	—	11	11 (1 III)	9δ 1 (1 III)
123)	-	—	11	11 (1 VI)	9δ 1 (1 VI)

124)	-	—	11	11 (1 VII)	9δ 1 (1 VII)
125)	10δ 1	11	10	10 (3 III)	10δ 1 (3π III)
126)	-	3	10	-	10δ 1 (3 III)
127)	-	3	10	10 (3 III)''	10δ 1 (3 III)'
128)	10δ 2	11	10	-	10δ 2 (3π III)
129)	-	3	9	9 (3 III)	10δ 2 (3 III)
130)	-	—	9	9 (1 III)	10δ 2 (1 III)
131)	-	—	9	9 (1 VI)	10δ 2 (1 VI)
132)	-	—	9	9 (1 VII)	10δ 2 (1 VII)
133)	10δ 3	11	9	9 (1 VI)	11δ 3 (1π VI)
134)	-	11	9	9 (1 VII)	10δ 3 (1π VII)
135)	-	3	12	12 (3 III)	10δ 3 (3 III)
136)	-	—	12	12 (1 III)	10δ 3 (1 III)
137)	12δ 1	11	12	12 (3 III)	12δ 1 (3π III)
138)	-	—	9	9 (1 III)'	12δ 1 (1 III)
139)	-	3	9	9 (1 III)''	12δ 1 (3 III)
140)	-	—	9	9 (1 VI)	12δ 1 (1 VI)
141)	-	—	9	9 (1 VII)	12δ 1 (1 VII)

15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

142)	30χ 1	12	30	30 (22 III)	30χ 1 (22χ III)
143)	-	5	30	30 (3 III)	30χ 1 (3χ III)
144)	-	4	30	30 (1 III)	30χ 1 (1χ III)
145)	-	9	30	30 (22 III)	30χ 1 (22 III)
146)	-	6	30	30 (10 III)	30χ 1 (10 III)
147)	-	3	31	31 (4 III)	30χ 1 (4 III)
148)	.	3	30	30 (3 III)	30χ 1 (3 III)
149)	-	—	30	30 (1 III)	30χ 1 (1 III)
150)	30χ 2	5	30	30 (4 III)	30χ 2 (4χ III)
151)	-	14	30	30 (10 III)	30χ 2 (10δ III)
152)	-	7	30	30 (3 III)	30χ 2 (3φ III)
153)	30ϰ 2	4	30	30 (1 III)	30χ 2 (1χ' III)
154)	-	9	30	30 (22 III)	30χ 2 (22 III)
155)	-	3	30	30 (4 III)	30χ 2 (4 III)
156)	-	—	30	30 (1 III)	30χ 2 (1 III)
157)	30χ 3	2	30	-	30χ 3 (1π III)
158)	-	11	30	30 (3 III)	30χ 3 (3π III)
159)	-	9	31	31 (22 III)	30χ 3 (22 III)
160)	-	3	31	31 (4 III)	30χ 3 (4 III)
161)	-	6	31	31 (10 III)	30χ 3 (10 III)
162)	31χ 1	12	31	31 (22 III)	31χ 3 (22χ III)

163)	-	5	31	31 (4 III)	31χ 3 (4χ III)	
164)	-	14	31	31 (10 III)	31χ 3 (10δ III)	
165)	-	7	31	31 (3 III)	31χ 1 (3φ III)	
166)	-	4	31	31 (1 III)	31χ 1 (1χ′ III)	
167)	-	9	30	30 (22 III)	31χ 1 (22 III)	
168)	-	6	30	30 (10 III)	31χ 1 (10 III)	
169)	-	3	30	30 (4 III)	31χ 1 (4 III)	
170)	-	—	30	30 (1 III)	31χ 1 (1 III)	
171)	-	3	30	30 (3 III)	31χ 1 (3 III)	

Гексагональная сингония

17. Дитригонально-пирамидальный вид симметрии

172)	38φ′ 1	—	38	38 (1 IV)	38φ′ 1 (1 IV)	
173)	39φ 1	—	39	39 (1 IV)	39φ 1 (1 IV)	С правыми осями
174)	- 1	—	39	39 (1 IV)′	39φ 1 (1 IV)′	С левыми осями.

20. Дитригонально-бипирамидальный вид симметрии

175)	44χ 1	18	44	44 (38 IV)	44χ 1 (38χ IV)	
176)	-	4	44	44 (1 IV)	44χ 1 (1χ IV)	
177)	-	3	44	44 (4 IV′)	44χ 1 (4 IV′)	
178)	-	16	44	44 (38 IV)	44χ 1 (38 IV)	
179)	-	3	44	44 (4 IV′)	44χ 1 (4 IV′)	
180)	-	—	44	44 (1 IV)	44χ 1 (1 IV)	
181)	45χ 1	18	45	45 (38 IV)	45χ 1 (38χ IV)	

22. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии

Согласно теореме 5 (4), единственной сюда принадлежащей точечной системе 49φ 1 не отвечает ни одна из возможных систем параллелоэдров.

26. Гексагонально-скаленоэдрический вид симметрии

182)	44δ 1	23	44	44 (38 IV)	44δ 1 (38π IV)
183)	45δ 1	23	45	45 (38 IV)	45δ 1 (38π IV)

27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симметрии

184)	54χ 1	24	54	54 (49 IV)	54χ 1 (49χ IV)
185)	-	21	54	54 (49 IV)	54χ 1 (49 IV)

Кубическая сингония

Из принадлежащих сюда систем возможны только те, которые по общему способу построения отвечают системам (59) и (68). Это относится к следующим системам:

30. Тетраэдрический вид симметрии

Сюда относится система 61δ 1, а именно:

186) 61δ 1 16 59 59 (39 VI) 61δ 1 (39 VI)

31. Октаэдрический вид симметрии

Сюда относится система 70δ 1, а именно:

187) 70δ 1 16 68 68 (39 III) 70δ 1 (39 III)

Глава VII

ВЫВОД ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ ВИДОВ СТРУКТУР, ОТВЕЧАЮЩИХ АСИММОРФНЫМ СИСТЕМАМ

Благодаря свойствам асимморфной системы, на поверхности элементарных фигур не могут находиться симморфные центры симметрии. Так как элементарные участки пространства являются именно ими и так как их симметрия может быть различной (включая случаи полного отсутствия симметрии, которые для асимморфной системы обязательно находятся среди возможных), то все они должны быть связаны, кроме того, элементами связующей симметрии.

В этом и заключается основное отличие асимморфных систем от симморфных. Возможность асимморфных систем покоится на свойстве системы, вследствие наличия совмещающих движений одного и того же рода, т. е. таких, которые фигуру *A* приводят в совмещение с соседней фигурой *B*[1]), которые приводятся различными элементами симметрии в различные положения.

---

[1]) При этом, конечно, все „однородные“ (но не „равные“, в которые они первоначально превращаются после симметричного совмещения) элементы симметрии (или центры симметрии) приходят в совмещение.

При этом подлинные элементы симметрии могут заменяться двойными осями. Последние функционируют исключительно как элементы связующей симметрии.

Кроме того, для некоторых из этих систем характерно наличие правых и левых (тройных, четверных и шестерных) винтовых осей. Для последних можно сформулировать следующие теоремы:

Теорема 1. *Если в простой системе точек имеются правые или левые шестерные винтовые оси, то такие же оси обязательно должны проходить через центры элементарных участков пространства. Это справедливо также и для четверных осей в случае трипараллелоэдра.*

Для шестерных осей здесь не требуется особого доказательства, так как шестерные оси совмещения вообще могут проходить исключительно только через центр тетрапараллелоэдра (нормально к базисным плоскостям).

По вышеизложенному эта теорема известна в приложении к осям симметрии. Следует, однако, принять во внимание, что при дополнении асимморфной системы нововведенными элементами симметрии, не меняющими прежних элементарных участков пространства, но переводящими их в симморфные, шестерные винтовые оси, конечно, должны быть заменены соответственными осями симметрии.

Что же касается четверных винтовых осей,[1] то положим, что теорема по отношению к ним не верна, и таким образом четверные (правые и левые) винтовые оси не проходят через центр элементарного участка пространства и совпадают исключительно с некоторыми его ребрами.

Обозначим четыре различных положения параллелоэдра, достигнутых с помощью соответствующих совмещающих

[1] При этом подразумеваются только правые или левые оси; они с совмещающим движением $\lambda/2$ здесь не рассматриваются.

движение, цифрами 1, 2, 3, 4. Это положение можно воспроизвести из заданного исключительно совмещающими движениями данных элементов симметрии. В результате в одной вертикальной колонке, состоящей из четырех элементарных участков пространства, из упомянутых четырех положений будет присутствовать только одно; все эти четыре положения будут приурочены к четырем разным вертикальным колонкам (сами параллелоэдры, в связи с наличием упомянутых осей, должны располагаться в виде четырех различных горизонтальных слоев).

Сложный параллелоэдр должен таким образом содержать по меньшей мере 16 таких элементарных участков пространства в случае простой системы точек, принадлежащей к тетрагонально-трапецоэдрическому виду симметрии. Однако величина симметрии в этом случае равна только 8. Допущение, сделанное нами, следовательно, невозможно. Но если в вертикальной колонке кроме параллелоэдра 1 присутствует еще один параллелоэдр, 2, 3 или 4, то это может быть достигнуто только с помощью винтовой оси, совпадающей с осью колонки. Тогда необходимо наличие всех четырех положений в одной такой колонке.

Теорема 2. *Если в системе тетрапараллелоэдров присутствуют тройные винтовые оси, то через центр элементарной ячейки обязательно проходят такие же оси.*

Мы можем совершенно не касаться доказательства этой теоремы, так как ход доказательства совершенно аналогичен предыдущему. Именно для тригонально-трапецоэдрического вида симметрии соответственные сложные параллелоэдры состоят из девяти различных элементарных участков пространства, тогда как соответственная величина симметрии 6.

При выводе системы параллелоэдров, принадлежащей асимморфной системе точек, имеет большое значение следующая теорема.

Теорема 3. *Если в точечной системе имеются двойные*[1] *или тройные винтовые оси одного направления и нет никаких осей симметрии, им параллельных, то направление этих осей обязательно соответствует сопредельному совмещающему движению по отношению к перпендикулярной к ним плоскости.*

Эта теорема вытекает из той, согласно которой двойная или тройная ось симметрии в сочетании с косым совмещающим движением, которое, однако, сопряжено с перпендикулярной к ней плоскостью, дает равнодействующие винтовые оси, параллельные данным осям симметрии.

На основании всех этих теорем легко произвести систематическое исследование всех принадлежащих сюда систем параллелоэдров, отвечающих простым системам точек.

Ход исследования следующий.

Принимаются во внимание симморфные центры симметрии. Последние, как элементы связующей симметрии, заменяются другими комбинациями элементов симметрии, не изменяя, однако, соотношений связующей симметрии сложного параллелоэдра.

Затем находят все возможные совмещающие движения этих сложных параллелоэдров, точно следуя пути, избранному нами при исследовании симморфных необычных (экстраординарных) систем.

При нахождении асимморфных центров симметрии обращаем внимание на случаи, когда центром является одна двойная ось симметрии,[2] которую никоим образом нельзя заменить параллельной ей двойной винтовой осью из-за тех

[1] Также и четверные.

[2] Представление оси симметрии как центра симметрии есть обобщение, касающееся понятия центра симметрии вообще. Мы получаем такой центр, если, например, в каком-либо настоящем центре симметрии сделаем все элементы симметрии подчиненными, кроме единственной двойной оси симметрии.

же совмещающих движений. Следовательно, при таком исследовании исключаются все такие центры симметрии, среди которых присутствует только двойная ось симметрии, как единственный примитивный элемент связывающей симметрии.

Это справедливо для всех полупериферических центров симметрии. Таким образом рассматриваются исключительно периферические центры симметрии.

Если имеются тройные, четверные и шестерные винтовые оси, то исследование значительно облегчается при учете вышеуказанных теорем.

Таким образом мы получаем все системы параллелоэдров, отвечающие простым системам.

Что касается двойных систем точек, то все они находятся с помощью того же способа, который нами был использован при нахождении гемисимморфных необычных (экстраординарных) систем. Т. е. системы параллелоэдров остаются теми же, если имеются плоскости симметрии или центры сложной симметрии, проходящие через центры элементарных участков пространства. Или элементы прямой симметрии заменяются соответственными элементами симметрии совмещения, которые выбраны так, что образуют движения совмещения того же рода, как и элементы прямой симметрии в заданной двойной системе.

Следовательно, и здесь задача нахождения системы параллелоэдров, отвечающей двойным системам, значительно упрощается, сводясь к соответственным простым системам.

Результаты мы опять представляем в форме таблиц. Для двойных систем принят тот же порядок вертикальных столбцов, что и для гемисимморфных необычных (экстраординарных) систем. Что касается простых систем, то значение этих столбцов в различных случаях различно.

В случае моноклинной и ромбической сингонии мы следуем специальному пути, о котором вкратце будет сказано в дальнейшем.

Таблица возможных видов структур, отвечающих асимморфным системам точек

Моноклинная сингония

3. Гемипризматически-аксиальный (сфеноидический) вид симметрии

Единственно возможное расположение элементарных участков пространства слоеобразно. При этом элементарные участки одного слоя связаны с элементарными участками соседнего слоя посредством двойных винтовых осей.

1. Элементарные участки пространства с центральной винтовой осью

1) (1) (1 III); 2) (1) (1 IV)

2. Винтовые оси проходят через центры косых граней

3) (1) (1 III)′; 4) (1) (1 IV)′; 5) (1) (1 IV)″;[1]
6) (1) (1 VI); 7) (1) (1 VI)′;[2] 8) (1) (1 VII);
9) (1) (1 VII)′.[3]

5. Призматический вид симметрии

Здесь различаются два случая: 1) слоевое расположение (в четырех слоях, причем элементарные участки пространства обязательно асимметричны) и 2) четыре соседних элементарных участка образуют сложный параллелоэдр.

1. Слоевое расположение элементарных участков

10) 1 (χ1) (1 III); 11) 1 (χ1) (1 IV); плоскости симметрии периферические; 12) 1 (χ2) (1 III); 13) 1 (χ2) (1 IV);

---

[1] Винтовая ось в (5) связывает центры двух ближайших граней; в (4) она связывает средние точки, следующие через одну.

[2] В (7) винтовая ось связывает средние точки двух граней их вторичной зоны; в (6) она связывает средние точки двух ближайших граней (первичная зона).

[3] В (8) винтовая ось связывает средние точки шестиугольных граней; в (9) она связывает средние точки шестиугольных граней, разделенные четырехугольными гранями.

14) 1 (χ2) (1 IV)′; 15) 1 (χ2) (1 VI); 16) 1 (χ2) (1 VI)′
17) 1 (χ2) (1 VII); 18) 1 (χ2) (1 VII)[1] нет плоскостей симметрии.

2. Элементарные участки образуют сложный параллелоэдр

a) Плоскость симметрии центральна

19) 1 (χ1) (1χ III); 20) 1 (χ1) (1χ IV); 21) 1 (χ1) (1χ' III)
22) 1 (χ1) (1χ' IV); 23) 1 (χ1) (1χ' IV); 24) 1 (χ1) (1χ' VI)
25) 1 (χ1) (1χ' VI′); 26) 1 (χ1) (1χ' VII′); 27) 1 (χ1) (1χ' VII)

b) Инверсионный центр централен (нет центральных винтовых осей)

28) 1 (χ2) (1π III); 29) 1 (χ2) (1π IV); 30) 1 (χ2) (1π IV)′
31) 1 (χ2) (1π VI); 32) 1 (χ2) (1π VI)′; 33) 1 (χ2) (1π VII)
34) 1 (χ2) (1π VII)′

c) Асимметричные элементарные участки пространства

α. Винтовые оси центральны

35) 1 (χ 2) (1 III)′; 36) 1 (χ 2) (1 III)″;
37) 1 (χ 2) (1 IV)″.

β. Винтовые оси периферичны

38) 1 (χ 2) (1 III)″ 39) 1 (χ 2) (1 III)^{IV}
40) 1 (χ 2) (1 III)^{V}; 41) 1 (χ 2) (1 IV)‴
42) 1 (χ 2) (1 IV)^{IV}; 43) 1 (χ 2) (1 IV)^{V}

γ. Винтовые оси пересекают элементарные участки (косые грани)

44) 1 (χ 2) (1 IV)″; 45) 1 (χ 2) (1 VII)″

Ромбическая сингония

6. Сфеноэдрический (бисфеноидический) вид симметрии

1. Слоевое расположение элементарных участков

Для таких случаев необходимо принимать: 1) что винтовые оси занимают центральное положение; 2) что нет никаких осей совмещения, лежащих в центральной плоскости и перпендикулярных винтовым осям.

---

[1] У всех элементарных участков пространства в (12)—(18) винтовая ось занимает центральное положение; положения элементарных участков в (13) и (14) аналогичны (4) и (5); в (15) и (16) аналогичны (6) и (7); в (17) и (18) аналогичны (8) и (9).

Соответственно этому непосредственно получаем:

46) (4) (1 III); 47) (5) (1 III); 48) (5) (1 IV)
49) (5) (1 VI); 50) (5) (1 VII)

2. Элементарные участки образуют сложный параллелоэдр

а. Элементарные участки асимметричны

α. Только винтовые оси

51) (8) (1 III) (ромбич. призмы); 52) (8) (1 IV); 53) (8) (1 IV)′; [1]
54) (8) (1 VI); 55) (8) (1 VII).

β. Оси симметрии одного единственного направления

56) (7) (1 III);	ось симметрии совпадает с ребром;	винтовые оси центральны
57) (7) (1 III)′;	оси симметрии совпадают с средней прямой;	винтовые оси центральны и периферичны
58) (7) (1 III)″;	оси симметрии совпадают с диагональю базисной грани;	винтовые оси пересекают (косые грани)
59) (7) (1 IV);	то же;	то же
60) (7) (1 IV)′;	оси симметрии — нормали, лежащие в базисной грани;	винтовые оси, как и выше
61) (7) (1 VI);	оси симметрии — короткие диагонали;	винтовые оси, как и выше
62) (7) (1 VII);	оси симметрии — диагонали четырехугольных граней	винтовые оси, как и выше
63) (7) (1 VII)′;	оси симметрии — диагонали шестиугольных граней;	винтовые оси, как и выше.

γ. Оси симметрии одного единственного направления

64) III β_1 — (4) (1 III)′; 65) III β_3 — (5) (1 III)′; 66) III β_4 — (6) (1 III) прямоугольная призма.

67) III β_3 — (4) (1 III)″; 68) III β_4 — (5) (1 III)″; 69) III β_5 — (6) (1 III)′ ромбические призмы.

70) IV γ_1 — (4) (1 IV)′; 71) IV γ_2 — (6) (1 IV); 72) IV γ_3 — (5) (1 IV)′ следующие одна за другой винтовые оси.

---

[1] В (52) винтовые оси связывают в центральной плоскости средние точки двух ближайших граней; в (53) — двух раздельных граней.

73) IV γ_1 — (4) (1 IV)′; IV γ_2 = 71); 74) IV γ_3 — (5) (1 IV)″

винтовые оси, проходящие через ближайшие средние точки.

b. Элементарные участки пространства симметричны

α. Оси симметрии отсутствуют, по меньшей мере, в одном направлении

75 (4) (3 III); 76) (5) (4 III); 77) (4) (4 III); 78) (7) (3 III)
79) (5) (4 IV′); 80) (5) (4 IV); 81) (4) (4 IV′); 82) (7) (3 IV)
83) (4) (4 IV); 84) (5) (4 VI); 85) (7) (4 VI′); 86) (7) (4 VI)
87) (5) (4 VII′); 88) (7) (4 VII); 89) (5) (4 VII); 90) (5) (4 VII′)′

β. Оси симметрии во всех трех направлениях

Принадлежащие сюда системы можно вывести из $2a\gamma$ путем прибавления одной центральной оси симметрии и только тогда, когда имеется отвечающая система точек (4 а) и когда прибавляемая ось параллельна винтовой оси. Таким образом имеем:

91) (6) (4 III); 92) (6) (4 IV′); 93) (6) (4 IV).

7. Пирамидальный вид симметрии

Слоевое расположение элементарных участков пространства для этого вида симметрии невозможно. Чтобы это понять, примем во внимание то, что два слоя, следующие один за другим — в направлении винтовой оси, должны быть связаны симметричным совмещающим движением с компонентой $\lambda/4$, а здесь как раз отсутствуют элементы симметрии с таким совмещающим движением. Тем самым мыслимы только два случая: 1) элементарные ячейки асимметричны и 2) плоскость симметрии занимает центральное положение.

1. Элементарные ячейки асимметричны

a. Плоскости симметрии отсутствуют

α. Винтовые оси центральны

94) 1 (φ 3) (1 III); 95) 1 (φ 4) (1 III); 96) 1 (φ 4) (1 IV)
97) 1 (φ 4) (1 IV)′;[1] 98) 1 (φ 4) (1 VI); 99) 1 (φ 4) (1 VII)

[1]) В (96) горизонтальное скольжение параллельно ребрам; в (97) перпендикулярно им.

β. Винтовые оси не центральны

100) 1 (φ 3) (1 III)′; 101) 1 (φ 3) (1 III)″;[1] 102) 1 (φ 3) (1 IV)
103) 1 (φ 3) (1 IV)′;[2] 104) 1 (φ 4) (1 VI)′; 105) 1 (φ 4) (1 VII)′

b. Плоскость симметрии периферична

106) 1 (φ 1) (1 III); 107) 1 (φ 1) (1 III)′;
108) 1 (φ 1) (1 IV); 109) 1 (φ 1) (1 IV)′

2. Элементарные участки пространства обладают центральной плоскостью симметрии.

110) 1 (φ 1) (1 χ III); 111) 1 (φ 5) (1 χ′ III); 112) 1 (φ 1) (1 χ III)′
113) 1 (φ 2) (1 χ′ III); 114) 1 (φ 1) (1 χ IV); 115) 1 (φ 2) (1 χ′ IV)
116) 1 (φ 1) (1 χ IV); 117) 1 (φ 2) (1 χ′ IV′); 118) 1 (φ 5) (1 χ′ IV)
119) 1 (φ 5) (1 χ′ IV)′; 120) 1 (φ 5) (1 χ′ VI); 121) 1 (φ 2) (1 χ′ VI′)
122) 1 (φ 2) (1 χ′ VI); 123) 1 (φ 2) (1 χ′ VI′); 124) 1 (φ 5) (1 χ′ VII′)
125) 1 (φ 2) (1 χ′ VII); 126) 1 (φ 5) (1 χ′ VII); 127) 1 (φ 5) (1 χ′ VII′)[3]

8. Бипирамидальный вид симметрии

Принадлежащие сюда системы либо обладают прямой симметрией и тогда их можно вывести непосредственно из систем шестого вида симметрии посредством прибавления инверсионного центра или плоскости симметрии; либо у них отсутствует прямая симметрия, и тогда они находятся общим способом, путем отыскания двойных осей совмещения, которые заменяют элементы прямой симметрии.

В первом столбце мы выпишем по порядку все системы шестого вида симметрии. В следующем столбце поместим те системы, которые выводятся из систем первого столбца

[1] В (100) элементарные ячейки прямоугольные; в (101) ромбические.

[2] В (102) плоскость скольжения с вертикальным скольжением (параллельным винтовым осям) перпендикулярна одной паре сторон базисных граней; в (103) — диагональна.

[3] В (125) плоскости симметрии параллельны четырехугольным зональным граням; в (126) — перпендикулярны им.

путем прибавления: 1) центра инверсии, 2) горизонтальной плоскости симметрии и 3) вертикальной плоскости симметрии.

В конце ряда систем, отвечающих одной и той же простой системе точек, мы оставляем место для систем, не обладающих прямой симметрией. Последние мы выписываем в порядке, принятом для гемисимморфных необычных (экстраординарных) систем (см. стр. 506—507).

Далее нужно найти системы с центральной осью симметрии. Их можно вывести из систем седьмого вида симметрии путем прибавления центральной оси симметрии. Таким образом имеем:

из	1 (φ 3) (1 III) ;	250) 4 (χ 3) (3 III) ;[1]	251) 4 (χ 3) (3 III)′ [2]
	1 (φ 4) (1 III) ;	252) 4 (χ 4) (4 III) ;[1]	253) 4 (χ 4) (4 III)′ [2]
·	1 (φ 4) (1 IV) ;	254) 4 (χ 4) (4 IV′) ;[1]	255) 4 (χ 4) (4 VI) [2]
-	1 (φ 4) (1 IV)′ ;	256) 4 (χ 4) (4 IV)′ ;[1]	257) 4 (χ 4) (4 VI′)′ [2]
-	1 (φ 4) (1 VI) ;	258) 5 (χ 2) (4 VI) ;[1]	259) 5 (χ 2) (4 VI′) [2]
-	1 (φ 4) (1 VII) ;	260) 5 (χ 2) (4 VII) ;[1]	261) 5 (χ 2) (4 VII′) [2]
-	1 (φ 3) (1 III)′ ;	262) 4 (χ 3) (3 III)″ ;	263) 7 (χ 5) (4 III)
-	1 (φ 3) (1 III)″ ;	264) 7 (χ 2) (4 III) ;	265) 7 (χ 5) (4 III)
-	1 (φ 3) (1 IV) :	266) 7 (χ 2) (4 IV) ;	267) 7 (χ 5) (4 IV′)
-	1 (φ 3) (1 VI)′ ;	268) 7 (χ 2) (4 IV′) ;	269) 7 (χ 5) (4 IV)
-	1 (φ 4) (1 VI)′ :	270) 7 (χ 6) (4 VI′) ;	271) 7 (χ 5) (4 VI)
-	1 (φ 4) (1 VII)″ ;	272) 7 (χ 6) (4 VII) ;	273) 7 (χ 5) (4 VII)
-	1 (φ 1) (1 III). ;	274) 4 (χ 1) (3 III) ;	275) 7 (χ 2) (3 III)
-	1 (φ 1) (1 III)′ ;	276) 7 (χ 1) (3 III) ;	277) 7 (χ 2) (4 III)′
-	1 (φ 1) (1 IV) ;	278) 7 (χ 2) (3 IV′)′ ;	279) 7 (χ 1) (4 IV)
-	1 (φ 1) (1 IV)′ ;	280) 7 (χ 2) (4 IV)′ ;	281) 7 (χ 1) (4 IV′)

Далее остается только найти системы с асимметрическими элементарными участками пространства. Если здесь имеются плоскости симметрии, то они могут занимать только периферическое положение. Все эти системы находятся при пересмотре систем III и IV шестого вида симметрии.

---

[1] Ось симметрии параллельна горизонтальному скольжению.

[2] Ось симметрии перпендикулярна горизонтальному скольжению.

(4) (1 III)	нет			
(4) (1 III)′	128) 4 (χ 3) (1 π III) ;		129) 4 (χ 1) (1 χ III) ,	130) 4 (χ 2) (1 χ III)
(4) (1 III)″	131) 4 (χ 4) (1 π III) ;	132) 4 (χ 1) (1 χ′ III) ;	133) 4 (χ 2) (1 χ III)′ ;	134) 4 (χ 2) (1 χ′ III)
(4) (1 IV)′	135) 4 (χ 4) (1 π IV) ;	136) 4 (χ 1) (1 χ′ IV′) ;	137) 4 (χ 2) (1 χ IV) ;	138) 4 (χ 2) (1 χ′ IV)
(4) (1 IV)″	139) 4 (χ 4) (1 π IV)′;	140) 4 (χ 1) (1 χ′ IV) ;	141) 4 (χ 2) (1 χ IV)′ ;	142) 4 (χ 2) (1 χ′ IV′)
(4) (3 III)	143) 4 (χ 1) (3 χ III) ;	144) 4 (χ 1) (3 φ III) ;	—	—
(4) (4 III)′	145) 4 (χ 2) (4 χ III) ;	146) 4 (χ 1) (4 φ III) ;	—	—
(4) (4 IV)	147) 4 (χ 2) (4 χ IV) ;	148) 4 (χ 1) (4 φ IV′) ;	—	—
(4) (4 IV′)	149) 4 (χ 2) (4 χ IV′);	150) 4 (χ 1) (4 φ IV) ;	—	—
(5) (1 III)	—	—	151) 5 (χ 1) (1 χ′ III) ;	—
(5) (1 IV)	—	—	152) 5 (χ 1) (1 χ′ IV) ;	153) 5 (χ 1) (1 χ′ IV′)
(5) (1 VI)	—	—	154) 5 (χ 2) (1 χ′ VI) ;	—
(5) (1 VII)	—	—	155) 5 (χ 2) (1 χ′ VII);	—
(5) (1 III)′	156) 5 (χ 2) (1 π III),	157) 5 (χ 1) (1 χ III) ;	158) 5 (χ 1) (1 χ III)′ ;	159) 5 (χ 2) (1 χ III)
(5) (1 III)″	—	160) 5 (χ 1) (1 χ′ III) ;	161) 5 (χ 2) (1 χ III)′ ;	162) 5 (χ 2) (1 χ′ III)
(5) (1 IV)	—	163) 5 (χ 1) (1 χ′ IV′) ;	164) 5 (χ 2) (1 χ IV) ;	165) 5 (χ 2) (1 χ′ IV)
(5) (1 IV)′	—	136) 5 (χ 1) (1 χ′ IV) ;	167) 5 (χ 2) (1 χ IV′) ;	168) 5 (χ 2) (1 χ′ IV′)
(5) (4 III)	169) 5 (χ 1) (4 χ III);	170) 5 (χ 1) (1 φ III) ;	—	—
(5) (4 IV′)	171) 5 (χ 1) (4 χ IV′);	172) 5 (χ 1) (4 φ IV) ;	—	—
(5) (4 IV)	173) 5 (χ 1) (4 χ IV);	174) 5 (χ 1) (4 φ IV′) ;	—	—
(5) (4 VI)	175) 5 (χ 2) (4 χ VI);	176) 5 (χ 1) (4 φ″ VI) ;	—	—
(5) (4 VII′)	177) 5 (χ 2) (4 χ VII′);	178) 5 (χ 1) (4 φ″ VII″);	—	—
(5) (4 VII)	179) 5 (χ 2) (4 χ VII);	180) 5 (χ 1) (4 φ″ VII) ;	—	—
(5) (4 VII)′	181) 5 (χ 2) (4 χ VII′)′;	182) 5 (χ 1) (4 φ″ VII′)′;	—	—

(6) (1 III)	183) 6 (χ 2) (1 π III) ;	184) 6 (χ 1) (1 III) ;	—	—
(6) (1 III′)	—	185) 6 (χ 1) (1 χ′ III) ;	—	—
(6) (1 IV)	—	186) 6 (χ 1) (1 χ′ IV) ;	187) 6 (χ 1) (1 χ′ IV′);	—
(6) (4 III)	188) 6 (χ 1) (4 χ III) ;	189) 6 (χ 1) (1 φ III) ;	—	—
(6) (4 IV′)	190) 6 (χ 1) (4 χ VI′) ;	191) 6 (χ 1) (1 φ IV) ;	—	—
(6) (4 IV)	192) 6 (χ 1) (4 χ IV) ;	193) 6 (χ 1) (1 φ IV′) ;	—	—
(7) (1 III)	194) 7 (χ 3) (1 π III) ;	195) 7 (χ 1) (1 χ III) ;	196) 7 (χ 2) (1 χ III) ;	—
(7) (1 III)′	197) 7 (χ 2) (1 π III) ;	198) 7 (χ 1) (1 χ III)′ ;	199) 7 (χ 3) (1 χ III) ;	200) 7 (χ 2) (1 χ III)′
(7) (1 III)″	201) 7 (χ 5) (1 π III) ;	202) 7 (χ 4) (1 χ′ III) ;	203) 7 (χ 3) (1 χ′ III) ;	204) 7 (χ 2) (1 χ III)″
(7) (1 IV)	205) 7 (χ 5) (1 π IV) ;	206) 7 (χ 4) (1 χ′ IV′) ;	207) 7 (χ 3) (1 χ′ IV) ;	208) 7 (χ 2) (1 χ IV)
(7) (1 IV)′	209) 7 (χ 5) (1 π IV)′ ;	210) 7 (χ 4) (1 χ′ IV) ;	211) 7 (χ 3) (1 χ′ IV′) ;	212) 7 (χ 2) (1 χ′ IV)
(7) (1 VI)	213) 7 (χ 6) (1 π VI) ;	214) 7 (χ 4) (1 χ′ VI) ;	215) 7 (χ 2) (1 χ′ VI) ;	—
(7) (1 VII)	216) 7 (χ 6) (1 π VII) ;	217) 7 (χ 4) (1 χ′ VII) ;	218) 7 (χ 2) (1 χ′ VII′) ;	—
(7) (1 VII′)	219) 7 (χ 6) (1 π VII)′ ;	220) 7 (χ 4) (1 χ′ VII′) ;	221) 7 (χ 2) (1 χ′ VII′) ;	222) 7 (χ 2) (1 χ′ VII)
(7) (3 III)	223) 7 (χ 1) (3 χ III) ;	—	224) 7 (χ 3) (3 φ III) ;	—
(7) (3 IV)	225) 7 (χ 1) (3 χ IV) ;	—	226) 7 (χ 3) (3 φ′ IV) ;	—
(7) (4 VI′)	227) 7 (χ 4) (4 χ VI′) ;	—	228) 7 (χ 3) (4 φ′ VI′) ;	—
(7) (4 VI)	229) 7 (χ 4) (4 χ VI) ;	—	230) 7 (χ 3) (4 φ′ VI) ;	—
(7) (4 VII)	231) 7 (χ 4) (4 χ VII) ;	—	232) 7 (χ 3) (4 φ′ VII) ;	—
(8) (1 III)	233) 8 (χ 1) (1 π III) ;	234) 8 (χ 1) (1 χ III) ;	235) 8 (χ 1) (1 χ′ III) ;	236) 8 (χ 1) (1 χ′ III)′
(8) (1 IV)	237) 8 (χ 1) (1 π IV) ;	238) 8 (χ 1) (1 χ IV) ;	239) 8 (χ 1) (1 χ′ IV) ;	240) 8 (χ 1) (1 χ IV′)
(8) (1 IV)′	241) 8 (χ 1) (1 π IV)′ ;	242) 8 (χ 1) (1 χ IV)′ ;	243) 8 (χ 1) (1 χ′ VI)′ ;	244) 8 (χ 1) (1 χ′ IV′)′
(8) (1 VI)	—	245) 8 (χ 1) (1 χ′ VI′) ;	246) 8 (χ 1) (1 χ′ VI) ;	247) 8 (χ 1) (1 χ′ VI′)
(8) (1 VII)	—	248) 8 (χ 1) (1 χ′ VII) ;	249) 8 (χ 1) (1 χ′ VII)′ ;	—

Причем среди них отыскиваются такие, которые допускают прибавление подобных плоскостей симметрии.

Отсюда находим:

из (4) (1 III)	282) 4 (χ 1) (1 III);	из (4) (1 III)′	283) 4 (χ 2) (1 III)
- (5) (1 III)′	284) 5 (χ 2) (1 III);	- 6 (1 III)	285) 6 (χ 1) (1 III)
- (8) (1 III)	286) 8 (χ 1) (1 IV),	- 8 (1 IV)	287) 8 (χ 1) (1 IV)
- (8) (1 IV)′	288) 8 (χ 1) (1 IV)′;	- 7 (1 III)	289) 7 (χ 4) (1 III),
- (7) (1 III)′	290) 7 (χ 4) (1 III)′		

так как не все элементарные участки половины параллелоэдров связаны путем симметрии совмещения, то они не отыскиваются среди предыдущих систем и должны быть особо найдены при помощи составления параллелоэдров III γ.

Таким путем находят:

291) 8 (χ 1) (1 III)′ ; 292) 8 (χ 1) (1 III)″χ; 293) 8 (χ 1) (1 III)‴; 294) 8 (χ 1) (1 III)^{IV}
295) 8 (χ 1) (1 III)^{V}; 296) 7 (χ 2) (1 III) ; 297) 7 (χ 1) (1 III) ; 298) 4 (χ 1) (1 III)′
299) 5 (χ 1) (1 III) ; 300) 6 (χ 1) (1 III)′

Наконец, нужно отыскать еще системы без плоскостей симметрии. Из систем шестого вида симметрии, в которых элементарные участки половины параллелоэдра связаны совмещающей симметрией, можно прибавить центр инверсии лишь к системе (8) (1 III). Находим 301) 8 (χ 2) (1 III), в которой центр инверсии совпадает с средней точкой сложного параллелоэдра.

Остается только исследовать строение других сложных параллелоэдров III γ, и тогда находим еще:

302) 8 (χ 2) (1 III)′ ; инверсионные центры лежат в центральной плоскости (центрах граней).

303) 8 (χ 2) (1 III)″; инверсионные центры лежат периферично (средние точки ребер).

304) 7 (χ 6) (1 III) ; то же.

305) 7 (χ 5) (1 III); инверсионные центры лежат в центральной плоскости (центры граней).

306) 4 (χ 3) (1 III); то же.

307) 6 (χ 2) (1 III); то же.

Тетрагональная сингония

9. Пирамидальный вид симметрии

Принадлежащие сюда системы характерны тем, что всегда имеют четверные винтовые оси. Если совмещающие движения системы сопряжены с направлениями осей, то элементарный участок пространства должен обладать формой трипараллелоэдра. Если это не имеет места, то элементарный участок может быть гекса- или гептапараллелоэдром.

Соответственно этому мы получаем следующие системы:

308) 30 — 1 III (30) (1 III)
309) 30 — 1 VI (30) (1 VI)
310) 30 — 1 VII (30) (1 VII)
311) 31 — 1 III (31) (1 III)
312) 31 — 1 VI (31) (1 VI)
313) 31 — 1 VII (31) (1 VII)
314) 32 — 1 III (32) (1 III); правые оси проходят через центры элементарных ячеек; левые совпадают с ребрами.
315) 33 — - (32) (1 III); левые оси проходят через центры элементарных ячеек; правые совпадают с ребрами.

В обеих последних системах винтовые оси совпадают с вертикальными (для гексапараллелоэдра — с короткими) диагоналями граней (равнодействующие двойные оси симметрии проходят через центр элементарной ячейки). Совершенно невозможно допустить совпадение винтовых осей с центральными осями элементарных участков, так как в этом случае элементарные участки с правыми осями и таковые с левыми осями пришли бы в наложение, чего быть не может.

316) 33 3 3 III (33) (3 III); винтовые оси занимают центральное положение.
317) 33 — 3 VI (33) (1 VI); две винтовые оси совпадают с вертикальными диагоналями граней.
318) 33 — 3 VII (33) (1 VII); то же.

10. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии

Если плоскости симметрии этой системы проявляются как плоскости, ограничивающие элементарные участки про-

странства, то возможно предположить лишь единственный случай — случай трипараллелоэдра. Этот случай является исключением в том смысле, что здесь симметричное совмещающее движение не может быть заменено одним обычным совмещающим движением, так как благодаря первому сущность элементов симметрии претерпевает изменение.

Таким образом мы получаем:

319) 32 (φ 1) — 32 (1 III) 32 (φ 1) (1 III)

Для системы 32φ2 общий принцип тоже не подходит, так как здесь также симметрические операции совмещения не могут быть заменены обычными совмещающими движениями. Из этого ясно, что когда принадлежащий сюда трипараллелоэдр (вследствие теоремы 1) является возможным, винтовые оси выступают как центральные оси, а плоскость скольжения мыслима только как внешняя грань. Легко убедиться, что такая система действительно возмож на

320) 32 (φ 2) — 1 III 32 (φ 2) (1 III)

Если мы обозначим четыре элементарных участка, связанных одной правой осью, цифрами 1, 2, 3, 4, а им симметричные элементарные участки цифрами 1′, 2′, 3′, 4′, то получим по порядку следующие слои. [1)]

1 1′ 2 2′ 3 3′ 4 4′
3′ 3 4′ 4 1′ 1 2′ 2

Если элементарные участки являются гекса- или гептапараллелоэдрами, то единственно возможными положениями винтовых осей были бы вертикальные диагонали плоскостей. Отсюда получим следующие системы:

[1)] По отношению вертикальной плоскости симметрии рассматривают слева направо. Следует иметь в виду, что обозначенные одними и теми же цифрами элементарные участки никоим образом не симметричны по отношению к перпендикулярной вертикальной плоскости симметрии.

321) 32 (φ 2) — 1 VI 32 (φ 2) (1 VI)
322) - — 1 VII 32 (φ 2) (1 VII)
323) 33 (φ 1) 7 33 33 (3 III) 33 (φ 1) (3 φ III)
324) - — 47a 47 (1 III) 33 (φ 1) (1 III)
325) 33 (φ 2) 7 33 33 (3 III) 33 (φ 2) (3 φ' III)
326) - 4 33 33 (1 VI) 33 (φ 2) (1χ' VI')
327) - 4 33 33 (1 VII) 33 (φ 2) (1 χ' VII)
328) - 3 33 33 (3 III) 33 (φ 2) (3 III)
329) 33 (φ 3) 4 33 33 (3 VI) 33 (φ 3) (1χ' VI')
330) - 4 33 33 (3 VII) 33 (φ 3) (1χ' VII)
331) - — 33 33 (3 III) 33 (φ 3) (3 III)
332) 33 (φ 4) 3 23 23 (3 III) 33 (φ 4) (3 III)
333) - — 23 23 (1 III) 33 (φ 4) (1 III)

12. Тетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

Так как в этом виде симметрии имеются правые и левые оси, то симметрическую операцию совмещения нельзя заменить простым совмещающим движением. В том случае, если искомая система является системой трипареллелоэдров, винтовые оси должны проходить через центры элементарных участков; причем соседние элементарные участки должны быть симметричными друг относительно друга. Тогда возможны только два допущения: либо a) плоскости скольжения идут через центры, либо b) это не имеет места, и тогда они совпадают с базисными гранями. Соответственно этому мы получаем различные системы:

334) 32 (χ 1) — — 1 III 32 (χ 1) (1 III)
335) - — — - 32 (χ 1) (1 III)'

Если системы параллелоэдров соответствуют гекса- или гептапараллелоэдрам, то винтовые оси должны занимать положение вертикальных диагоналей граней, а плоскостями скольжения могут быть только те, которые не занимают центрального положения.

Таким образом мы получим следующие системы:

336) 32 (χ 1) — — 3 VI 32 (χ 1) (3 VI)
337) - — — 3 VII 32 (χ 1) (3 VII)

Относительно 33 (χ 1) мы придем, как обычно, к системам:

338)	33 (χ 1)	5	33 33 (3 III)	33 (χ 1)	(3 χ III)
339)	-	3	33 —	33 (χ 1)	(3 III)
340)	-	4	33 33 (1 VI)	33 (χ 1)	(1 χ VI)
341)	-	4	33 33 (1 VII)	33 (χ 1)	(1 χ VII)
342)	33 (χ 2)	2	33 33 (1 VI)	33 (χ 2)	(1 π VI)
343)	-	2	33 33 (1 VII)	33 (χ 2)	(1 π VII)
344)	-	3	33 33 (3 III)	33 (χ 2)	(3 III)

13. Трапецоэдрический вид симметрии

При нахождении системы параллелоэдров, принадлежащей системе (43), можно взять четверную ось симметрии за центральную ось и тогда получим систему:

345) 43 9 (22) III (43) (22 III)

Допущение других родов параллелоэдров невозможно, так как тогда должны были бы присутствовать вертикальные винтовые оси. Далее мы можем рассматривать такую ось как ребро, и тогда получим:

346) 43 3 4 III (43) (4 III)
347) 43 6 9 III (43) (9 III)
348) 43 — 1 III (43) (1 III)
349) 43 3 3 III (43) (3 III)

Что касается системы (44) и (45), то четверные винтовые оси принимаются здесь либо за центральные оси трипараллелоэдра, либо за вертикальные диагонали граней гекса- или гептапараллелоэдра. Таким образом будут найдены следующие системы:

350) 44 3 3 III (44) (3 III)
351) 44 3 4 III (44) (4 III)
352) 45 3 3 III (45) (3 III)
353) 45 3 4 III (45) (4 III)
354) 44 3 4 VI′ (45) (4 VI′)
355) 44 3 4 VII (45) (4 VII)
356) 45 3 4 VI (45) (4 VI)
357) 45 3 4 VII′ (45) (4 VII′)
358) 44 — 1 VI (44) (1 VI)[1]
359) 44 — 1 VII (44) (1 VII)
360) 45 — 1 VI (45) (1 VI)
361) 45 — 1 VII (45) (1 VII)

[1] Для этой и следующих систем положения вертикальных диагоналей граней будут заняты четверными и двойными винтовыми осями.

Для системы (46) принимаются правые оси за центральные и левые за ребра трипараллелоэдра, либо оси обоих родов принимаются за вертикальные диагонали граней гекса- или гептапараллелоэдров.

Следовательно мы получаем еще:

362) 46 3 3 III (46) (3 III) 363) 46 3 4 III (46) (4 III)	} правые оси центральны.
364) 46 3 3 III (46) (3 III′) 365) 46 3 4 III′ (46) (4 III)′	} левые оси центральны.

Что касается гекса- или гептапараллелоэдров, то получаем еще следующие системы:

366) 46 6 4 VI (46) (11 VI′) 368) 46 — 1 VI (46) (1 VI)
367) 46 6 4 VII (46) (11 VII) 369) 46 — 1 VII (46) (1 VII)

Для системы (47), принимая во внимание то обстоятельство, что здесь не имеется ни правых ни левых осей, можно следовать общему пути вывода, с помощью которого теперь надо изучить системы III γ, VI β, и VII γ. Для общих последних систем, с самого начала ясна возможность сложных параллелоэдров; добавленные (горизонтальные) двойные оси симметрии должны проходить через центры элементарных участков пространства или занимать периферическое положение.

Если в случае III γ одна четверная ось симметрии будет заменена винтовой осью с переносом $\lambda/2$, то возможны только допущения:

1) Двойные оси, лежащие диагонально, идут через центр (сложного параллелоэдра); тогда также необходимы другие двойные (равнодействующие) оси симметрии, которые проходят через центры боковых граней элементарных участков; эти системы обозначаются как III γ.

2) Двойные винтовые оси идут также через тот же центр, но совпадают с ребрами.

В качестве равнодействующих возникают, с одной стороны, вертикальные двойные оси симметрии, проходящие

через центры элементарных участков, а с другой стороны — двойные (диагональные) винтовые оси, которые не проходят через эти центры. Обозначение: III γ''.

Наконец, 3) возможны двойные винтовые оси, которые проходят через центры элементарных участков, но параллельны ребрам. Тогда имеются равнодействующие двойные винтовые оси, которые не проходят через центр сложного параллелоэдра, но занимают диагональное положение. Такую систему обозначим через III γ'''.

Теперь перейдем к систематическому выводу принадлежащих сюда систем:

370) III γ_1' — 47a 1 III (47) (1 III)

371) III γ_1'' 3 50a 3 III (50) (3 III)

372) III γ_1''' — 50a 1 III (50) (1 III)

Что касается системы точек 50 а, то можно представить что винтовая ось проходит через центр элементарного участка, так как ей соответствует поступание совмещения. Тогда получаются еще две новые системы:

373)	—	3	50 a	3 III	(50) (3 III)′;	горизонтальные оси симметрии совпадают с ребрами.
374)	—	3	50 a	—	(50) (3 III)″;	горизонтальные оси симметрии совпадают со средними прямыми.

Кроме того для этой системы возможно допущение гекса- или гептапараллелоэдров, а именно можно принять за вертикальные диагонали граней две винтовые оси и две оси симметрии, или для всех взять четыре винтовые оси. Согласно этому, мы получим еще четыре новые системы:

375)	—	3	50 a	4 VI′	(50) (4 VI′)
376)	—	3	50 a	4 VII	(50) (4 VII)
377)	—	6	50 a	12 VI	(50) (12 VI)
378)	—	6	50 a	12 VII	(50) (12 VII)

Как обычно, здесь имеется возможность испытать еще системы IIIα и IIIβ.

При этом некоторые возможности следует исключить, а именно: для системы III·α исключаются все тѣ системы, чьи компоненты движений совмещения занимают направления вертикальных осей, так как с самого начала сложный параллелоэдр, состоящий из двух, в направлении этой оси содержит полную величину λ, в качестве величины движения совмещения.

По той же причине среди систем IIIβ возможна только IIIβ_1. За центры сложных параллелоэдров принимаем точки двух родов: совпадающие с двойными осями симметрии, параллельными ребрам, или занимающие диагональные положения.

Мы получаем, таким образом, следующие системы:

379)	III α_1	6	47	10 III	(47)	(10 III)
380)	-	6	47	9 III	(47)	(9 III)
—	III β_1	—	47	1 III	(47)	(1 III)
381)	-	3	47	3 III	(47)	(3 III)

Легко видеть, что система 47(1 III) идентична с ранее найденной системой (370). Эта идентичность происходит оттого, что, если взять один центр за центр системы IIIβ_1, другой центр будет центром системы IIIγ_1.

Переходя к системам VIβ и VIγ, мы получим следующее:

382)	VI β	3	47	4 VI′	(47)	(4 VI′)
383)	VII γ	3	47	4 VII	(47)	(4 VII)

Далее, если мы примем все винтовые оси за вертикальные диагональные направления — получим:

384)	VI β	6	47	11 VI	(47)	(11 VI)
385)	VII γ	6	47	11 VII	(47)	(11 VII)

Что, наконец, касается до систем (48) и (49), то мы получаем просто следующее:

386)	48	1 III	(48) (1 III)	двойные оси симметрии совпадают с горизонтальными средними прямыми.
387)	49	-	(49) (1 III)	
388)	48	-	(48) (1 III)′	двойные оси симметрии совпадают с горизонтальными ребрами.
389)	49	-	(49) (1 III)′	

Наконец, еще возможны системы (VI) и (VII), отвечающие системам точек (48) и (49), причем все четверные винтовые оси принимаются за вертикальные диагонали граней.

390)	48	4 VI′	(48) (4 VI′)	394)	48	1 VI	(48) (VI I)
391)	48	4 VII	(48) (4 VII)	395)	48	1 VII	(48) (1 VII)
392)	49	4 VI′	(49) (4 VI′)	396)	49	1 VI	(49) (1 VI)
393)	49	4 VII	(49) (4 VII)	397)	49	1 VII	(49) (1 VII)

14. Скаленоэдрический вид симметрии

398)	6 (δ1)	3	50 a	50 (3 III)	6 (δ1) (3 III)
399)	-	3	50 a	50 (3 III)′	6 (δ1) (3 III)′
400)	-	3	50 a	50 (3 III)″	6 (δ1) (3 III)″
401)	6 (δ1)	—	50 a	50 (1 III)	6 (δ1) (1 III)
402)	-	3	50 a	50 (4 VI′)	6 (δ1) (4 VI′)
403)	-	3	50 a	50 (4 VII)	6 (δ1) (4 VII)
404)	-	6	50 a	50 (12 VI)	6 (δ1) (12 VI)
405)	-	6	50 a	50 (12 VII)	6 (δ1) (12 VII)
406)	7 (δ1)	4	7 a	7 (1 III)	7 (δ1) (1χ′ III′)
407)	-	4	7 a	7 (1 VI)	7 (δ1) (1χ′ VI′)
408)	-	4	7 a	7 (1 VII)	7 (δ1) (1χ′ VII)
409)	-	4	7 a	7 (3 III)	7 (δ1) (10χ III)
410)	-	11	7 a	—	7 (δ1) (3π III)
411)	-	3	43 a	43 (22 III)	7 (δ1) (3 III)
412)	7 (δ2)	3	50 a	50 (3 III)	7 (δ2) (3 III)
413)	-	3	50 a	50 (3 III)′	7 (δ2) (3 III)′
414)	-	3	50 a	50 (3 III)″	7 (δ2) (3 III)″
415)	-	3	50 a	50 (4 VI′)	7 (δ2) (4 VI′)
416)	-	3	50 a	50 (4 VII)	7 (δ2) (4 VII)
417)	-	6	50 a	50 (12 VI)	7 (δ2) (12 VI)
418)	-	6	50 a	50 (12 VII)	7 (δ2) (12 VII)
419)	-	—	50 a	50 (1 III)	7 (δ2) (1 III)

15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

420)	43 (χ1)	7	43 a	43 (4 III)	43 (χ1) 4π III)
421)	-	4	43 a	43 (1 III)	43 (χ1) (1χ III)
422)	-	8	43 a	43 (9 III)	43 (χ1) (9χ III)
423)	-	5	43 a	43 (3 III)	43 (χ1) (3χ III)
424)	-	12	43 a	43 (22 III)	43 (χ1) (22χ III)
425)	-	9	43 a	—	43 (χ1) (22 III)
426)	43 (χ2)	10	43 a	—	43 (χ2) (22φ III)
427)	-	5	43 a	43 (4 III)	43 (χ2) (4χ' III)
428)	-	4	43 a	43 (1 III)	43 (χ2) (1χ' III)
429)	-	14	43 a	43 (9 III)	43 (χ2) (9δ III)
430)	-	7	43 a	43 (9 III)	43 (χ2) (9φ' III)
431)	43 (χ3)	5	43 a	—	43 (χ3) (3χ III)
432)	-	4	43 a	43 (1 III)	43 (χ3) (1χ III)
433)	-	9	43 a	43 (22 III)	43 (χ3) (22 III)
434)	-	6	43 a	43 (9 III)	43 (χ3) (9 III)
435)	-	3	43 a	43 (4 III)	43 (χ3) (4 III)
436)	43 (χ4)	9	31	31 (22 III)	43 (χ4) (22 III)
437)	-	3	31	31 (4 III)	43 (χ4) (4 III)
438)	-	3	31	31 (3 III)	43 (χ4) (4 III)
439)	-	2	43	43 (1 III)	43 (χ4) (1π III)

Переходя к системе 46 (χ1), мы снова легко находим, что общий ход исследования здесь не применим вследствие наличия четверных левых и правых винтовых осей. Это тот замечательный случай, для которого теорема 1 не действительна, так как из четырех элементарных участков пространства, образующих вертикальную колонку, при проведении двойной (вертикальной) оси симметрии через центр первый и третий элементарные участки имеют одинаковую ориентировку в колонке.

Тогда мы получаем систему:

440) 46 (χ1) 3 — 3 III 46 (χ1) (3 III); ромбоэдрические и тетрагонально-сфеноэдрические центры симметрии совпадают с центром базисной грани.

За центры элементарных участков пространства можно взять также точки на винтовых осях, и тогда мы получаем еще следующие системы:

441)	46 (χ 1)	3	—	3 III	46 (χ 1) (3 III)′;	одна горизонтальная центральная ось симметрии нормальна.
442)	-	3	—	4 III	46 (χ 1) (4 III);	одна горизонтальная центральная ось симметрии диагональна.
443)	-	—	—	1 III	46 (χ 1) (1 III);	таковая отсутствует, но имеется одна нормальная ось симметрии на одной базисной грани и одна диагональная на другой базисной грани.

Если кроме этого принять во внимание положение центра инверсии, то легко найти, что еще возможны системы гекса- и гептапараллелоэдров, а именно:

444)	46 (χ 1)	2	46	46 (1 VI)	46 (χ 1) (1 π VI)
445)	-	2	46	46 (1 VII)	46 (χ 1) (1 π VII)
446)	46 (χ 2)	7	46	46 (4 VI)	46 (χ 2) (4φ″ VI)
447)	-	7	46	46 (4 VII)	46 (χ 2) (4φ″ VII)
448)	-	4	46	46 (1 VI)	46 (χ 2) (1 χ′ VI′)
449)	-	4	46	46 (1 VII)	46 (χ 2) (1 χ′ VII)

Кроме того, как легко видеть, могут появиться плоскости симметрии, как элементы связующей симметрии. Тогда получаем:

450)	46 (χ 2)	3	—	3 III	46 (χ 2) (3 III)
451)	-	3	—	4 III	46 (χ 2) (4 III)

В обоих этих случаях сложный параллелоэдр состоит из четырех колонок, две из которых содержат правые или левые оси.

452)	47 (χ 1)	8	47	47 (9 III)	47 (χ 1) (9χ III)
453)	-	14	47	47 (10 III)	47 (χ 1) (10δ III)
454)	47 (χ 1)	4	47	47 (1 III)	47 (χ 1) (1χ III)
455)	-	8	47	47 (11 VI)	47 (χ 1) (11χ′ VI′)

456)	-	8	47	47	(11 VII)	47 (χ 1)	(11χ′ VII)
457)	-	3	31	31	(4 III)	47 (χ 1)	(4 III)
458)	-	—	31	31	(1 III)	47 (χ 1)	(4 III)
459)	47 (χ 2)	14	47	47	(9 III)	47 (χ 2)	(9δ III)
460)	-	8	47	47	(10 III)	47 (χ 2)	(10χ III)
461)	-	4	47	47	(1 III)	47 (χ 2)	(1χ′ III)
462)	-	7	47	47	(4 VI′)	47 (χ 2)	(4φ′ VI′)
463)	-	7	47	47	(4 VII)	47 (χ 2)	(4φ′ VII)
464)	-	3	47	47	(3 III)	47 (χ 2)	(3 III)
465)	-	5	47	47	(3 III)	47 (χ 2)	(3χ III)
466)	-	—	31	31	(1 III)	47 (χ 2)	(1 III)
467)	47 (χ 3)	4	47	47	(1 III)	47 (χ 3)	(1χ′ III)
468)	-	7	47	47	(3 III)	47 (χ 3)	(3φ III)
469)	-	14	47	37	(11 VI)	47 (χ 3)	(11δ VI)
470)	-	14	47	47	(11 VII)	47 (χ 3)	(11δ VII)
471)	-	7	47	47	(4 (VI′)	47 (χ 3)	(4φ′ VI′)
472)	-	7	47	47	(4 VII)	47 (χ 3)	(4φ′ VII)
473)	-	6	30	30	(22 III)	47 (χ 3)	(10 III)
474)	-	6	30		—	47 (χ 3)	(9 III)
475)	-	3	30		—	47 (χ 3)	(3 III)
476)	47 (χ 4)	2	47	47	(1 III)	47 (χ 4)	(1π III)
477)	-	11	47	47	(3 III)	47 (χ 4)	(3π III)
478)	-	9	31	31	(22 III)	47 (χ 3)	(22 III)
479)	-	3	31	31	(4 III)	47 (χ 3)	(4 III)
480)	50 (χ 1)	5	50	50	(3 III)″	50 (χ 1)	(3χ III)
481)	-	7	50	50	(3 III)	50 (χ 1)	(3φ III)
482)	-	2	50	50	(1 III)	50 (χ 1)	(1π III)
483)	-	8	50	50	(12 VI)	50 (χ 1)	(12χ VI)
484)	-	8	50	50	(12 VII)	50 (χ 1)	(12χ VII)
485)	-	7	50	50	(4 VI′)	50 (χ 1)	(4φ′ VI′)
486)	-	7	50	50	(4 VII)	50 (χ 1)	(4φ′ VII)
487)	-	11	50	50	(3 III)′	50 (χ 1)	(3π III)
488)	50 (χ 2)	7	50	50	(3 III)′	50 (χ 2)	(3φ III)
489)	-	7	50	50	(3 III)″	50 (χ 2)	(3φ III)′
490)	-	4	50	50	(1 III)	50 (χ 2)	(1χ′ III)
491)	-	11	50	50	(3 III)	50 (χ 2)	(3π III)
492)	-	5	50	50	(4 VI′)	50 (χ 2)	(4χ VI′)
493)	-	5	50	50	(4 VII)	50 (χ 2)	(4χ VII)
494)	50 (χ 3)	5	50	50	(3 III′)	50 (χ 3)	(3χ III)
495)	-	11	50	50	(3 III″)	50 (χ 3)	(3π III)
496)	50 (χ 3)	5	50	50	(3 III)	50 (χ 3)	(3χ III)′

497)	-	4	50	50	(1 III)	50 (χ 3) (1χ III)
498)	50 (χ 4)	4	50	50	(3 III)′	50 (χ 4) (3φ′ III)
499)	-	4	50	50	(3 III)″	50 (χ 4) (3φ′ III)′
500)	-	4	50	50	(3 III)	50 (χ 4) (3φ′ III)″
501)	-	14	50	50	(12 VI)	50 (χ 4) (12δ VI)
502)	-	14	50	50	(12 VII)	50 (χ 4) (12δ VII)
503)	-	2	50	50	(1 III)	50 (χ 4) (1π III)

Гексагональная сингония

16. Тригонально-пирамидальный вид симметрии

504)	68	-	1 IV	68 (1 IV)
505)	69	-	—	69 (1 IV)

19. Тригонально-трапецоэдрический вид симметрии

506)	70	3	4 IV	70 (4 IV)
507)	71	3	4 IV	71 (4 IV)
508)	72	3	4 IV′	72 (4 IV′)
509)	73	3	4 IV′	73 (4 IV′)

21. Гексагонально-пирамидальный вид симметрии

510)	74	—	1 IV	74 (1 IV)
511)	75	—	1 IV	75 (1 IV)
512)	76	3	1 IV	76 (3 IV)
513)	77	3	1 IV	77 (3 IV)
514)	78	16	38 IV	78 (38 IV)

22. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии

515)	78 (φ 1)	17	78	78 (φ 1) (38φ IV)
516)	78 (φ 2)	18	78	78 (φ 2) (38φ′ IV)

24. Гексагонально-бипирамидальный вид симметрии

517)	78 (χ 1)	18	78	(38 IV)	78 (38χ IV)

25. Гексагонально-трапецоэдрический вид симметрии

518)	82	3	4 IV	82 (4 IV)
519)	82	3	4 IV′	82 (4 IV′)
520)	83	3	4 IV	83 (4 IV)
521)	83	3	4 IV′	83 (4 IV′)
522)	84	6	10 IV	84 (10 IV)

523)	85	6	10 IV	85 (10 IV)
524)	86	19	44 IV	86 (44 IV)
525)	86	19	45 IV	86 (45 IV)

27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симметрии

526)	86 (χ 1)	20	86	86 (45 IV)	86 (χ 1) (45χ IV)
527)	86 (χ 2)	20	86	86 (44 IV)	86 (χ 2) (44χ IV)

Кубическая сингония

Мы знаем, что все относящиеся сюда системы имеют тройные оси симметрии. Для всех параллелоэдров эти оси имеют обязательно центральное положение, кроме тетрапараллелоэдров, а последние невозможны для данного рода сингоний. Из этого следует, что когда имеется одна относящаяся сюда система, то через центр элементарного участка пространства последней проходит тройная ось симметрии. Система параллелоэдров на основании теоремы 7 (гл. IV) остается без изменения, если мы эту ось отбросим, но тогда мы получим другую систему, которая находится среди систем, принадлежащих ромбической или тетрагональной сингониям. Задача нахождения относящихся сюда систем, таким образом, в значительной степени облегчается.

Исследование может итти в следующем порядке. Данной системе отвечает другая, которая лишена тройных осей симметрии (и винтовых). Из систем параллелоэдров, принадлежащих этой вспомогательной системе, принимаются во внимание только те, центры которых занимают положение устраненных тройных осей симметрии. Если затем эти оси снова будут введены, то сами параллелоэдры не изменяются, но система точек и ее симметрия станут такими же, как у заданной системы.

Для двойных систем задача облегчается еще больше, если следовать примененному общему способу исследования;

сначала выясняется, соответствует ли положение плоскостей симметрии или центра сложной симметрии центральному положению соответствующей простой системе точек, так как в этом случае система пераллелоэдров остается той же, что и для простой системы, и только величина симметрии элементарного участка пространства, благодаря прибавлению прямой симметрии, будет удвоена.

Если это не имеет места, то для нахождения принадлежащих сюда систем употребляют только что описанный общий способ.

28. Тетартоэдрический вид симметрии

528) 81 16 8 a 8 (I VI) 89 (39 VI)
529) 90 16 6 a 6 (1 III) 90 (39 III)

29. Додекаэдрический вид симметрии

530) 89 (χ1) 16 8 (χ2) 8 (χ2) (1 III) 89 (χ4) (30 III)
531) 90 (χ1) 23 6 (χ2) 6 (χ2) (1 π III) 90 (χ1) (39 π III)

Системе 90 (χ 1), которой отвечает вспомогательная система 6 (χ 2), не принадлежит ни одна из возможных систем параллелоэдров, так как тройные оси симметрии не проходят через главные точки этой системы.

30. Тетраэдрический вид симметрии

Легко видеть, что единственной сюда принадлежащей системе точек 90 (δ 1) не отвечает ни одна из систем параллелоэдров. Простой системе точек 90 соответствует определенная, только что найденная система параллелоэдров 90 (39 III). В таком случае, если система параллелоэдров та же, элементарные участки пространства должны обладать прямой симметрией, что здесь не имеет места, или система должна быть такой, чтобы элементарные участки пространства имели вдвое меньший объем, т. е. были бы гептапараллелоэдрами.

Легко, однако, видеть, что через центр таких элементарных участков проходят двойные оси симметрии, но не тройные, что имело бы место, если такая система была бы действительно возможной.

31. Гироэдрический (пентагон-икоситетраэдрический) вид симметрии

Следуя общему принципу, мы находим, что системам 94 и 95 не отвечает ни одна из систем элементарных участков пространства, так как путем отбрасывания тройных осей симметрии (и равнодействующих додекаэдрических осей) мы перейдем только от системы 96 к системе 46. На основании сказанного найдем непосредственно для этой системы следующее:

532)	96.	16	46 a	46 (1 VII)	96 (39 VII)
533)	97	28	46 a	46 (11 VII)	97 (60 VII)
534)	97	16	46 a	46 (1 VI)	97 (39 VI)
535)	98	28	47 a	47 (11 VII)	98 (60 VII)
536)	99	19	47 a	47 (4 VI′)	93 (46 VI)

32. Октаэдрический вид симметрии

Принадлежащие сюда системы можно очень просто получить из только что найденных путем прибавления прямой симметрии.

Исключением является система 98 (χ 1), к которой, как и в системе 98 (46 VI), не добавляется прямая симметрия.

Для этой системы применяется общий способ исследования.

537)	96 (χ1)	23	96 a	96 (39 VII)	96 (χ1) (39 π VII)
538)	97 (χ1)	30	97 a	97 (60 VII)	97 (χ1) (60 δ VII)
539)	97 (χ2)	33	97 a	97 (32 VI)	97 (χ2) (39 π VI)
540)	98 (χ1)	29	98 a	98 (60 VII)	98 (χ1) (60 χ VII)
541)	-	19	47 (χ 1)	47 (χ1) (4 III)	98 (χ1) (46 III)
542)	98 (χ2)	30	98 a	98 (60 VII)	98 (χ1) (60 δ VIII)
543)	-	26	98 a	98 (46 VI)	98 (χ1) (46 δ VI)

Глава VIII

ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом мы сделали первый шаг в теории структуры кристаллов и нашли все возможные виды структур. A priori, конечно, трудно ответить, существуют ли такие структуры в природе, но то, что в природе не могут существовать другие виды структур, кроме указанных здесь (поскольку вывод не содержит ошибок), можно утверждать с достоверностью, так как в приведенном выводе перечислены все правильные деления пространства и принадлежность данного природного кристалла к одной из этих систем является геометрической необходимостью. Это так же достоверно, как и то, что в природных кристаллах представлены только 32 определенных вида симметрии, и как то, что на каждом природном кристалле, принадлежащем к какому-либо виду симметрии, могут быть только вполне определенные формы, выведенные a priori и т. д.

Для того, чтобы расчленить огромное число найденных видов симметрии по возможности сообразно с природой и сопоставить группы последних в форме, удобной для обозрения, мы обобщили найденные результаты в двух таблицах. В первой перечислены все виды структур, отвечающие одной системе точек. Перечисление дается в символах, что приводит к значительному сокращению, так как в каждом символе одного вида структуры первая половина представляет символ системы точек и поэтому в таблице может быть выпущен. Далее должны быть разделены обычные (ординарные) и необычные (экстраординарные) виды структур. Во второй таблице дается просто число видов структур, принадлежащих каждому виду симметрии. Последние разделяются на пять столбцов: 1) симморфные обычные (ординарные), 2) симморфные необычные (экстраординарные), 3) гемисимморфные обычные (ординарные), 4) гемисимморф-

ные необычные (экстраординарные 4 и 5) асимморфные. В шестом столбце дается общее число.

Таблица возможных видов структур, отвечающих каждой системе точек

1. Симморфные системы точек

Триклинная сингония

1. Гемипинакоидальный (педиальный) вид симметрии

1. 1) III, 2) IV, 3) VI, 4) VII, нет 4

2. Пинакоидальный вид симметрии

1π. 1) III, 2) IV, 3) VI, 4) VII, 1) (1 III), 2) (1 III)′, 3) (1 III)″, 4) (1 IV),
5) (1 IV)′, 6) (1 IV)″, 7) (1 VI), 8) (1 VI)′, 14
9) (1 VII), 10) (1 VII)′ 18

Моноклинная сингония

3. Гемипризматический осевой (сфеноидальный) вид симметрии

3. 1) III, 2) IV ; 1) (1 III), 2) (1, III)′, 3) (1 IV) 5
4. 1) III, 2) IV, 3) IV′, 4) VI ,
5) VI′, 6) VII, 7) VII′ , 1) (1 III), 2) (1 III)′, 3) (1 III)″, 4) (1 III)‴,
5) (1 IV), 6) (1 IV)′, 7) (1 IV)″, 8) (1 IV)‴
9) (1 IV)IV, 10) (1 VI), 11) (1 VI)′, 12) (1 VII) 20
13) (1 VII)′ 25

4. Гемипризматический безосный (доматический) вид симметрии

1χ. 1) III, 2) IV , 1) (1 III), 2) (1 IV) 4
1χ′. 1) III, 2) IV, 3) IV′, 4) VI, 5) VI′, 6) VII, 7) VII′; 1) (1 III), 2) (1 III)
3) (1 IV) 10
14

5. Призматический вид симметрии

3χ.	1) III, 2) IV;	1) (1χ III), 2) (1χ III)′, 3) (1χ IV) 4) (3 III), 5) (3 IV), 6) (1 III), 7) (1 III)′ 8) (1 IV)	10
4χ.	1) III, 2) IV, 3) IV′, 4) VI, 5) VI′, 6) VII, 7) VII′;	1) (1χ III), 2) (1χ III)′ 3) (1χ′ III)′, 4) (1χ′III)″, 5) (1 χ′ IV) 6) (1χ′ IV)′, 7) (χ1 IV′) 8) (1χ′ IV)″, 9) (1χ′ IV′)′ 10) (1χ′ VI′), 11) (1χ′ VI) 12) (1χ′ VII′), 13) (1χ′ VII′) 14) (3 III), 15) (3 III)′ 16) (3 IV), 17) (1 III) 18) (1 III)′, 19) (1 III)″ 20) (1 III)‴, 21) (1 III)$^{\mathrm{IV}}$ 22) (1 III)$^{\mathrm{V}}$, 23) (1 IV) 24) (1 IV)′, 25) (1π III) 26) (1π III)′, 27) (1π III)″ 28) (1π IV)	35
			45
		Общая сумма	84

Ромбическая сингония

6. Сфеноэдрический (бисфеноидальный) вид симметрии

9.	1) III ;	1) (3 III), 2) (1 III), 3) (1 VI), 4) (1 VII)	5
10.	1) III, 2) IV;	1) (3 III), 2) (3 III)′ 3) (3 IV), 4) (1 III) 5) (1 III)′, 6) (3 III)‴	8
11.	1) VI, 2) VII;	1) (3 III), 2) (3 IV), 3) (1 III). 4) (1 VI), 5) (1 VII)	7
12.	1) VI, 2) VII;	1) (3 III), 2) (1 III)	4
			24

7. Пирамидальный вид симметрии

3φ.	1) III	1) (1χ III), 2) (1 III)	3
3φ′.	1) III, 2) IV;	1) (1χ III), 2) (1 III), 3) (3 III)	5
4φ.	1) III, 2) IV, 3) IV′;	1) (1χ′ III), 2) (1χ III), 3) (1 III) 4) (1χ′ IV′), 5) (1χ′ IV)	8
4φ′.	1) VI, 2) VI′, 3) VII, 4) VII′;	1) (1χ′ III). 2) (1 III), 3) (4χ′ IV′)	

	4) (1χ′ IV)	8
4φ″. 1) VI, 2) VII;	1) (1χ III), 2) (1 III). 3) (3 III)	5
		29

8. Бипирамидальный вид симметрии

9χ. 1) III ;	1) (3φ III), 2) (1χ III), 3) (1 III)	4
10χ. 1) III. 2) IV;	1) (3φ′ III), 2) (3φ III). 3) (3φ′ IV)	
	4) (1χ III), 5) (1χ III)′, 6) (3χ III) 7) (1 III)	9
11χ. 1) VI, 2) VII;	1) (3φ′ III). 2) (3φ′ IV), 3) (1χ III)	
	4) (1 III), 5) (1π III)	7
12χ 1) VI, 2) VII,	1) (3φ III). 2) (1χ III). 3) (3χ III) 4) (1 III)	6
		26
	Общая сумма	79

Тетрагональная сингония

9. Пирамидальный вид симметрии

22 1) III ,	1) (1 III), 2) (3 III)	3
23. 1) VI, 2) VII;	1) (1 III), 2) (3 III)	4
		7

10. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии

22φ. 1) III ;	1) (1χ′ III), 2) (3φ′ III)	3
23φ. 1) VI. 2) VII,	1) (1χ′ III), 2) (3φ′ III)	4
		7

11. Сфеноэдрический (бисфеноидальный) вид симметрии

3π. 1) III ;	1) (3 (III), 2) (1 III). 3) (3 III)′	
	4) (1 VI). 5) (1 VII)	6
4π. 1) VI. 2) VII;	1) (3 III), 2) (1 III), 3) (1 VI) 4) (1 VII)	6
		12

12. Бипирамидальный вид симметрии

22χ 1) III ;	1) (1χ III). 2) (3χ III), 3) (22 III)	
	4) (1 III), 5) (3 III).	6
23χ. 1) VI, 2) VII,	1) (1χ III), 2) (3χ III), 3) (22 III)	
	4) (1 III), 5) (1 III)′, 6) (1 III)	8
		14

13. Трапецоэдрический вид симметрии

30.	1) III ,	1) (22 III). 2) (4 III), 3) (10 III). 4) (1 III). 5) (3 III)	6
31.	1) VI, 2) VII,	1) (22 III). 2) (4 III), 3) (10 III), 4) (1 III), 5) (1 III), 6) (3 III)	8
			14

14. Скаленоэдрический вид симметрии

9δ.	1) III ;	1) (3φ′ III), 2) (1χ′ III), 3) (1χ′ VI′) 4) (1χ′ VII)	5
10δ.	1) III ;	1) (3φ III), 2) (4 III), 3) (3φ′ III) 4) (1 III)	5
11δ.	1) VI, 2) VII;	1) (3φ III). 2) (1χ′ III), 3) (10 III) 4) (1 III), 5) (1χ′ VI′), 6) (1χ′ VII) 7) (3π III)	
12δ.	1) VI, 2) VII;	1) (3φ′ III), 2) (4 III). 3) (1 III)	5
			24

15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

30χ.	1) III :	1) (22φ III), 2) (4φ III), 3) (10χ III) 4) (1χ′ III), 5) (3φ′ III)	6
31χ.	1) VI, 2) VII;	1) (22φ III), 2) (4φ III), 3) (10χ III) 4) (1χ′ III). 5) (1χ′ III)′, 6) (3φ′ III)	8
			14

Общая сумма 92

Гексагональная сингония

16. Тригонально-пирамидальный вид симметрии

38.	1) IV ;	1) (1 IV)	2
39.	1) III. 2) VI. 3) VII:	1) (1 IV). 2) (1 IV)′	5
			7

17. Дитригонально-пирамидальный вид симметрии

38φ.	1) IV ;	1) (1χ′ IV)	2
39φ′.	1) IV		1
3φ.9	1) III. 2) VI, 3) VII		3
			6

18. Тригонально-бипирамидальный вид симметрии.

38χ.	1) IV;	1) (38 IV), 2) (1χ IV), 3) (1 IV)	4
			4

19. Тригонально-трапецоэдрический вид симметрии

44.	1) IV	1) (38 IV), 2) (4 IV′), 3) (1 IV)	4
45.	1) IV	1) (38 IV)	2
46.	1) III, 2) VI, 3) VII	1) (4 IV′), 2) (4 IV′)′ 3) (1 IV) 4) (1 IV)′	7
			13

20. Дитригонально-бипирамидальный вид симметрии

44χ.	1) IV,	1) (38χ′ IV), 2) (4φ IV), 3) (1 IV)	4
45χ.	1) IV,	1) (38χ′ IV)	2
			6

21. Гексагонально-пирамидальный вид симметрии

49.	1) IV	1
		1

22. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии

46φ	1) IV	1
		1

23. Ромбоэдрический вид симметрии

38π.	1) IV	1) (38 IV)	2
39π	1) III, 2) VI 3) VII,	1) (39 III), 2) (39 VI), 3) (39 VII)	6
			8

24. Гексагонально-пирамидальный вид симметрии

49χ	1) IV,	1) (49 IV)	2
			2

25. Гексагонально-трапецоэдрический вид симметрии

54.	1) IV,	1) (49 IV)	2
			2

26. Гексагонально-скаленоэдрический вид симметрии

44δ.	1) IV ;	1) (38φ IV)	2
45δ.	1) IV ;	1) (38φ′ IV)	2
46δ.	1) III, 2) VI, 3) VII;		3
			7

27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симметрии

54χ.	1) IV;	1) (49φ IV)	2
			2

Общая сумма 59

Кубическая сингония

28. Тетартоэдрический вид симметрии

59.	1) III ;	1) (39 VI)	2
60.	1) VII		1
61.	1) VI		1
			4

29. Додекаэдрический вид симметрии

59. χ.	1) III		1
60. χ.	1) VII		1
61. χ.	1) VI ;	1) (39 III)	2
			4

30. Тетраэдрический вид симметрии

59δ.	1) III;	1) (39φ VI)	2
60δ.	1) VII		1
61δ.	1) VI		1
			4

31. Гироэдрический вид симметрии

68.	1) III;	1) (39 III)	2
69.	1) VII		1
70.	1) VI		1
			4

32. Октаэдрический вид симметрии

68χ.	1) III;	1) (39φ III) .	2
69χ.	1) VII		1

70χ.	1) VI	1
		4

Общая сумма 20

Сумма всех структурных видов, отвечающих симморфным системам точек, составляет 352, из которых 131 обычных (ординарных) и 221 необычных (экстраординарных).

II. Гемисимморфные системы

Моноклинная сингония

4. Гемипризматический безосный (доматический) вид симметрии

1χ1.	1) III, 2) IV, 3) III′, 4) III″, 5) IV′	5
1χ′1.	1) III, 2) IV, 3) IV′, 4) VI. 5) VI′, 6) VII, 7) VII′	7
		12

5. Призматический вид симметрии

3χ1.	1) III, 2) IV, 3 III′, 4) III″, 5) IV′	; 1) (1 III), 2) (1 III)′ 3) (1 IV)	8
4χ1.	1) III, 2) IV, 3) IV′, 4) VI, 5) VI′; 6) VII, 7) VII′	; 1) (1 III), 2) (1 III)′ 3) (1 III)″ 4) (1 III)‴, 5) (1 IV) 6) (1 IV)′, 7) (1 IV)″ 8) (1 IV)‴, 9) (1 IV)^{IV} 10) (1 VI), 11) (1 VI)′ 12) (1 VII), 13) (1 VII)′	20
			28

Общая сумма 40

Ромбическая сингония

7. Пирамидальный вид симметрии

3φ 1.	1) III	; 1) (1 III), 2) (1 VI), 3) (1 VII)	4
3φ 2.	1) III	; 1) (1χ III), 2) (1χ′ III), 3) (1χ′IV) 4) (4χ′ IV′), 5) (1 III)	6
3φ 3.	1) III, 2) IV, 3) IV′	; 1) (1 III), 2) (1 III)′, 3) (1 IV), 4) (1 IV′) 5) (1 VI), 6) (1 VII), 7) (1 VII)′	10
3φ 4.	1) VI, 2) VI′, 3) VII	; 1) (1 III), 2) (1 III)′, 3) (1 IV), 4) (1 IV)′ 5) (1 IV)″	8

3φ'5. 1) III, 2) IV ; 1) (1 III) 3

3φ' 1. 1) III, 2) IV, 3) VI ; 4) VII, 5) VII'; 1) (1 III) 6
4φ 1. 1) III ; 1) (1χ III), 2) (1χ' VI), 3) 1χ'VII), 4) (1χ' VII')'
5) (1 III) 6
4φ' 2. 1) III, 2) IV, 3) IV' ; 1) (1χ III), 2) (1χ IV), 3) (1χ IV)', 4) (1 III)
5) (1 III)', 6) (1 IV), 7) (1 IV)' 10
4φ 3. 1) III, 2) VI, 3) VII ; 1) (1 III) 4
4φ' 1. 1) III, 2) IV, 3) IV' ; 1) (1χ' III), 2) (1χ III), 3) (1χ' IV), 4) (1χ' IV')
5) (1χ IV), 6) (1χ IV)', 7) (1 III), 8) (1 III)'
9) (1 IV), 10) (1 IV)' 13
4φ' 2. 1 III, 2) IV ; 1) (1 III), 2) (1 VI), 3) (1 VII) 5
4φ'' 1. нет —

75

8. Бипирамидальный вид симметрии

9χ 1. 1) III ; 1) (3χ III), 2) (1χ III), 3) (1χ' VI), 4) (1χ' VII')
5) (3 III), 6) (1 III) 7
9χ 2. 1) III, 2) IV ; 1) (1π III), 2) (3 III), 3) (3 III)', 4) (3 IV)
5) (1 III), 6) (1 III)' 8
9χ 3. 1) VI, 2) VII ; 1) (1π VI), 2) (1π VII), 3) (3 III), 4) (3 IV), 5) (1 III) 7
10χ 1. 1) III, 2) IV; 1) (3χ III), 2) (3χ III)', 3) (3 IV)
4) (1χ III), 5) (3 III), 6) (3 III)'
7) (3 IV), 8) (3 III)'', 9) (1 III)
10) (1 III)' 12
10χ 2. 1) III; 1) (3φ' III), 2) (1χ III), 3) (1χ III)'
4) (3 III), 5) (1 III) 6
10χ 3. 1) VI, 2) VII; 1) (1π III), 2) (3 III), 3) (1 III) 5
11χ 1. 1) III, 2) IV; 1) (3χ III), 2) (3χ IV), 3) (1π III)
4) (3 III), 5) (3 III)', 6) (3 IV)
7) (1 III), 8) (1 III)' 10
12χ1. нет —

55

Общая сумма 130

Тетрагональная сингония

10. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии

22φ 1. 1) III; 1) (3 III), 2) (1 III) 3
22φ 2. 1) III; 1) (3φ III), 2) (1χ' III) 3) (1 III) 4

22φ 3. 1) VI, 2) VII	1) (3 III), 2) (1 III)	4
22φ 1. 1) III	1) (3φ III), 2) (1χ′ III), 3) (1 III)	4
		15

12. Бипирамидальный вид симметрии

22χ 1. 1) III,	1) (1π III), 2) (3 III), 3) (1 III)	4
		4

14. Скаленоэдрический вид симметрии

9δ 1. 1) III,	1) (3π III), 2) (1 III), 3) (1 VI) 4) (1 VII)	5
10δ 1. 1) III;	1) (3π III), 2) (3 III), 3) (3 III)′	4
10δ 2. 1) III.	1) (3π III), 2) (3 III), 3) (1 III) 4) (1 VI), 5) (1 VII)	6
10δ 3. 1) VI, 2) VII.	1) (1π VI), 2) (1π VII), 3) (3 III) 4) (1 III)	6
12δ 1. 1) III;	1) (3π III), 2) (1 III), 3) (3 III) 4) (1 VI), 5) (1 VII)	6
		27

15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

30χ 1. 1) III	1) (22χ III), 2) (3χ III), 3) (1χ III) 4) (22 III), 5) (10 III), 6) (4 III) 7) (3 III), 8) (1 III)	9
30χ 2. 1) III	1) (4χ III), 2) (10δ III), 3) (3φ III) 4) (1χ′ III), 5) (22 III), 6) (4 III) 7) (1 III)	8
30χ 3. 1) VI, 2) VII;	1) (1π III), 2) (3π III), 3) (22 III) 4) (4 III), 5) (10 III)	7
31χ 1. 1) III:	1) (22χ III), 2) (10δ III), 3) (4χ III) 4) (4φ III), 5) (1χ′ III), 6) (22 III) 7) (4 III), 8) (1 III), 9) (10 III) 10) (3 III)	11
		35

Общая сумма 81

Гексагональная сингония

17. Дитригонально-пирамидальный вид симметрии

38φ 1. 1) IV;	нет	1
38φ′ 1. 1) IV;	1) (1 IV)	2

39φ 1. 1) III, 2) VI, 3) VII; 1) (1 IV), 2) (1 IV)′	5
	8

20. Дитригонально-бипирамидальный вид симметрии

44χ 1. 1) IV; 1) 38 IV), 2) (1χ IV), 3) (4 IV′), 4) (38 IV) 5) (4 IV′), 6) (1 IV)	7
45χ 1. 1) IV; 1) (38χ IV)	2
	9

22. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии

49φ 1. 1) IV; нет	1
	1

26. Скаленоэдрический вид симметрии

44δ 1. 1) IV; 1) 38π IV)	2
45δ 1. 1) IV; 1) (38π IV)	2
46δ 1. 1) III, 2) IV, 3) VII; нет	3
	7

27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симметрии

54χ 1. 1) IV; 1) (49χ IV), 2) (49 IV)	3
	3

Общая сумма 28.

Кубическая сингония

29. Додекаэдрический вид симметрии

59χ 1. 1) VII; нет	1
61χ 1. 1) III; нет	1
	2

30. Тетраэдрический вид симметрии

59δ 1. 1) VII; нет	1
61δ 1. 1) III; 1) (39 VI)	2
	3

32. Октаэдрический вид симметрии

68χ 1. 1) VII; нет	1

70χ 1. 1) III; 1) (39 III) 2

3

Общая сумма 8

Общая сумма возможных структурных видов, отвечающих гемисимморфным системам точек, составляет 287, из которых 100 обычных (ординарных) и 187 необычных (экстраординарных) систем.

III. Асимморфные системы

Моноклинная сингония

3. Гемипризматический безосный (сфеноидальный) вид симметрии

1. 1) (1 III), 2) (1 IV), 3) (1 III)′, 4) (1 IV)′, 5) (1 IV) 6) (1 VI), 7) (1 VI)′, 8) (1 VII), 9) (1 VII)′ 9

9

5. Призматический вид симметрии

1 (χ 1). 1) (1 III), 2) (1 IV), 3) (1χ III), 4) (1χ IV) 5) (1 χ′ III), 6) (1χ′ IV′), 7) (1 χ′ IV), 8) (1χ′ VI) 9) (1χ′ VI′), 10) (1χ′ VII), 11) (1χ′ VII) 11

1 (χ 2). 1) (1 III) 2) (1 III)′, 3) (1 III)″, 4) (1 III)‴ 5) (1 III)^{IV}, 6) (1 III)^{V}, 7) (1 IV), 8) (1 IV)′, 9) (1 IV)″, 10) (1 IV)‴ 11) (1 IV)^{IV}, 12) (1 IV)^{V} 13) (1 VI), 14) (1 VI)′, 15) (1 VI)″, 16) (1 VII) 17) (1 VII)′, 18) (1 VII)″, 19) (1π III), 20) (1π IV) 21) (1π IV)′, 22) (1π VI), 23) (1π VI)′, 24) (1π VII) 25) (1π VII)′ 25

36

Общая сумма 45

Ромбическая сингония

6. Сфеноэдрический вид симметрии

4. 1) (1 III), 2) (1 III)′ 3) (1 III)″, 4) (1 IV), 5) (1 IV)′ 6) (3 III), 7) (1 IV′), 8) (4 III), 9) (4 IV′)

5. 1) (1 III), 2) (1 III)′, 3) (1 III)″, 4) (4 III), 5) (1V′) 6) (1 IV), 7) (1 IV)′, 8) (4 IV′), 9) (4 IV), 10) (1 VI)

	11) (4 VI),	12) (1 VII),	13) (4 VII′),	14) (4 VII),	15) (4 VII′)′	15
6.	1) (1 III),	2) (1 III)′,	3) (4 III),	4) (IV),	5) (4 IV′)	
	6) (3 IV)					6
7.	1) (1 III),	2) (1 III)′,	3) (1 III)″,	4) (1 IV),	5) (1 IV)′	
	6) (1 VI),	7) (1 VII),	8) (1 VII)′,	9) (3 III),	10) (3 IV)	
	11) (4 VI′),	12) (4 VI),	13) (4 VII)			13
8.	1) (1 III),	2) (1 IV),	3) (1 IV)′,	4) (1 VI),	5) (1 VII)	5
						48

7. Пирамидальный вид симметрии

1 (φ 1).	1) (1 III),	2) (1 III)′,	3) (1 IV),	4) (1 IV)′	
	5) (1χ III),	6) (1χ III)′,	7) (1χ III)′,	8) (1χ IV)′	8
1 (φ 2).	1) (1χ′ III),	2) (1χ′ IV),	3))1χ′ IV)′,	4) (1χ′ VI′)	
	5) (1χ′ VI),	6) (1χ′ VI′),	7) (1χ′ VII)		7
1 (φ 3).	1) (1 III),	2) (1 III)′,	3) (1 III)″,	4) (1 IV), 5) (1 IV)′	5
1 (φ 4).	1) (1 III),	2) (1 IV),	3) (1 IV)′	4) (1 VI)	
	5) (1 VII),	6) (1 VI)′,	7) (1 VII)′.		
1 (φ 5).	1) (1χ′ III),	2) (1χ′ IV),	3) (1χ′ IV′),	4) (1χ′ VI)	7
				5) (1χ′ VII′)	
					34

8. Бипирамидальный вид симметрии

4 (χ 1).	1) (1χ III)	2) (1χ′ III),	3) (1χ′ IV′),	4) (1χ′ IV)	
	5) (3χ III),	6) (3φ III),	7) (4φ III),	8) (4φ IV′)	
	9) (4φ IV),	10) (3 III),	11) (1 III),	12) (1 III)′	12
4 (χ 2).	1) (1χ III),	2) (1χ III)′,	3) (1χ′ III),	4) (1χ IV)	
	5) (1χ′ IV),	6) (1χ′ IV)′,	7) (1χ′ IV′),	8) (4χ III)	
	9) (4χ IV),	10) (4χ IV′),	11) (1 III)		11
4 (χ 3).	1) (1π III),	2) (3 III),	3) (3 III)′,	4) (3 III)″	
	5) (1 III),				5
4 (χ 4).	1) (1π III),	2) (1 π IV′),	3) (1π IV),	4) (4 III)	
	5) (4 III′),	6) (4 IV),	7) (4 IV),	8) (4 IV)′	
	9) (4 IV′)′				9
5 (χ 1)	1) (1χ′ III),	2) (1 χ′ IV),	3) (1χ′ IV′),	4) (1χ III)	
	5) (1χ III)′,	6) (1χ′ III),	7) (1χ′IV′),	8) (1χ′ IV)	
	9) (4χ III),	10) (4φ III)	11) (4χ IV′),	12) (4φ IV)	
	13) (4χ IV),	14) (4φ IV),	15) (4φ″ VI),	16) (4φ″ VII′)	
	17) (4φ″VII),	18) (4φ″VII′),	19) (4 VI),	20) (4 VI′)	
	21) (4 VII),	22) (4 VII′)	23) (1 III)		23
5 (χ 2).	1) (1 III),	2) (1χ III),	3) (1χ III)′,	4) (1χ′ III)	
	5) (1χ IV),	6) (1χ′ IV),	7) (1χ IV′),	8) (1χ′ IV′)	

	9) (1χ′ VI),	10) (1χ′ VII),	11) (1π III),	12) (4χ VI)	
	13) (4χ VII′),	14) (4χ VII),	15) (4χ VII′)′		15
6 (χ 1).	1) (1χ III),	2) (4φ III),	3) (4χ III),	4) (4φ IV)	
	5) (4χ IV′),	6) (4φ IV′),	7) (4χ IV),	8) (1χ′ III)	
	9) (1χ′ IV)	10) (1χ′ IV′),	11) (1 III),	12) (1 III)	12
6 (χ 2).	1) (1 III),	2) (1π III)			2
7 (χ 1).	1) (1χ III),	2) (1χ III)′,	3) (3χ III),	4) (3χ IV)	
	5) (1 III)	6) (3 III),	7) (4 IV),	8) (4 IV′)	8
7 (χ 2)	1) (1χ III),	2) (1χ III),	3) (1π III),	4) (1χ III)′	
	5) (1χ III)″,	6) (1χ IV),	7) (1χ IV)′,	8) (1χ′ VI)	
	9) (1χ′VII′),	10) (1χ′VII′)′,	11) (4 III).	12) (4 IV)	
	13) (3 IV)′,	14) (3 III).	15) (4 III)′,	16) (4 IV′)′	
	17) (4 IV)′,	18) (1 III)			18
7 (χ 3).	1) (1π III),	2) (1χ III),	3) (1χ′ III),	4) (1χ′ IV)	
	5) (1χ′ IV′),	6) (3φ III),	7) (3φ′ IV),	8) (4φ′ VI′)	
	9) (4φ′ VI),	10) (4φ′ VII)			10
7 (χ 4).	1) (1χ′ III),	2) (1χ′ IV′),	3) (1χ′ IV),	4) (1χ′ VI)	
	5) (1χ′ VII),	6) (1χ′ VII′),	7) (4χ VI′),	8) (4χ VI)	
	9) (4χ VII),	10) (1 III),	11) (1 III)′		11
7 (χ 5).	1) (1 III),	2) (4 III),	3) (4 IV),	4) (4 IV′)	
	5) (3 III),	6) (1π III),	7) (1π IV).	8) (1π IV)′	
	9) (4 VI),	10) (4 VII)			10
7 (χ 6).	1) (1π VI),	2) (1π VII).	3) (1π VII)′,	4) (4 VI′)	
	5) (4 VII),	6) (1 III)			6
8 (χ 1).	1) (1π III),	2) (1χ III).	3) (1χ IV).	4) (1π IV)′	
	5) (1χ IV)′,	6) (1π IV),	7) (1χ′ VI),	8) (1χ′ VII)	
	9) (1 III),	10) (1 IV′),	11) (1 IV)′	12) (1χ′ III)	
	13) (1χ′ III)′,	14) (1χ′ IV),	15) (1χ′ IV′),	16) (1χ′ IV)′	
	17) (1χ′ VI′)′,	18) (1χ′ VI′),	19) (1χ′ VI′)′,	20) (1χ′ VII)′	
	21) (1 III),	22) (1 III)′,	23) (1 III)″,	24) (1 IV)	
	25) (1 III)				25
9 (χ 2).	1) (1 III),	2) (1 III)′,	3) (1 III)″		3
					180

Общая сумма 262

Тетрагональная сингония

9. Пирамидальный вид симметрии

30.	1) (1 III),	2) (1 VI),	3) (1 VII)	3
31.	1) (1 III),	2) (1 VI),	3) (1 VII)	3

32.	1) (1 III), 2) (1 III)′	2
33.	1) (3 III). 2) (1 VI), 3) 1 VII)	3
		11

11. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии

32 (φ 1).	1) (1 III),	1
32 (φ 2).	1) (1 III), 2) (1 VI), 3) (1 VII)	3
33 (φ 1).	1) (3φ III), 2) (1 III),	2
33 (φ 2).	1) (3φ′ III), 2) (1χ′ VI′), 3) (1χ′ VII) 4) (3 III)	4
33 (φ 3).	1) (1χ′VI′), 2) (1χ′ VII), 3) (3 III)	3
33 (φ 4).	1) (3 III), 2) (1 III),	2
		15

12. Бипирамидальный вид симметрии

32 (χ 1).	1) (1 III), 2) (1 III)′ 3) (3 VI), 4) (3 VII)	4
33 (χ 1).	1) (3χ III), 2) (3 III), 3) (1χ VI), 4) (1χ VII)	4
33 (χ 2).	1) (1π VI), 2) (1π VII), 3) (3 III),	3
		11

13. Трапецоэдрический вид симметрии

43.	1) (22 III), 2) (4 III), 3) (9 III), 4) (1 III) 5) (3 III),	5
44.	1) (3 III), 2) (4 III), 3) (4 VI′), 4) 4 VII) 5) (1 VI), 6) (1 VII),	6
45.	1) (3 III), 2) (4 III), 3) (4 VI), 4) (4 VII′) 5) (1 VI), 6) (1 VII),	6
46.	1) (3 III), 2) (4 III), 3) (3 III), 4) (4 III)′ 5) (11 VI), 6) (11 VII), 7) (1 VI), 8) (1 VII)	8
47.	1) (1 III), 2) (10 III), 3) (9 III), 4) (3 III) 5) (4 VI′), 6) (4 VII). 7) (11 VI), 8) (11 VII)	8
48.	1) (1 III), 2) (1 III)′, 3) (4 VI′), 4) (4 VII) 5) (1 VI), 6) (1 VII),	6
49.	1) (1 III), 2) (1 III)′, 3) (4 VI′), 4) (4 VII) 5) (1 VI), 6) (1 VII),	6
50.	1) (3 III), 2) (1 III), 3) (3 III)′ 4) (3 III)″ 5) (1 VI′), 6) (4 VII), 7) (12 VI), 8) (12 VII)	8
		53

14. Скаленоэдрический вид симметрии

51	1) (3 III), 2) (3 III)′, 3) (3 III)″, 4) (1 III) 5) (4 VI′), 6) (4 VII), 7) (12 VI), 8) (12 VII)	8

7δ 1.	1) (1 χ′ III),	2) (1χ′ VI′),	3) (1χ′ VII),	4) (10 χ III)	
	5) (3π III),	6) (3 III),			6
7δ 2.	1) (3 III),	2) (3 III)′	3) (3 III)″,	4) (4 VI′)	
	5) (4 VII),	6) (12 VI),	7) (12 VII),	8) (1 III)	8
					22

15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

43 (χ 1).	1) (4φ III),	2) (1χ III),	3) (9χ III),	4) (3χ III)	
	5) (22χ III),	6) (22 III),			6
43 (χ 2).	1) (22φ III),	2) (4χ III),	3) (1χ′ III),	4) (9δ III)	
	5) (3φ′ III),				5
43 (χ 3).	1) (3χ III),	2) (1χ III),	3) (22 III),	4) (9 III)	
	5) (4 III),				5
43 (χ 4).	1) (22 III),	2) (4 III),	3) (3 III),	4) (1π III)	4
46 (χ 1).	1) (3 III),	2) (3 III)′,	3) (4 III),	4) (1 III)	
	5) (1π VI),	6) (1π VII).			6
46 (χ 2).	1) (4φ″ VI),	2) (4φ″ VII),	3) (1χ′ VI′),	4) (1χ′ VII)	
	5) (3 III),	6) (4 III),			
47 (χ 1).	1) (9χ III),	2) (10δ III),	3) (1χ III),	4) (11χ′ VI′)	
	5) (11χ′ VII),	6) (4 III),	7) (1 III),		7
47 (χ 2).	1) (9δ III),	2) (10χ III),	3) (1χ′ III),	4) (φ′ VI′)	
	5) (4φ′ VII),	6) (3 III).	7) (3χ III),	8) (1 III)	8
47 (χ 3).	1) (1χ′ III),	2) (3φ III),	3) (11δ VI),	4) (11δ VII),	
	5) (4φ′ VI′),	6) (4φ′ VII),	7) (10 III),	8) (9 III)	
	9) (3 III),				9
47 (χ 4).	1) (1π III),	2) (3π III),	3) (22 III),	4) (4 III)	4
50 (χ 1).	1) (3χ III),	2) (3φ III),	3) (1π III),	4) (12χ VI)	
	5) (12χ VII),	6) (4φ′ VI′),	7) (4φ′ VII),	8) (3π III)	8
50 (χ 2).	1) 3φ III),	2) (3φ III)′,	3) (1χ′ III),	4) (3π III)	
	5) (4χ VI′),	6) (4χ VII),			6
50 (χ 3).	1) (3χ III),	2) (3π III),	3) (3χ III)′	4) (1χ III)	4
50 (χ 4).	1) (3φ′ III),	2) (3φ′ III)′,	3) (3φ′ III)″,	4) (12δ VI)	
	5) (12δ VII),	6) (1π III),			6
					84

Общая сумма 196

Гексагональная сингония

16. Тригонально-пирамидальный вид симметрии

68. 1) (1 IV) 1

27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симметрии

86. (χ 1) 1) 45χ IV)

69. 1) (1 IV) 1

2

86. (χ 2) 2) (44χ IV) 1

2

Общая сумма 24

Кубическая сингония

19. Тригонально-трапецоэдрический вид симметрии

70. 1) (4 IV) 1
71. 1) (4 IV) 1
72. 1) (4 IV') 1
73. 1) (4 IV') 1

4

28. Тетраэдрический вид симметрии

89. 1) (39 IV) 1
90. 1) (39 III) 1

2

21. Гексагонально-пирамидальный вид симметрии

74. 1) (1 IV) 1
75. 1) (1 IV) 1
76. 1) (3 IV) 1
77. 1) (3 IV) 1
78. 1) (38 IV) 1

5

29. Додекаэдрический вид симметрии

89 (χ 1). 1) (39 III) 1
90 (χ 1). 1) (39π III) 1

2

22. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии

78 (φ 1). 1) (38φ IV) 1
78 (φ 2). 1) (38φ' IV) 1

2

30. Тетраэдрический вид симметрии

90 (δ 1). Нет —

24. Гексагонально-бипирамидальный вид симметрии

78 (χ 1). 1) (38χ IV) 1

1

31. Гидроэдрический вид симметрии

94. Нет —
95. Нет —
96. 1) (39 VII) 1
97. 1) (60 VII), 2) (39 VI) 2
98. 1) (60 VII), 2) (46 VI) 2

5

25. Гексагонально-трапецоэдрический вид симметрии		**32. Октаэдрический вид симметрии**	
82. 1) (4 IV), 2) (4 IV′)	2	96 (χ 1). 1) (39π VII)	1
83. 1) (4 IV), 2) (4 IV′)	2	97 (χ 1). 1) (60δ VII)	1
84. 1) (10 IV)	1	97 (χ 2). 1) (39δ VI)	1
85. 1) (10 IV)	1	98 (χ 1). 1) (60χ VII), 2) (46 III)	2
86. 1) (44 IV), 2) (45 IV)	2	98 (χ 2). 1) (60δ VII), 2) (46δ VI)	2
	8		7

Общая сумма 16
Общее число всех симморфных систем 543
Общее число всех возможных родов структур 1182

Далее следует таблица, из которой можно увидеть число возможных видов структур, принадлежащих каждому роду симметрии.

Таблица возможных видов структур, принадлежащих каждому виду симметрии

Триклинная сингония

	Симморфные		Гемисимморфные		Асимморфные	
	Обычн.	Необычн	Обычн.	Необычн.	Обычн.	Необычн.
1. Гемипинакоидальный вид симм. . .	4	—	—	—	—	4
2. Пинакоидальный вид симм.	4	10	—	—	—	14
	8	10	—	—	—	18

Моноклинная сингония

3. Гемипризматический осевой вид симм....	9	16	—	—	9	34
4. Гемипризматический безосный вид симм..	9	5	12	—	—	26
5. Призматический вид симм	9	36	12	16	36	109
	27	57	24	16	45	169

Ромбическая сингония

6. Сфеноэдрический вид симм.	7	17	—	—	48	72
7. Пирамидальный вид симм.	12	17	27	48	34	138
8. Бипирамидальный вид симм.	7	19	12	43	180	261
	26	53	39	94	262	471

Тетрагональная сингония

9. Пирамидальный вид симм.	3	4	—	—	11	18
10. Дитетрагонально-пирамидальный вид симм.	3	4	5	10	15	37
11. Сфеноэдрический вид симм.	3	19	—	—	—	12
12. Дипирамидальный вид симм.	3	11	1	3	11	29
13. Трапецоэдрический вид симм.	3	11	—	—	53	67
14. Скаленоэдрический вид симм.	6	18	6	21	22	73
15. Дитетрагонально-дипирамидальный вид симм	3	11	5	30	84	143
	24	68	17	64	196	369

Гексагональная сингония

16. Тригонально-пирамидальный вид симм. .	4	3	—	—	2	9
17. Дитригонально-пирамидальный вид симм.	5	1	5	3	—	14
18. Тригонально-бипирамидальный вид симм	1	3	—	—	—	4
19. Тригонально - трапецоэдрический вид симм.	5	8	—	—	4	17
20. Дитригонально-бипирамидальный вид симм.	2	4	2	7	—	15
21. Гексагонально-пирамидальный вид симм.	1	—	—	—	5	6
22. Дигексагонально-пирамидальный вид симм.	1	—	1	—	2	4
23. Ромбоэдрический вид симм.	4	4	—	—		8
24. Гексагонально-бипирамидальный вид симм.	1	1	—	—	1	3
25. Гексагонально-трапецоэдрический вид симм.	1	1	—	—	8	10
26. Гексагонально-скаленоэдрический вид симм.	5	2	3	2	—	14
27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симм.	1	1	1	2	2	7
	31	28	14	14	24	111

Кубическая сингония

28. Тетартоэдрический вид симм.	3	1	—	—	2	6
29. Додекаэдрический » »	3	1	2	—	2	8
30. Тетраэдрический » »	3	1	2	1	—	7
31. Гидроэдрический » »	3	1	—	—	5	9
32. Октаэдрический » »	3	1	2	1	7	14
	15	5	6	2	16	44
Общая сумма	131	221	100	187	543	1182

Из вышеприведенных таблиц очень отчетливо видно разделение видов структур по системам точек и видам симметрии. Далее из них выясняется, что имеются системы точек (а именно $4\varphi''1$, $12\chi1$, $90(\delta1)$, 94 а и 95 а), которым не отвечают никакие возможные виды структур. Ни один природный кристалл не может образоваться по законам, соответствующим этим системам. Из этого, в первую очередь, видно, насколько существенна разница между теорией кристаллических структур, изложенной сейчас, и теми воззрениями, которые рассматривали ранее правильные системы точек как виды структур.

Общий вывод заключается в том, что при образовании кристаллического вещества с большой строгостью проявляется тенденция, по которой элементарные частицы размещаются в параллельной ориентировке. Нельзя указать a priori, являются ли при этом все частицы идентичными (что следует лишь из существования симморфных систем), или одни частицы по отношению к другим относятся прямо симметрично. Опубликованные автором исследования в 1891 г. показали на целом ряде кристаллов, что действительно очень часто кристаллическое вещество состоит из двух различных сортов элементарных частиц и что таким образом в природных кристаллических постройках действительно представлены гемисимморфные системы параллелоэдров. Об этом будет подробнее сказано в дальнейшей части этой работы.

Теперь же можно с удовлетворением констатировать, что все виды структур можно расчленить на вероятные и невозможные. К первым относятся все обычные (ординарные), отвечающие симморфным и гемисимморфным системам точек, системы, число которых равно 131 + 100 = 231. К этим системам должны быть еще добавлены 10 + 5 = 15 симморфных необычных (экстраординарных) систем, принадлежащих к пинакоидальному и гемипризматическому безосному видам симметрии, так как они также состоят из двух сортов элементарных частиц и не связаны друг с другом никаким вращательным (или винтовым) движением. Таким образом для количества возможных видов структур может быть указано число 246, т. е. очень близкое к числу правильных систем точек, из которых здесь представлены только 125. Все остальные виды структур невозможны.

Мы, конечно, не собираемся никоим образом довольствоваться только утверждением этого, еще строго не доказанного воззрения о возможных и невозможных видах структур. Наоборот, мы в последующем обратимся к опытам, чтобы доказать, что действительно в природе не имеется представителей невозможных видов структур. Автором уже было отмечено несколько лет назад, что по очень простым причинам в природе можно видеть кристаллы только с возможными видами структур, причем все кристаллы указывают нам такие признаки, которые подходят только к возможным видам структур. Согласно этому я особенно заострил внимание на том, чтобы при нахождении возможных видов структур не совершить ошибки, так как время, бывшее в моем распоряжении, было слишком мало́, чтобы быть убежденным в правильности вывода всех остальных систем.

Я вовсе не обольщаю себя иллюзией, что представление о параллельном расположении элементарных кристаллических частиц, на котором покоится подразделение видов структур на возможные и невозможные, получит с самого начала общее признание, так как большинство авторов имеет

понятия о кристаллической структуре, прямо противоречащие моему воззрению.

Думают даже, что непараллельностью частиц можно объяснить целый ряд явлений и в первую очередь вращающую способность. В основе таких высказываний лежат, как я уже отметил несколько лет назад, ложные представления.

Первопричиной для этих мнений служило наблюдение, что существует много (ранее обозначавшихся анормальными) кристаллов высших видов сингоний, маленькие частицы которых обнаруживают более низкую сингонию. Здесь не имеет смысла подробно разбирать эти явления. С самого начала, однако, ясно, что наблюдающиеся маленькие частицы с определенной сингонией можно себе одинаково хорошо представить составленными как из разнообразно расположенных частиц, так и из частиц, расположенных параллельно. Вопрос остается открытым до тех пор, пока исследования, о которых некоторые авторы даже и не думают, определенно не ответят на него.

Если мы захотим, как это многими авторами принимается, увидеть в таком незакономерно образованном кристаллическом веществе прототип, по которому все высшие виды сингоний (или симметрии) образуются из незакономерного смешения различно ориентированных элементарных кристаллических частиц, то это будет не более как априорное непризнание любой теории структуры кристаллов, априорное и притом беспочвенное непризнание любой закономерности в кристаллообразовании. Закономерность есть простота; если мы ее отвергнем, то необходимо сперва строго доказать отсутствие этой закономерности. Только тогда мы будем иметь право считать неверной любую теорию структуры кристаллов.

Я упомянул, что многие авторы даже видят в непараллельной ориентировке (винтовое расположение) важный теоретический факт.

Проводя аналогию между кристаллическим веществом, обладающим винтовыми осями, и винтообразно расположен-

ными друг над другом кристаллическими пластинками, пытались в этом видеть причину наблюдающегося в различных кристаллах оптического вращения. Я, однако, считаю этот аргумент несостоятельным, так как вышеупомянутая аналогия является ложной.[1] Пользуясь ей, легко притти строго логическим путем к невозможным заключениям.

Кроме того, легко видеть, что с одной стороны существуют оптически вращающие кристаллы, как, например, тетрагональной и кубической сингоний, в основу которых нельзя положить правильные системы точек с винтовыми осями. А именно наличие последних и должно было бы по аналогии объяснить вращательную способность. С другой стороны, часто имеются тройные винтовые оси в таких видах симметрии (а также во всех видах симметрии кубической сингонии), в которых не может быть и речи об оптическом вращении.

Вместе с тем при принятии указанной аналогии здесь обязательно должно было бы быть оптическое вращение.

Представление о непараллельном расположении элементарных кристаллических частиц пустило настолько глубокие корни в трудах некоторых авторов, что я даже опасаюсь как бы существование асимморфных родов структур, поскольку их можно вывести непосредственно геометрическим путем, будет с этой стороны рассматриваться как подтверждение таких воззрений. Но чтобы с самого начала предупредить подобное неправильное заключение, достаточно сослаться на то, что при принятии невозможных родов структур, кристаллические постройки (например, принадлежащие к кубической сингонии) обязательно должны содержать только одноосные элементарные кристаллические частицы. Вместе с тем теоретические воззрения, о которых идет речь, основываются на наличии двуосных частиц, а также

[1] Заметка об успехах теоретической кристаллографии за последнее десятилетие. Зап. Мин. общ. т. XXVI.

на искусственном вращении, полученном с помощью накладывания двуосных кристаллических пластинок.

Этим мы заканчиваем первую часть.

ДОПОЛНЕНИЕ

1. *О кристаллографической номенклатуре*

Мне доставило большое удовлетворение то обстоятельство, что в недавно появившейся книге „Physikalische Krystallographie“ таким крупным специалистом, как проф. П. Грот, принята кристаллографическая номенклатура, вполне согласующаяся с той, которая употреблялась мною уже несколько лет во всех моих работах. Появление этой книги является для меня лучшим доказательством того, что я стоял на правильном пути. Все совпавшее у нас обоих будет рассматриваться как не вызывающее сомнения в верности результатов.

Только очень небольшое число вновь введенных названий П. Грота не совпадает с предложенными мною. Теперь я хочу рассмотреть вопрос, находится ли автор указанной книги на правильном пути, когда он заменяет предложенные мною обозначения новыми.

Прежде всего мне кажется, что неприемлемы все те предложенные П. Гротом наименования, которые не являются существенно новыми, но употреблялись раньше совсем в другом смысле. Сюда относятся слова „сфеноид“ и „бисфеноид“.[1] Если эти названия будут далее употребляться, то мы долгое время будем находиться в неизвестности, в каком смысле они употребляются — старом или новом. Для бисфеноида нужно придумать новое название.

Одна и та же форма, которая мной называлась „геми-

---

[1] Под „дисфеноидом“ в „Началах учения о фигурах“ подразумевается такой полиэдр, шесть вершин которого представляют середины ребер сфеноида В этом смысле это слово употребляется в целом ряде теорем. Кроме того, с давних времен словами „гексаид“, „октаид“ и т. п. обозначали обычно полиэдры с неравными гранями. Сюда, конечно, должно относиться и слово „сфеноид“.

призмой“ (согласно старому употреблению), обозначается теперь П. Гротом двумя словами: с одной стороны „сфеноидом“, а с другой — „домой“. Мне кажется, что здесь совершена ошибка, которая аналогична различным ошибкам, допущенным Науманном.[1]

Также название „асимметричный“ вид симметрии („класс“ по Гроту), кажется мне неприемлемым из-за его двойственности. При употреблении последнего мы долго будем пребывать в неизвестности, о чем идет речь — о пинакоидальном или гемипинакоидальном виде симметрии.

Если проф. П. Грот имеет рациональное основание отбросить такие слова, как „гемипинакоид“, „гемипризма“, „тетартоэдр“, то не следует забывать, что эти наименования очень старые и представляют общепонятные названия, возникшие исторически. Их грамматическое образование оставляет желать лучшего, но они очень близки старым словам и поэтому очень легко воспринимаются. Разумеется, что я стою на стороне отбрасывания старых иррациональных названий и принятия новых — рациональных.

2. Сопоставление ранее принятых обозначений для двойных систем точек с вновь введенными для них символами

Симморфн. виды симметрии		Гемисимморфн. виды симметрии		Асимморфн. виды симметрии	

Триклинная сингония

2. Пинакоидальный вид симметрии

2	1π	—	—	—	—

[1]) Если П. Грот под ними понимает не чистые „формы“, а „фигуры“ (см. примечания, стр. 549), то тогда формы остаются без названий. Но там, где кристаллография основывается на чисто геометрических понятиях, как в данном случае, следует сперва принимать во внимание чистые формы. Только после их подразделения на виды симметрии, учитывается их „содержание“.

Симморфн. виды симметрии		Гемисимморфн. виды симметрии		Асимморфн. виды симметрии	

Моноклинная сингония

4. Гемипризматический безосный вид симметрии

5	1χ	1	1χ 1	—	—
6	1χ′	2	1χ′ 1	—	—

5. Ромбопризматический вид симметрии

7	3χ	3	3χ 1	2	1 (χ1)
8	4χ	4	4χ 1	3	1 (χ2)

Ромбическая сингония

7. Ромбопирамидальный вид симметрии

13	3φ	5	3φ 1	9	1 (φ 1)
		6	3φ 2	10	1 (φ 2)
		7	3φ 3	11	1 (φ 3)
		8	3φ 4	12	1 (φ 4)
		9	3φ 5	13	1 (φ 5)
14	3φ′	10	3φ′ 1		
15	4φ	11	4φ 1		
		12	4φ 2		
		13	4φ 3		
16	4φ′	14	4φ′ 1		
		15	4φ′ 2		
17	4φ″	16	4φ″ 1		

8. Ромбобипирамидальный вид симметрии

18	9χ	17	9χ 1	14	4 (χ 1)
		18	9χ 2	15	4 (χ 2)
		19	9χ 3	16	4 (χ 3)
19	10χ	20	10χ 1	17	4 (χ 4)
		21	10χ 2	18	5 (χ 1)
		22	10χ 3	19	5 (χ 2)
20	11χ	23	11χ 1	20	6 (χ 1)
21	12χ	24	12χ 1	21	6 (χ 2)
				22	7 (χ 1)
				23	7 (χ 2)
				24	7 (χ 3)
				25	7 (χ 4)
				26	7 (χ 5)
				27	7 (χ 6)
				28	8 (χ 1)
				29	8 (χ 2)

Симморфн. виды симметрии	Гемисимморфн. виды симметрии	Асимморфн. виды симметрии

Тетрагональная сингония

10. Дитетрагонально-пирамидальный вид симметрии

24 22φ	25 22φ 1	34 32 (φ 1)
	26 22φ 2	35 32 (φ 2)
	27 22φ 3	36 33 (φ 1)
		37 33 (φ 2)
25 23φ	28 23φ 1	38 33 (φ 3)
		39 33 (φ 4)

11. Сфеноэдрический вид симметрии

26 3π	— —	— —
27 4π	— —	— —

12. Бипирамидальный вид симметрии

28 22χ	29 22χ 1	40 32 (χ 1)
29 23χ		41 33 (χ 1)
		42 33 (χ 2)

14. Скаленоэдрический вид симметрии

32 9δ	30 9δ 1	51 6 (δ 1)
33 10δ	31 10δ 1	52 7 (δ 1)
	32 10δ 2	53 7 (δ 2)
	33 10δ 3	
34 11δ		
35 12δ	34 12δ 1	

15. Дитетрагонально-бипирамидальный вид симметрии

36 30χ	35 30χ 1	54 43 (χ 1)
	36 30χ 2	55 43 (χ 2)
	37 30χ 3	56 43 (χ 3)
37 31γ	38 31χ 1	57 43 (χ 4)
		58 46 (χ 1)
		59 46 (χ 2)
		60 47 (χ 1)
		61 47 (χ 2)
		62 47 (χ 3)
		63 47 (χ 4)
		64 50 (χ 1)
		65 50 (χ 2)
		66 50 (χ 3)
		67 50 (χ 4)

Симморфн. виды симметрии	Гемисимморфн. виды симметрии	Асимморфн. виды симметрии

Гексагональная сингония

17. Дитригонально-пирамидальный вид симметрии

40 38φ	39 38φ 1	
41 38φ′	40 38φ′ 1	— —
42 39φ	41 39φ 1	

18. Тригонально-бипирамидальный вид симметрии

43 38χ	— —	— —

20. Дитригонально-бипирамидальный вид симметрии

47 44χ	42 44χ 1	— —
48 45χ	43 45χ 1	

22. Дигексагонально-пирамидальный вид симметрии

50 49φ	44 49φ 1	79 78 (φ 1)
		80 78 (φ 2)

23. Ромбоэдрический вид симметрии

51 38π	— —	— —
52 39π		

24. Гексагонально-бипирамидальный вид симметрии

53 49χ	—	81 78 (χ 1)

26. Гексагонально-скаленоэдрический вид симметрии

55 44δ	45 44δ 1	
56 45δ	46 45δ 1	— —
57 46δ	47 46δ 1	

27. Дигексагонально-бипирамидальный вид симметрии

58 54χ	48 54χ 1	87 86 (χ 1)
		88 86 (χ 2)

Кубическая сингония

29. Додекаэдрический вид симметрии

62 59χ	49 59χ 1	91 89 (χ 1)
63 60χ		92 90 (χ 1)
64 61χ	50 61χ 1	

30. Тетраэдрический вид симметрии

65	59δ	51 59δ 1		93	90 (δ 1)
66	60δ				
67	61δ	52 61δ 1			

32. Октаэдрический вид симметрии

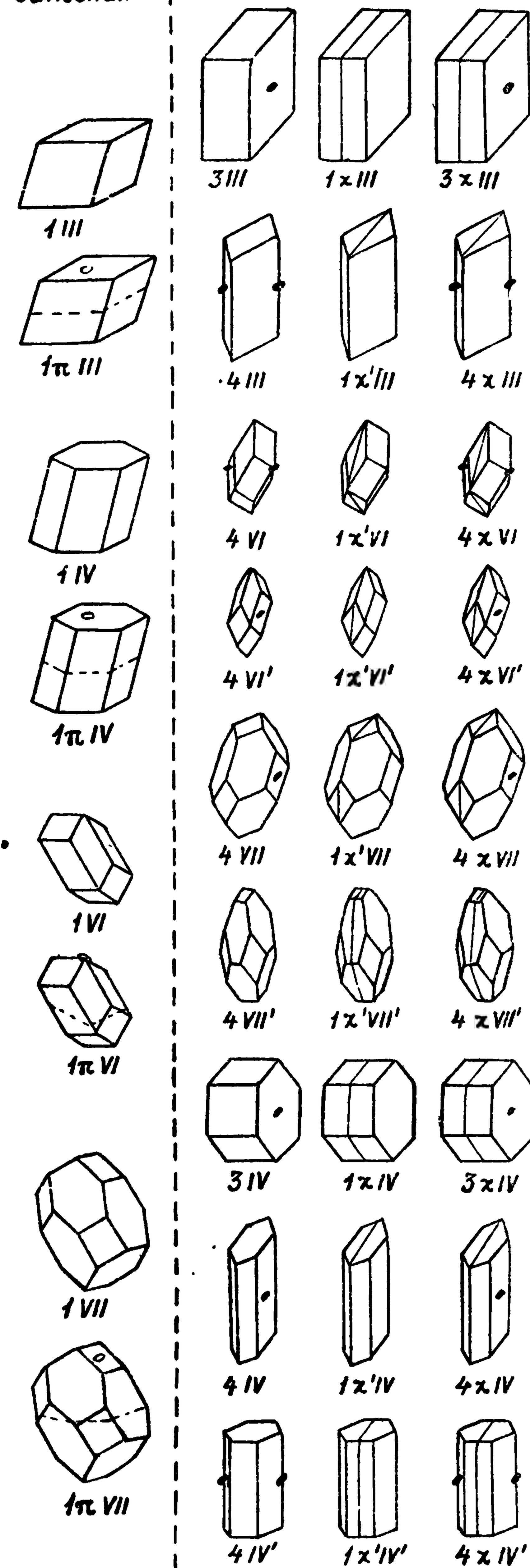
71	68χ	53 68χ 1		99	96 (χ 1)
72	69χ			100	97 (χ 1)
73	70χ	54 70χ 1		101	97 (χ 2)
				102	98 (χ 1)
				103	98 (χ 2)

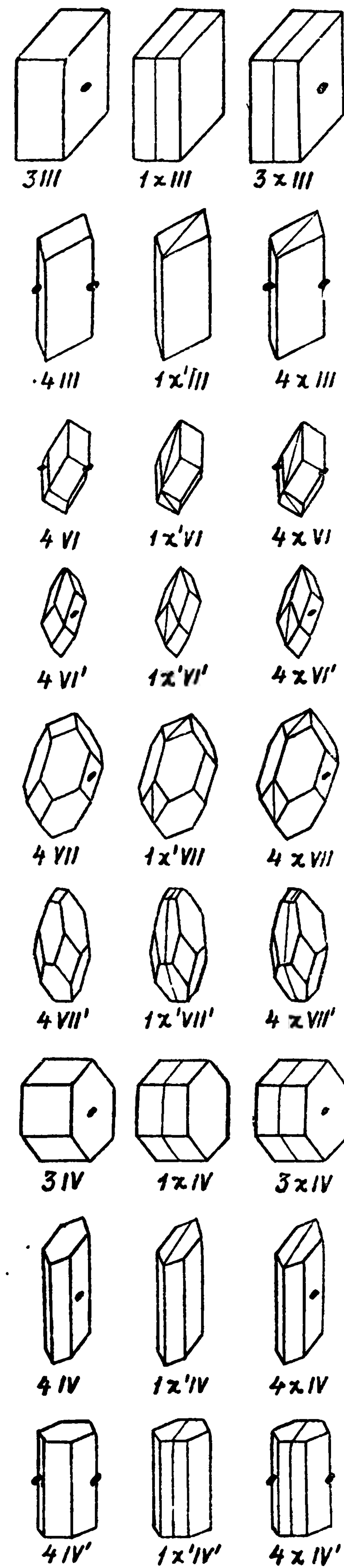
Объяснение таблицы-вклейки

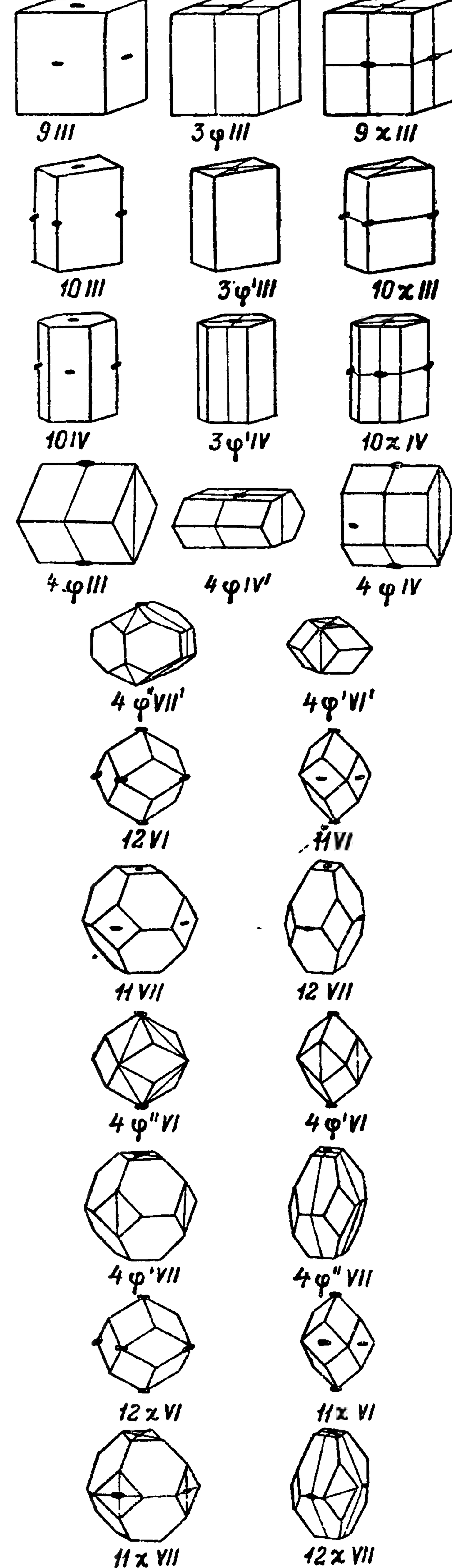
В таблице даны все нормальные симморфные системы параллелоэдров, все элементарные ячейки которых параллельно ориентированы. Для полной графической определенности и наглядности вполне достаточно дать форму элементарного участка пространства и положение элементов симметрии (которые все проходят через центр симметрии, являющийся одновременно и центром элементарной ячейки). Чтобы наглядно представить последние, достаточно обозначить соответствующими значками точки, в которых ось симметрии (или ось сложной симметрии) пересекает поверхность, и провести прямые, по которым плоскость симметрии пересекает ту же поверхность.

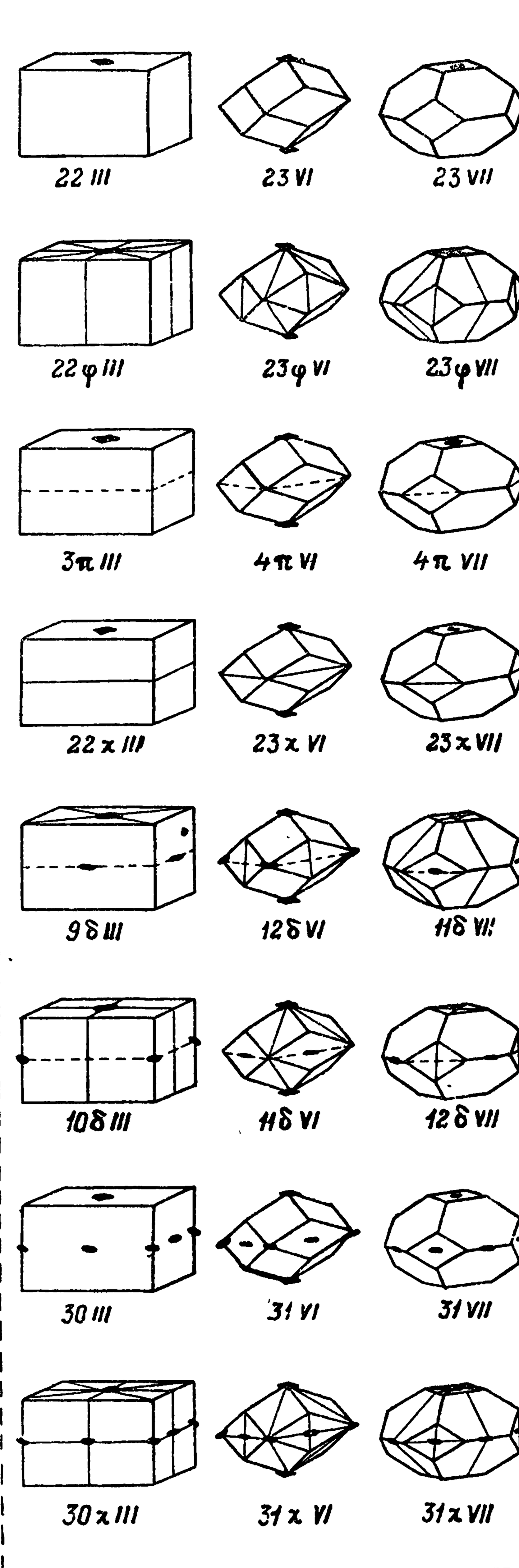
Объяснение принятых значков дано в Введении к этой работе.

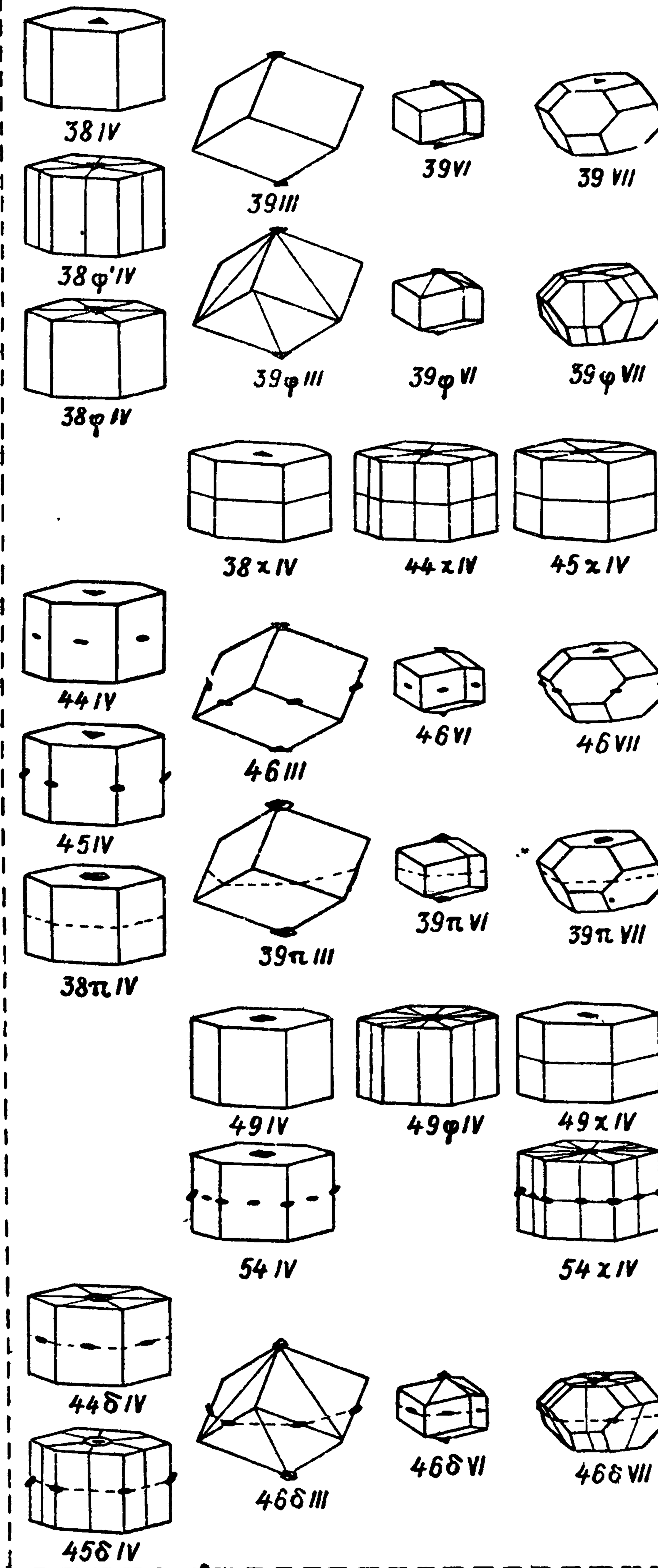
Каждой элементарной ячейке придан свой символ.

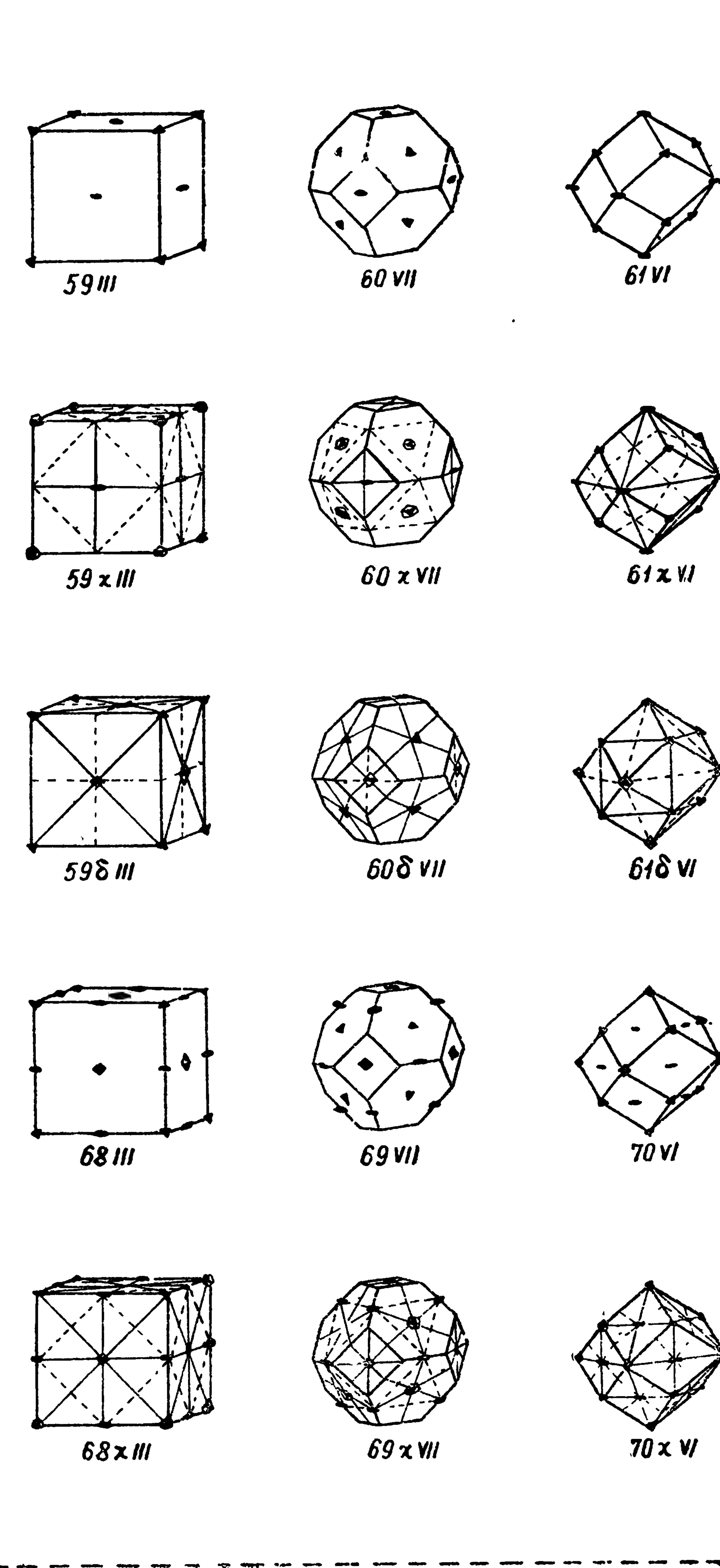

Триклинная сингония
1 III
1π III
1 IV
1π IV
1 VI
1π VI
1 VII
1π VII




Моноклинная сингония


Ромбическая сингония


Тетрагональная сингония
Гексагональная сингония


Кубическая сингония
59 III
60 VII
61 VI
59 x III
60 x VII
61 x VI
59δ III
60δ VII
61δ VI
68 III
69 VII
70 VI
68 x III
69 x VII
70 x VI

ПРИЛОЖЕНИЯ



ЕВГРАФ СТЕПАНОВИЧ ФЕДОРОВ

Жизнь и творчество

Евграф Степанович Федоров родился в Оренбурге 10 декабря 1853 г. Вскоре после его рождения семья Федоровых переехала в Петербург. Отца своего, служившего генерал-майором инженерных войск, Е. С. потерял в 1866 г.

Огромное влияние на развитие ученого оказала мать его Юлия Герасимовна, урожденная Ботвинко. Под ее руководством Е. С. с ранних лет пристрастился к чтению. Горячо любя своих детей, Юлия Герасимовна вместе с тем строго следила за их воспитанием, приучая к труду и дисциплине. Впоследствии Е. С. утверждал, что своей исключительной работоспособностью он целиком обязан матери.

Математические способности будущего ученого развились очень рано: уже в пятилетнем возрасте он хорошо владел арифметическими правилами. В семь лет Е. С. с увлечением проштудировал от начала до конца в два дня учебник элементарной геометрии Шульгина. По его собственным словам, содержание первых же страниц учебника вызвало „такое созвучие его психики, что он был, буквально, увлечен“.

В 1862 г., в возрасте десяти лет Федоров поступает во второй класс Анненского реформатского училища.

После смерти отца, в 1866 г., в связи со стесненными материальными условиями, ему приходится перейти на казенный счет во Вторую военную гимназию. Здесь он примыкает к небольшой группе товарищей, усиленно изучавших естествознание и философию. В то же время Е. С. самостоятельно углубляется в математические дисциплины, которые по его собственным словам были всегда „облечены в его представлении ореолом особой красоты“.

В 1869 г., не дожидаясь окончания гимназии, он блестяще выдерживает конкурсный экзамен в Петербургское военное инженерное училище. Обширные познания Е. С. настолько поразили экзаминаторов, что его приняли в училище, хотя он еще и не достиг требуемых по уставу шестнадцати лет.

В Военном училище будущий ученый особенно увлекается математикой. В то же время он становится деятельным участником одного из нелегальных кружков самообразования, члены которого под влиянием сочинений Писарева жадно изучали труды материалистов-естественников.

В 1872 г. Е. С. заканчивает курс училища и в чине подпоручика саперного батальона уезжает служить на Украину, однако уже в следующем году возвращается в Петербург, а в 1874 г. вовсе увольняется с военной службы. В результате увлечения естественными науками, столь характерного для передовой молодежи того времени, Е. С. становится вольнослушателем Военной медико-хирургической академии. Однако стать студентом-медиком ему не удалось, в связи с появлением циркуляра министра просвещения, требовавшего при поступлении в Медицинскую академию представления аттестата зрелости. Тем самым Федоров, как не окончивший классической гимназии, лишался права быть студентом Академии. Сдав соответствующие экзамены, Е. С. поступает на второй курс Технологического института, где основное внимание уделяет изучению физики и химии. Выполнив до конца лабораторные работы, он оставляет институт. Уже к этому времени все его помыслы и интере-

сы направляются в сторону теоретических проблем в области математики. В то же время он увлекается революционной деятельностью и в 1876 г. становится членом народнической партии „Земля и Воля“. В 1877 г. Е. С. получает задание от партии наладить связь с заграничными революционными организациями и объезжает с этой целью Францию, Бельгию и Германию, работая наборщиком в типографии, носильщиком на железной дороге и даже молотобойцем в кузнице. По возвращении на родину он женится на Людмиле Васильевне Панютиной, самоотверженно помогавшей ему в его научной и революционной деятельности. (После смерти Е. С., Людмила Васильевна написала свои интереснейшие воспоминания, которые сейчас подготавливаются к печати).

В квартире Федоровых организуется подпольная типография, где печатается нелегальная газета „Начало“, впоследствии переименованная в „Землю и Волю“. Позднее, под влиянием усвоенных им социал-демократических идей, Е. С. отходит от народников. К этому периоду относятся его усиленные занятия геометрией, в результате которых была написана большая монография — „Начала учения о фигурах“. Эта первая крупная научная работа Федорова уже касается ряда вопросов по симметрии и теории кристаллического строения, впоследствии подробно развитых в главнейших трудах Е. С. Недаром по мнению ряда ученых как русских, так и иностранных, „Начала учения о фигурах“ заложили основу современной теоретической кристаллографии. Из сказанного видно, что разработка теории математических многогранников натолкнула Федорова на вопросы, относящиеся к природным многогранникам — кристаллам. Таким образом он подошел к той науке, которая заняла главное место в его творчестве — к кристаллографии.

В связи с увлечением кристаллографией, Е. С. решается избрать себе специальность, ближе всего соприкасающуюся с этой наукой, и в 1880 г. в возрасте 27 лет посту-

пает на третий курс Горного института. Сюда привлекает его преподававшийся здесь обширный курс кристаллографии и связанной с ней минералогии. Однако официальный представитель этих наук в Горном институте, крупный специалист в области описательной минералогии проф. П. В. Еремеев (1830—1899) не сумел понять своего выдающегося ученика. Не оценил его и знаменитый математик акад. П. Л. Чебышев, отказавшийся принять рукопись „Начала учения о фигурах“, мотивируя свой отказ тем, что „этим отделом современная наука не интересуется“. Лишь благодаря настоянию выдающегося кристаллографа, акад. А. В. Гадолина, замечательный труд Федорова, законченный в основном уже в 1879 г., увидел свет в 1885 г.

Полный курс Горного института Е. С. заканчивает в 1883 г. первым по списку, с занесением его имени на мраморную доску института. Несмотря на это и на ряд уже законченных работ, Федоров не был оставлен при кафедре кристаллографии и минералогии, вследствие полного непонимания его достижений учеными того времени.

Тяжелые материальные условия заставляют Федорова, являющегося к этому времени уже отцом троих детей, принять предложение Горного департамента на участие в экспедиции по исследованию Северного Урала. Геологические исследования на Северном Урале Е. С. проводит в исключительно тяжелых условиях в течение шести лет. За это время область в 15000 кв. км была им густо покрыта маршрутами. На основании их Федоров дал геологическую карту в масштабе 5 верст в дюйме. Остальная площадь около 43000 кв. км, исследованная менее детально, была нанесена на карту в масштабе 20 верст в дюйме.

Возвращаясь на зимнее время в Петербург, Е. С. в течении десяти лет занимает должность делопроизводителя и консерватора Геологического комитета с окладом 75 руб. в месяц. В этот период выходят в свет его самые замечательные работы по кристаллографии, создавшие эпоху в науке.



Е. С. ФЕДОРОВ
1875 г.

В частности, им публикуется ряд статей по симметрии, увенчивающийся знаменитым трудом „Симметрия правильных систем фигур“ (1890). В этом сочинении Федоров дает первый вывод 230 пространственных групп — 230 геометрических законов, по которым могут располагаться атомы внутри кристаллов. Годом позже немецкий математик Шенфлис дал свой вывод этих же групп. Однако он принужден был признать приоритет Федорова и исправить ряд ошибок, указанных ему русским ученым. Все значение этого гениального труда, совершенно непонятого и незамеченного в момент его появления, выяснилось 20 с лишним лет спустя, когда открытые рентгеноанализа кристаллов показало, что законы, установленные Федоровым, лежат в основе всех реальных кристаллических структур.

В то же время Федоров конструирует модель двукружного гониометра и „Федоровского столика“ для микроскопа, в корне изменивших методику гониометрического и оптического изучения кристаллов. Свои открытия в данной области Е. С. суммирует в классической монографии „Теодолитный метод в минералогии и петрографии“ (1893). Однако и этот труд не обратил на себя в свое время достаточного внимания. В связи со стесненными материальными обстоятельствами, Е. С. в 1894 г. покидает с семьей Петербург и переезжает на Урал в Богословский горный округ в качестве руководителя разведочных работ. Свой отъезд на Урал Е. С. Федоров мотивировал также тем, что его работы, представленные в Академию Наук, не были премированы, а сам он был забаллотирован при выборах в Академию. Вот что писал он сам по этому поводу: „В результате этого забракования (ввиду подрастания детей) я дальше не мог уделять своего времени (нечем кормить детей) науке и в 1894 г., ровно в 25-й год своей научной деятельности, должен был уехать на Урал в качестве практического инженера“.

В Богословском округе Федоровым ведется геологическая съемка округа, составляется подробнейшая геологи-

ческая карта, организуется замечательный геологический музей при Турьинском руднике. В то же время Е. С. продолжает разрабатывать свой „Теодолитный метод в микроскопии“, кладя его в основу изучения горных пород.

В 1895 г. Федоров приглашается на должность профессора геологии в Московский сельско-хозяйственный институт. Десять лет, проведенных им в Сельско-хозяйственном институте в Петровско-Разумовском под Москвой, сам ученый считал счастливейшим периодом своей жизни. С этого времени начинается признание его научных заслуг.

Труды Федорова обращают на себя внимание заграничных ученых, и в 1896 г. он избирается членом Баварской Академии. С 1896 по 1900 гг., оставаясь профессором Сельско-хозяйственного института, Федоров одновременно читает лекции в Горном институте, приезжая для этого из Москвы в Петербург два раза в неделю.

В 1901 г. Е. С. избирается адъюнктом Академии Наук по кафедре минералогии. Однако возникшие препятствия в деле организации минералогического института заставили Федорова уйти из Академии. В связи со своим уходом, Е. С. пишет чрезвычайно резкое и смелое письмо великому князю К. К. Романову, занимавшему пост президента Академии. В этом письме дается едкая критика некоторых членов императорской академии „важных представителей нашей бюрократии, которая как своих выдающихся представителей выдвигала Биронов, Аракчеевых, Д. Толстого, Плеве“.

Этот ценный документ является весьма характерным для Е. С. Федорова. Всецело погруженный в научную деятельность, он в то же время неизменно оставался передовым ученым, неоднократно выступавшим на защиту революционного студенчества. Всякая несправедливость и насилие глубоко возмущали его. Во время англо-бурской войны он ответил резким отказом на приглашение прочитать лек-

цию в Лондонском королевском обществе, указывая на то, что не может уважать нации, которая воспользовалась силой для лишения независимости маленьких бурских республик. В 1914 г., после нападения Германии, Е. С. навсегда отказывается от печатанья своих работ на немецком языке.

После революции 1905 г. ряд высших учебных заведений добился права самостоятельно выбирать себе директора. В связи с этим, ученый совет Петербургского горного института обращается к Е. С. с просьбой занять директорскую должность. В том же году семья Федоровых переезжает в Петербург, и Е. С. становится первым выборным директором Горного института. Время его директорства в институте характеризуется исключительным ростом научной работы не только среди преподавательского персонала, но и среди студенчества.

По инициативе Е. С. был основан журнал „Записки Горного института", заполнявшийся трудами самого Федорова и его учеников. Этот журнал существует и до сих пор. По истечении трех лет пребывания Федорова в должности директора Горного института Совет института почти единогласно переизбирает его и на следующее трехлетие. Однако вторичное избрание Е. С. встречает отказ со стороны министра Тимашева, видевшего в Федорове опасное явление, способствующее процветанию революционных студенческих настроений. В связи с этим, Е. С. оставляет за собой в институте лишь кафедру, во главе которой он и остается до самой своей смерти. Несмотря на беспокойства и неприятности, омрачившие последний период его административной деятельности, ученый ни на минуту не прерывает своей интенсивной научной работы. Основное внимание уделяется им развитию кристаллохимического анализа, позволяющего по внешней форме кристалла определить его химический состав и схему внутреннего строения. В то же время им разрабатываются некоторые отделы новой (проективной) геометрии. В этот период заслуги Федорова

получают мировое признание. Для изучения его достижений к нему съезжаются специалисты не только со всех концов нашей страны, но и из Англии, Германии, Швейцарии и Японии (Т. Баркер из Оксфорда, Л. Дюпарк из Женевы, Джимбо из Токио и др.). Многочисленные иностранные академии и научные общества избирают его своим членом.

Величайшим торжеством идей Федорова явилось открытие в 1912 г. М. Лауе диффракции рентгеновских лучей в кристаллах и первые расшифровки У. Л. и В. Л. Браггами кристаллических структур на основе рентгеноанализа. „Не могу воздержаться от заявления,— пишет Е. С. в одной из своих статей того времени,— что я никак не думал дожить до действительного определения расположения атомов в кристаллах, предусмотренного в прежних моих сочинениях. В письме к профессору Гроту я писал, что, пожалуй, детальные применения систем, предусмотренных в этих сочинениях, начнут совершаться еще через сто лет“.

Февральский переворот и Великая Октябрьская революция произвели глубокое впечатление на Е. С.

С восторгом приветствовал он известие о поражении Германии и последовавшем там перевороте: „Я переживаю восторженное состояние. Явно на глазах у всех гибнет злейший враг человечества — немецкий милитаризм“.

В 1919 г. Е. С. изъявил согласие стать членом обновленной, советской Академии Наук, стремясь все свои силы принести на пользу освобожденной Родине. Но ему не довелось осуществить этого. В конце зимы 1919 г. он заболевает воспалением легких. 21 мая 1919 г. великого ученого не стало.

Вскоре после смерти Е. С. вышли набранные еще при его жизни огромные по объему и по своему научному и практическому значению сводные таблицы по кристаллохимическому анализу — „Царство кристаллов“.

Научно-литературное наследие Е. С. Федорова поражает своим богатством и исключительной многогранностью.

Список его научных работ содержит свыше 400 названий. На первом месте по количеству трудов стоит кристаллография, далее следует геометрия; сравнительно меньше работ относится к минералогии, геологии и петрографии. Если присоединить сюда статьи общего характера, посвященные философским вопросам и истории наук, а также речи, рефераты, отзывы и рецензии, то мы придем к выводу, что в течение 40-летнего периода своей научной деятельности Федоров публиковал в среднем 10 работ в год.

Изучение трудов Е. С. показывает, что будучи прежде всего кристаллографом, он в то же время по складу своего ума являлся ярко выраженным геометром. Не случайно в числе его первых работ стоит большая монография „Начала учения о фигурах", а его последние статьи трактуют вопросы Новой геометрии. Геометрия лежит в основе всего федоровского научного творчества. Трудно отделить друг от друга работы Федорова, относящиеся собственно к геометрии и к другим разрабатывавшимся им дисциплинам, в особенности кристаллографии. Исходя из своих геометрических построений, Е. С. разработал классификацию кристаллических многогранников, теорию строения и симметрии кристаллов. В тесной связи с последней стоят вопросы из области физической и химической кристаллографии. Даже в описательных статьях, касающихся кристаллических форм и оптических свойств некоторых минералов или искусственных соединений, сказывается все то же стремление подчинить наблюдаемые факты геометрическим законам, объяснить их сущность геометрической теорией строения кристаллов.

Ярко проявляется здесь основной принцип Е. С.: „Венец сознательной деятельности человеческого разума — решение стоящих перед ним вопросов путем математического анализа". Свои теоретические выводы в области геометрии Федоров применял в петрографии, минералогии, химии и

даже горном деле при разработке задач, относящихся к горному искусству.

Несколько особняком стоят труды нашего ученого по геологии. Однако, несмотря на то, что в основе их лежат главным образом материалы и наблюдения, собранные в результате экспедиционных работ, мы все же и здесь находим широкие обобщения и тонкие детали, почерпнутые все из той же теоретической сокровищницы.

Первый крупный труд Е. С. Федорова — „Начала учения о фигурах" является чисто геометрической работой. Сам ученый рассматривал его как дополнительный курс к элементарной геометрии. В основе всего сочинения лежит мысль о параллелизме между плоскими и телесными фигурами. Если основным строительным элементом плоских фигур являются плоские углы, то пространственные фигуры характеризуются телесными углами (гоноэдрами).

„Пришел я к этой теме, — писал сам автор, — исходя из наслаждений, испытанных мной при ближайшем изучении изящных соотношений между геометрическими фигурами. Изучение же было вызвано отчетливым сознанием аналогии между тем, что мы называем телесными или пространственными фигурами (трех измерений) и фигурами на плоскости (двух измерений)".

„Начала учения о фигурах" содержат в зачатке большинство последующих работ Федорова в области геометрии и кристаллографии. Первый и второй отделы книги касаются учения о фигурах открытых и сомкнутых. В частности, здесь дается классификация многогранников. Третий отдел посвящен симметрии. В нем приводится полный вывод совокупностей элементов симметрии для всех без исключения конечных фигур (точечные группы). Кристаллографические 32 вида симметрии рассматриваются здесь лишь как частные случаи. Впоследствии Федоров снова вернулся к этому вопросу, дав в „Симметрии конечных фигур" новый вывод всех видов симметрии и их харак-

теристику с помощью специальных алгебраических уравнений.

Четвертый отдел книги содержит учение о поясах и выполнении плоскости и пространства. Этот отдел лег в основу всех последующих федоровских работ по теории строения кристаллов. Проективные преобразования — растяжения и сдвиги — были им использованы для классификации кристаллических решеток. Вывод параллелоэдров — многогранников, нацело выполняющих пространство при условии равенства, параллельности ориентировки и смежности по целым граням, привел к четырем типам пространственных решеток. Разделение параллелоэдров на стереоэдры — равные многогранники, также выполняющие пространство, но в общем случае не в параллельном положении, привело к понятию о правильных системах точек. Впоследствии параллелоэдры и стереоэдры были использованы Федоровым для вывода пространственных групп. Уже в своей первой книге он указывает на неполноту правильных систем, выведенных Зонке, который не учел возможности наличия в правильных системах отраженно равных точечных групп.

В своем труде Федоров писал: „Сочинение это излагает, между прочим, все те части учения о фигурах, которые составляют основание современной кристаллографии и отсутствие которых делало до сих пор из кристаллографии сборник геометрических истин, будто бы выводимых из опыта“. Высказывание Е. С. сохранило всю свою силу и до сих пор. Еще совсем недавно швейцарский кристаллограф Новацкий писал, что с книги Федорова начинается эпоха современной теоретической кристаллографии.

Следующим по времени капитальным трудом нашего ученого являются его „Этюды по аналитической кристаллографии“, связывающие учение о кристаллах с детерминантами и новой геометрией. В них описывается проективная связь, существующая между кристаллическими фигурами, излагается система упрощенных кристаллографических

вычислений, основанная на этой связи, даются многочисленные выражения основного закона кристаллографии — закона Гаюи (1885—1887). Далее Федоров заканчивает серию работ, впоследствии объединенных им под общим названием „Начала анализа симметрии“. Этот цикл, являющийся кульминационным пунктом его творчества, помещен в настоящем издании. Он открывается отдельной брошюрой „Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде“ (1888). По определению самого автора его брошюра „составляет азбуку анализа симметрии“. Здесь обращается внимание на то, что в общем случае при решении задач удобно иметь больше трех необходимых координат с тем, чтобы в каждом данном случае можно было выбирать из них те, которые приведут к простейшему решению. В связи с этим, предлагается через постоянную точку в пространстве, отвечающую началу координат, проводить n координатных осей. При помощи специальных уравнений можно всегда перейти от n косоугольных координат к трем координатам. Такие приемы имеют особое значение в кристаллографии. Так, например, среди симметрично-равных направлений, перпендикулярных какой-либо оси симметрии, нет никаких оснований предпочитать одно перед другим для выбора координатных осей. Поэтому Е. С. принимает как самую ось симметрии, так и перпендикулярные ей симметрично-равные направления за координатные оси.

Второй работой данного цикла является уже упоминавшаяся выше „Симметрия конечных фигур“, содержащая, помимо полного вывода видов симметрии, их алгебраические уравнения, полученные по вышеописанному способу.

Цикл завершается классическим трудом „Симметрия правильных систем фигур“ (1890), содержащим первый вывод 230 пространственных групп. Каждая система здесь опять-таки определяется алгебраическими уравнениями и характеризуется графически. (О значении этого труда и об исто-

рии его возникновения и дальнейшего развития см. в настоящем издании стр. 587 — 598).

Выход в 1891 г. в свет книги А. Шенфлиса, давшего свой вывод 230 пространственных групп, побуждает Е. С. Федорова опубликовать ряд статей в международном кристаллографическом журнале „Zeitschrift fur Kristallographie“.

В них он сопоставляет свои результаты с результатами А. Шенфлиса, детально излагает учение о правильных системах фигур, широко развивает свою теорию строения кристаллов. Из этих трудов особенно важными являются обширные циклы статей „Theorie der Kristallstruktur“ (1884—1905), „Beiträge zur zonalen Kristallographie“ (1900—1901), и работы, посвященные учению о сингониях (1896—1906). В последних дается строго математическое подразделение 32 видов симметрии на шесть сингоний, сохранившее все свое значение и до сих пор. В основу такого подразделения положены количества единичных и симметрично-равных направлений в кристаллах. Попутно вводятся понятия об изотропных, ортогональных и косых поясах. Указанная классификация легла в основу разработки новой номенклатуры сингоний и видов симметрии, принятой во всем мире и известной под названием „номенклатуры Федорова — Грота“. Большое значение придавалось самим Е. С. разработанному им понятию об эллипсоиде сингонии, получающемся из шара, вписанного в основной куб кубического кристалла, при преобразовании последнего в соответственный параллелоэдр какой-либо другой сингонии.

К этому же периоду относится большая монография „Reguläre Plan und Raumtheilung“ (1899—1900), содержащая полное решение вопроса о правильном выполнении плоскости параллелогонами и пространства параллелоэдрами. Здесь же подробно разобрана связь систем параллелоэдров с правильными системами точек и дан новый вывод 230 пространственных групп, основанный на упомянутой связи.

Все эти работы получили всемирное признание. Именно за них, по настоянию крупнейших иностранных кристаллографов того времени (П. Грота, Л. Зонке и других) — Е. С. Федоров был выбран в 1896 г. в члены Баварской Академии наук. Следует заметить, что членом этой Академии состоял виднейший кристаллограф-теоретик того времени Зонке, давший свой вывод правильных систем точек, но ограничившийся лишь 65 простыми системами, не содержащими операций с отражениями. Тем самым, избранием Федорова, крупнейшие европейские авторитеты засвидетельствовали первенство русского ученого в области теоретической кристаллографии.

Одновременно с разработкой вопросов теоретической кристаллографии, тесно связанной с развитием чисто геометрических отделов о симметрии и морфологии многогранников, Е. С. Федоров интенсивно трудился над созданием универсального теодолитного метода в гониометрии и кристаллооптике. В конце 1889 г. Е. С. сделал доклад на заседании Минералогического общества о своем проекте двукружного (теодолитного) гониометра для измерения углов на кристаллах. Этот прибор был им вскоре сконструирован. От старого однокружного гониометра он отличается двумя осями вращения. В последующие годы Федоров опубликовал несколько статей, касающихся методики измерения и обработки результатов измерения на новом гониометре. Изобретение двукружного гониометра и разработка способов его применения произвели полный переворот в методике исследования кристаллов. Позднее сходные конструкции были предложены Гольдшмидтом и Чапским. В настоящее время однокружный гониометр, употреблявшийся до федоровского изобретения, почти совершенно оставлен. Кристаллографы всего мира работают исключительно на двукружных гониометрах. Впоследствии Федоров неоднократно возвращался к вопросам гониометрического исследования кристаллов, отыскивая пути к крайнему упрощению кристал-

лических вычислений. В этом отношении особенно важны созданные им методы проективных символов и биполярных координат или зональных вычислений. Попутно подвергалась коренной переработке теория кристаллографических проекций и был предложен новый способ изображения кристаллов при помощи федоровской стереографической сетки, лишь впоследствии отступившей на второй план перед широко известной сеткой Вульфа.

В 1891 г. Е. С. обратился к присутствию Геологического комитета с предложением осуществить постройку универсального оптического столика, ныне именуемого „федоровским столиком“. Через два года в трудах Геологического комитета была напечатана знаменитая монография „Теодолитный метод в минералогии и петрографии“ (1893).

Оптический столик Федорова представляет собой прибор, привинчивающийся к обычному столику поляризационного микроскопа. Исследуемый с его помощью препарат помещается внутри стеклянного шара, вращающегося около четырех осей. Эта конструкция дала возможность рассматривать под микроскопом любое кристаллическое зерно в препарате по различным направлениям и производить в нем все необходимые измерения.

По своему содержанию федоровский оптический метод является чисто кристаллографическим, но его значение особенно велико для минералогов и петрографов, а также для физико-химиков, так как позволяет изучать закономерности, связывающие оптические константы кристаллов и их химический состав. Пример такого изучения был осуществлен самим Федоровым для непрерывного ряда кальциево-натровых полевых шпатов (плагиоклазов). Применение нового метода в деле практического исследования уральских горных пород и слагающих их минералов дало Е. С. материал для цикла статей „Universalmethode und Feldspatstudien“ (1896—1898). В них, помимо описания основных приемов универсального метода оптических исследова-

ний, содержатся специальные диаграммы, позволяющие определить по оптическим данным химический состав плагиоклазов и символы их кристаллографических элементов.

Из всех достижений Федорова „универсальный метод“ пользуется наибольшей популярностью. Во всем мире студентам минералогам и петрографам читаются о нем специальные курсы. Детальному изложению универсального метода Федорова посвящена обширная классическая монография В. В. Никитина.

Ряд иностранных авторов (Дюпарк, Рейнхард, Берек, Кандель-Вила и др.) опубликовал специальные исследования и руководства по федоровскому методу. Широкое распространение этого метода во всем мире красноречивее всего говорит об его значении. Недаром неоднократно указывалось в литературе, что одного этого изобретения было бы достаточно для того, чтобы обессмертить имя его автора.

Помимо своего столика, Е. С. ввел в практику оптических исследований слюдяной компенсатор, стеклянные сегменты, предложил новый метод определения показателей преломления в зернышках микроскопических препаратов, описал и теоретически объяснил явления псевдохроизма, псевдодихроизма, псевдоабсорбции и т. д.

Более поздний период федоровского творчества в области кристаллографии был посвящен главным образом разработке кристаллохимического анализа. Этот метод дает возможность определить, исходя из гониметрического изучения кристалла, его химический состав. Попутно, по мысли Федорова, с его помощью мы получаем и наиболее вероятные, хотя и схематические, представления о внутреннем строении исследуемого кристаллического вещества. Кристаллохимический анализ базируется, с одной стороны, на законе постоянства кристаллических углов (закон Стено), а с другой — на теории строения кристаллов самого Федорова, в основном разработанной уже в „Началах учения

о фигурах". Исходя из выполнения пространства параллелоэдрами, Федоров пришел к заключению, что все простые кристаллические решетки можно при помощи растяжений или сдвигов вывести из четырех решеток, соответствующих четырем типам параллелоэдров. Три из них — гэксаэдрическая (простая), октаэдрическая (центрированная) и додекаэдрическая (центрогранная) — являются кубическими, четвертая — призматическая — гексагональная. Отсюда, согласно известному федоровскому закону кристаллографических пределов, весь мир кристаллов делится на два типа: кубический и гексагональный. По Браве, на кристаллах статистически доминируют те грани, плоскости которых наиболее густо усажены элементарными частицами. Ясно, что вышеуказанным четырем типам решеток будут соответствовать различные доминирующие грани. Отсюда — возможность по внешним формам кристаллов предугадывать типы их решеток. Для достижения этой цели кристаллам следует придавать правильную, федоровскую установку. Теория такой установки, тщательно разработанная Федоровым, описана в ряде его статей. Весь колоссальный, накопленный в литературе материал по измерению кристаллов был с этой точки зрения критически пересмотрен Федоровым и расположен в виде единого стройного ряда. Такой ряд положен в основу монументального труда „Das Kristallreich", содержащего таблицы по кристаллохимическому анализу. Пользуясь этой книгой, можно определять химический состав ограненных кристаллов. Для этого нужно измерить кристалл на гониометре, придать ему правильную установку и вычислить символ комплекса (ряд характерных угловых величин). Далее, путем сравнения полученных данных с данными, помещенными в „Das Kristallreich", исследуемое вещество отождествляется с соответствующим веществом, находящимся в книге. Само собой разумеется, что такой метод анализа имеет ряд преимуществ. В самом деле: вещество при исследовании не уничтожается; для

анализа достаточно одного маленького кристаллика; время исследования не превышает нескольких часов. Вместе с тем, как всякий анализ, он имеет и ограничения. Из них отметим следующие: определение возможно только при наличии хорошо образованных кристаллов; кубические и изоморфные вещества с равными углами между гранями одинаковых форм гониометрически неотличимы; анализ может быть воспроизведен лишь для веществ, помещенных в таблицах.

Метод Федорова, как указывалось выше, помимо определения химического состава, позволяет установить, хотя и весьма схематически, тип внутренней структуры по внешнему огранению кристаллов. До открытия рентгеноанализа это был единственный метод определения кристаллической структуры. Само собой разумеется, что после развития рентгеноанализа, достоверно определяющего реальную структуру, эта сторона федоровского метода утеряла свой первоначальный интерес. Несмотря на это, значение федоровского кристаллохимического анализа как метода определения вещества целиком сохранилось и до сих пор.

Впоследствии ряд авторов стремился упростить его, опуская вопрос определения кристаллической структуры и непосредственно переходя от измерения углов к определению химического состава. Работа в этом направлении велась в СССР учеником Е. С. Федорова — проф. А. К. Болдыревым, в Англии — федоровским же учеником и сотрудником Т. Баркером, в США — Доннеем и Мелоном.

Помимо работ, касающихся кристаллохимического анализа, Федорову принадлежит большое количество статей, трактующих вопросы химической кристаллографии. Сюда относятся работы по росту и растворению кристаллов, полиморфизму, изоморфизму и т. п. Особенного упоминания заслуживают оригинальные опыты и высказывания по вопросам кристаллогенезиса и несовершенства кристаллов. По

мысли и под руководством Е. С., Д. Н. Артемьевым был разработан метод кристаллизации шаров, сохранивший свое значение и до сих пор. Исследование граней, появляющихся при регенерации вырезанного из кристалла шара, дает очень любопытный и важный материал для изучения связи внешней формы и внутреннего строения кристаллического вещества. Свои важнейшие достижения в области кристаллографии Е. С. Федоров неоднократно обобщал и суммировал в своих известных „Курсах кристаллографии“. Четыре издания его курсов (1891, 1897, 1901, 1910), ярко отражают непрерывный рост его творчества. По глубине и оригинальности эти книги являлись столь же характерными для Федорова, как „Основы химии“ для Менделеева. От предыдущих руководств по кристаллографии федоровские курсы отличаются своим строго-математическим изложением. В них Е. С. „поставил кристаллографию прочно, неизменно и невозвратно на точный математический геометрический базис“ (А. К. Болдырев).

В последний период своего творчества Е. С. Федоров параллельно с разработкой кристаллохимического анализа посвятил много труда развитию некоторых отделов новой геометрии. Здесь его прежде всего привлекала проективная геометрия — изучение геометрических образов с помощью методов проектирования и пересечения. При таком подходе исключается участие метрических свойств упомянутых образов, связанных с понятиями о величинах линий или углов. Целый ряд работ Е. С. посвящен аналитическому исследованию проективных геометрических образов. (Коллинеарные системы в положении перспективном, но не инволюции, 1908; О реципрочных кривых и поверхностях, 1908; Осевая коллинеация, 1912 и др.). Помимо того, Е. С. с особым увлечением развивал учение о системах различных геометрических образов. В таких системах, вместо основного элемента элементарной геометрии — точки, берутся в качестве элементов другие геометрические образы, например круги,

шары, векторы, плоскости и проч. В связи с этим, подобно тому, как из точки создается геометрия образов, построенных из точек, так из кругов, шаров, векторов и проч. можно создать до известной степени аналогичные геометрии кругов, шаров, векторов и проч. Соответственно точкам, линиям, плоскостям, трехмерному пространству элементарной геометрии здесь мы будем иметь по терминологии Федорова примы, секунды, терции, состоящие из упомянутых элементов, т. е. бесконечные совокупности первой, второй, третьей и т. д. степени. В геометрии Эвклида всякая теорема относится лишь к системе, построенной из точек, тогда как теоремы и построения новой геометрии одинаково приложимы ко всем без исключения геометрическим системам. Элементарная геометрия, касаясь только одной частной системы — системы точек, является тем самым лишь частью новой геометрии. „Так как каждая теорема новой геометрии одинаково справедлива для всех систем одной и той же степени, то эту дисциплину в отношениях ее с геометрией древних можно сопоставить, как алгебру в отношениях к арифметике", — писал Е. С. „Дайте нам новую теорему и мы выведем из нее безграничное множество других" — горделиво восклицал он. Для его гения эта область математики представляла широчайший простор. С одной стороны, им развивались уже имевшиеся ранее системы (геометрии векторов, плоскостей, шаров), а с другой — создавались новые системы. К таким принадлежат системы векториальных кругов, векториальных шаров, параллельных векторов и др. Помимо серии статей, посвященных этой области (Системы гармонических отрезков и векторов, 1908; Существование безграничного множества геометрических систем, 1908; Основные черты новой геометрии, 1912; Сферические совокупности коноприм, 1914; Системы векторов и векториальных пар лучей, 1914, и др.), Федоров оставил нам обширную монографию „Новая геометрия как основа черчения" (1907).



Е. С. ФЕДОРОВ
1883 г.

В этой замечательной книге содержится не только изложение основ новой геометрии, но и приводится огромный оригинальный материал, целиком созданный самим автором. В частности, здесь описывается несколько новых геометрических систем и даются основы стройной номенклатуры бесконечных совокупностей элементов. Свои чисто теоретические выводы в области геометрии Федоров всегда стремился использовать практически. Одно из существенных отличий новой геометрии от элементарной заключается в том, что в ней могут быть системы четырех, пяти и т. д. измерений. Этим Федоров и стремился воспользоваться для изображения на плоскости элементарных частиц, слагающих пространственную кристаллическую структуру, для изображения многокомпонентного состава сложных химических соединений и проч. Приемы, разработанные нашим ученым, позволяют представить графически сложные составы минералов и горных пород. Они же помогают определить углы падения и простирания геологических пластов и т. п. Примеры практического применения своих геометрических выводов Е. С. дал в таких разнообразных областях, как кристаллография, петрография, физическая химия и, наконец, маркшейдерское искусство. Из его статей, трактующих о применении новой геометрии, отметим „Точное изображение точек пространства на плоскости" (1907) и „Простое и точное изображение точек пространства" (1909). Вышеизложенным далеко не исчерпывается все многообразие федоровского творчества.

Нельзя пройти молчанием его достижений в области теоретической петрографии и минералогии. Федоровым были выведены соотношения между валовым химическим составом изверженных магм глубинных пород и образующимися из них минералами, разработана классификация и номенклатура горных пород, дан способ графического изображения химических составов горных пород и таких сложных минералов, как слюды, хлориты, турмалины с помощью

„Федоровского химического тетраэдра". В области минералогии наибольшее значение для нас имеют уже упомянутые выше специальные диаграммы полевых шпатов, составленные на основе оптических исследований. Помимо этого Е. С. изучил и описал большое количество природных и искусственных кристаллов. Ему принадлежит честь установления нескольких новых минеральных видов (эрнит, иттрокальцит, виолаит). Им же описаны друзиты — новый тип изверженных горных пород наибольших глубин, авгито-гранатовые породы со всеми их разновидностями и жильная порода — кедабекит. На горных породах Урала Е. С. подробно проанализировал ход динамометаморфических изменений.

К петрографическим работам отчасти примыкают его труды по описательной и физической геологии, рудным месторождениям и другим геологическим вопросам. Крупные исследования Е. С. посвящены Северному Уралу, Богословскому округу, побережью Белого моря, Кедабеку. Ему мы обязаны открытием ряда новых месторождений полезных ископаемых, петрографическому и геологическому анализу некоторых районов Урала, Кавказа, Казахстана.

Наш очерк дает лишь весьма краткий и далеко не полный обзор федоровского творчества. В частности здесь совершенно не затронуты статьи философского и общественного характера, еще ожидающие своего исследователя. Следует отметить, что далеко не до конца изучены и осознаны и многочисленные кристаллографические и геометрические труды ученого.

По справедливому замечанию выдающегося ученика и продолжателя Е. С. Федорова, ныне покойного проф. А. К. Болдырева: „Можно думать, что многие из оригинальных идей Федорова послужат впоследствии как бы почками, из которых расцветут целые новые отрасли тех дисциплин, в которых работал Е. С.".

Выпуск избранных произведений нашего ученого следует рассматривать лишь как первый шаг в деле переиздания его трудов. Несмотря на их огромное количество, все они несут на себе печать его гения.

Сейчас на очереди стоит задача издать полное собрание сочинений Е. С. Федорова, так высоко поднявшего знамя русской кристаллографии в мировой науке.

Проф. *И. И. Шафрановский*



**ВЕЛИКИЙ РУССКИЙ КРИСТАЛЛОГРАФ
И ЕГО ДЕТИЩЕ**

Область структурного анализа кристаллов — определение их тонкой структуры — долгие годы была одной из наиболее отсталых в Советском Союзе. В истекшие 5—6 лет картина резко изменилась, наши успехи в этом разделе науки совершенно поразительны, и без преувеличения можно констатировать, что из мировой продукции последних двух лет в этой области на советские работы приходится более половины.

Наши результаты включают решение самых трудных задач: структуры с числсм параметром в несколько десятков, новые структурные типы в, казалось бы, классической области силикатов, наконец у нас создана общая теория структур, чрезвычайно облегчающая их нахождение и основанная на принципе плотнейшей упаковки, как отдельных атомов (неорганические кристаллы), так и целых (эллипсоидальных) молекул в органике.

И прежние результаты (Брэгга, Паулинга и других признанных авторитетов) и новые все базируются на „атомной кристаллографии“, на так называемых пространственных группах симметрии. Эти единственно возможные „наборы“ симметрии в числе 230 подстилают всякую структурную работу, являются канвой ее, сохраняющейся резко выраженной и в окончательном результате.

Они были выведены в 1885—1890 гг. нашим великим соотечественником Евграфом Степановичем Федоровым [1] и Артуром Шенфлисом. [2] Здесь не место касаться вопроса о приоритете. Он давно уже разрешен (см. переписку обоих авторов, всегда дружескую. Частично она опубликована в книге Богомолова[3], полностью она выходит в ближайшем выпуске „Архива русской науки“), в частности заявлением, самого Шенфлиса. Оба ученые сделали очень много для окончательного преодоления всех трудностей в этой теории на 25 лет опередивши экспериментальное проникновение в эту область, но, пишет наш уважаемый математик С. А. Богомолов, [4] так много сделавший для популяризации творения Е. С. Федорова: „Судьба работ наших обоих ученых была различна: в то время как книга Шенфлиса пользуется широкой известностью, работы Федорова не привлекли того внимания, которого они заслуживали. Причиной служило то обстоятельство, что основная его работа доступна лишь русскому читателю, да и тот может достать ее не без некоторого труда; кроме того имели, конечно, значение те особенности (трудности) изложения, о которых шла речь выше“.

Так ли это? Мы позволяем себе усомниться в словах С. А. Одинаково мало известны, как менее доступно изложенные выводы Е. С. Федорова, [5] так и результаты снискавшего себе мировую известность именно популяризацией математики Артура Шенфлиса. Структурщика мало интересует теория пространственных групп, различные приемы их вывода. Ему нужны лишь конкретные табулированные результаты, которыми он пользуется совершенно аналогично тому,

---

1) Е. С. Федоров. Симметрия правильных систем фугур. СПб., 1890.

2) A. Schönflies. Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig. 1891.

3) С. А. Богомолов. Вывод правильных систем по методу Федорова, ч. I, Л., 1932; ч. II, Л., 1934.

4) Ibidem, ч. 1, стр. 1.

5) Е. С. Федоров. Z. f. Kristallogr., XXIV, 209—252 (1895).

как пользуется логарифмическими и тригонометрическими таблицами школьник, студент, инженер, ученый, очень мало интересуясь методами их составления.

А эти непосредственно нужные структурщику результаты — обязательная канва для всех его работ — в виде диаграмм 230 групп, обычно в одном аспекте, иногда в нескольких, которые составляют основу всех структурных пособий — атласов, оказываются почти точным воспроизведением чертежей, которые были даны Федоровым в 1895 г. с объяснительной статьей на немецком языке в XXIV томе „Zeitschrift für Kristallographie".

С. А. Богомолов говорит:[1] „У Шенфлиса (во 2-м издании) расположения элементов симметрии обычно поясняются наглядными «осевыми фигурами», построение их совершенно ясно для внимательного читателя".

Но эти фигуры появились лишь во 2-м издании книги Шенфлиса в 1923 г., т. е. спустя 28 лет после чертежей Федорова, и нигде более не воспроизводились.

С результатами же Федорова произошла довольно обычная история. Их воспроизвел в 1903 г. в „Математической кристаллографии" англичанин Хильтон[2] с оговоркой, что он не копирует, а изображает в основных чертах по Федорову. Никак нельзя с этим согласиться. Диаграммы Хильтона являются обычно лишь учетверением чертежей Федорова, считавшего возможным для большинства групп ограничиться четвертой частью ($^1/_2 \times ^1/_2$) всей диаграммы, поскольку остальные три части являются повторением — зеркальным отражением этой четверти. У Хильтона сохранены полностью не только основные обозначения Федорова для центров, осей всех сортов, но и такие уж совсем мелочи федоровского изображения, как характеристика скользящей плоскости у конца следа стрелкой, кружком, пустым или залитым и т. д.

---

[1] Ibidem, ч. 1, стр. 10.

[2] H. Hilton, Mathematical Crystallography. Oxford. 1903.

После этого начинается систематическое замалчивание авторства Федорова. В 1919 г. вышла большая книга Ниггли [1] с повторением лишь части 230 диаграмм Федорова без упоминания о нем, с некоторыми, правда, изменениями, прежде всего с указанным учетверением, далее с особыми обозначениями плоскостей симметрии как зеркальных, так и скользящих, причем скользящие плоскости всех четырех сортов обозначены почему-то совершенно одинаково.

Понятно, что обозначения эти далее никем приняты не были, кроме нескольких чертежей у Эвальда, повторившего их в XXIV томе „Handbuch der Physik". В своей же книге 1923 г., [2] сыгравшей большую роль в развитии рентгеноструктурного анализа, этот именующий себя антифашистом ученый умудрился вовсе не упомянуть Федорова и назвать правильные системы — пространственные группы симметрии — шенфлисовскими системами (Schönfliessche Punktsysteme).

В 1922 г. появилась посвященная группам книга Вайкофа, [3] в 1924 г. таблицы Астбюри и Ярдли [4]. В 1929 г. вышел атлас пространственных групп Шибольда, [5] очень тщательно выполненный.

К нему в смысле изображения пространственных групп очень близки вышедшие в 1935 г. так называемые „Интернациональные таблицы для определения структур", [6] основное пособие для структурщика на сегодняшний день. В 1944 г. эти таблицы были фотовоспроизведены в США. Ни у

---

[1] P. Niggli. Geometrische Kristallographie des Diskontinuums. Leipzig. 1919.

[2] P. P. Ewald. Kristalle und Röntgenstrahlen. Berlin. 1923.

[3] R. W. G. Wyckoff. The Analytical Expression of the Results of the Theory of Space Groups. Washington 1922.

[4] W. T. Astbury and K. Yardley. Tabulated Data for the Examination of the 230 Space Groups. Philos. Trans. Roy . Soc. 224 A. 221 (1924).

[5] E. Schiebold. Atlas der 230 Raumgruppen. Leipzig. 1929.

[6] Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen. Berlin, 1935.

Шибольда, ни в „Интернациональных таблицах“, ни в других предыдущих собраниях таблиц не упоминается Федоров, как автор тех основных диаграмм, которые составляют (с объяснениями, числовой и всякой иной характеристикой) основное содержание пособия.

Сравним „Интернациональные таблицы“ с федоровскими диаграммами. Открываем вводную таблицу на стр. 92 „Интернациональных таблиц“ с символическими обозначениями центров, осей симметрии, поворотных различных наименований, винтовых, зеркальноповоротных и т. д. и сопоставляем с такой же вводной таблицей Федорова на стр. 211 тома XXIV „Zeitschrift für Kristallographie“ (1895) и видим полное их совпадение, за исключением признаваемой большинством кристаллографов неудачной замены зеркальноповоротных осей (у Федорова) на инверсионные, да кроме того знак двойной винтовой оси, который у Федорова дан похожим на опрокинутый знак интеграла, в „Интернациональных таблицах“ (можно думать, по неудачному образцу Ниггли) дан неперевернутым.

Несомненным улучшением в современных таблицах является непомещенное во вводной таблице Федорова обозначение скользящих плоскостей симметрии. У Федорова все они даны пунктиром, без особых отметок для параплоскостей (со скольжением, параллельным главной оси, мыслимой нормальной к плоскости чертежа), со стрелками по концам следа для ортоплоскостей (скольжение перпендикулярно к главной оси) и с кружками по концам белыми и залитыми для двух сортов клиноплоскостей (со скольжением на $^1/_2$ и на $^1/_4$ диагонали). В „Интернациональных таблицах“ эти очень условные обозначения достаточно непринужденно заменены тремя родами пунктира: для параплоскостей — точечным (вектор скольжения торцом к наблюдателю), для ортоплоскостей — черточками (скольжение параллельно плоскости чертежа) и для клиноплоскостей — смешанным: точка — черточка. Для клиноплоскостей со скольжением в



Е. С. ФЕДОРОВ
1895 г.

$^1/_4$ диагонали, однако, не удалось дать наглядного изображения, и для них принята сугубо невыразительная условность: стрелки на клиноплоскостном пунктире (см. заметку автора этих строк в ДАН, 10). Обозначение всех этих плоскостей при горизонтальном их расположении (параллельно плоскости чертежа) в „Интернациональных таблицах“ оставлено в точности таким же, как у Федорова.

При перегруженности диаграммы деталями „Интернациональные таблицы“ иногда за частью деталей отсылают к предыдущим диаграммам, группы которых являются подгруппами данной. В этом они вполне подражают Федорову, но тогда как в „Интернациональных таблицах“ это всегда связано с неудобным отбросом назад, иногда на несколько десятков страниц, у Федорова его с поразительным изяществом вычерченные диаграммы собраны в „гнезда“ вокруг центральных „осевых“ диаграмм. Эти гнезда исключительно полезны при вузовском изложении пространственных групп.

В упоминавшейся „Математической кристаллографии“ Хильтона указывается, что в схемах Федорова есть несколько ошибок. Это верно, но внимательно их просмотрев, автор этих строк должен констатировать, что их так мало, они так незаметны, что ускользнули даже от внимания С. А. Богомолова в его книге, посвященной методу Федорова (например группа 100а.[1]) Но сколько же этих ошибок в „Интернациональных таблицах“? Отсылаем читателя к большому (но не полному! — *Н. Б.*) списку этих ошибок в упоминавшемся американском фотоповторении таблиц.

Итак, всякий раз, когда структурщик обращается к совершенно ему необходимой при работе диаграмме пространственной группы в „Интернациональных таблицах“, он должен помнить, что перед ним диаграмма нашего величайшего

---

1) Здесь, повидимому, случайная ошибка в чертеже, хотя в тексте 1891 г. оговорена точно ее невозможность. И все же ошибочный чертеж повторяет в своем воспроизведении 1934 г. С. А. Богомолов.

кристаллографа. Постоянно повторяемые нами детали этих чертежей — паукообразные изображения осей разных порядков и т. д. и т. п., это буквальный миллион, размененный на гривенники, и нам, советским научным работникам, должно твердо это помнить и потребовать, чтоб этого не забывали вольно или невольно и другие слишком забывчивые их потребители.

Чл.-корр. АН СССР *Н. В. Белов*

ИСТОРИЯ ВЫВОДА 230 ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРУПП

Из биографии Е. С. Федорова известно, что уже в 1879 г. 26-летний ученый усиленно работал над своей первой крупной монографией — „Начала учения о фигурах". Разработка ряда геометрических проблем натолкнула Федорова на вопросы, относящиеся к природным многогранникам, т. е. кристаллам.

Таким образом Е. С. подошел к кристаллографии, занявшей центральное место в его творчестве. Желая избрать себе специальность, ближе всего соприкасающуюся с кристаллографией, Е. С. в следующем — 1880 г. в возрасте 27 лет поступает на третий курс Горного института. К сожалению, интересы молодого Федорова не встретили поддержки ни у официальных представителей кристаллографии и минералогии в Горном институте, ни у знаменитейшего математика — академика П. Л. Чебышева. Последний даже отказался просмотреть труд Федорова, „мотивируя свой отказ тем, что этим отделом современная наука не интересуется".[1] В результате, рукопись „Начал" пролежала под спудом до 1885 г., когда она увидела свет в „Записках Минералогического общества". В связи с этим, по словам самого Федо-

---

[1] Е. С. Федоров. Начала учения о фигурах. Зап. Мин. общ., 1885, т. XXI. стр. V.

рова, „стал спорным приоритет по некоторым существенным вопросам, впервые решенным в России“.[1]

Несмотря на неодобрительное отношение авторитетов, молодой ученый энергично пропагандирует свою новую теорию строения кристаллов.

С 1881 г. начинается ряд его сообщений на собраниях Минералогического общества. В протоколе заседания Общества от 13 октября 1881 г. (Зап. Мин. общ,, т., XVII, 1882, стр. 381) читаем: „Е. С. Федоров сообщил свои исследования о приложении некоторых законов геометрии к разъяснению образования двойниковых кристаллов“. В этом кратком упоминании мы не встречаем ни слова о федоровской теории строения кристаллов. Однако годом позже протокольная запись от 16 ноября 1882 г. гласит: „Е. С. Федоров, повторив вкратце сущность изложенной им год назад теории кристаллической структуры, по которой элементарные кристаллографические сферы имеют формы параллелоэдров (три-, тетра-, гекса- и гептапараллелоэдры) и плоскости которых суть двойниковые плоскости кристаллов, приступил к изложению продолжения своих исследований. На этот раз он изложил выводы упомянутой теории по отношению: 1) к плоскости спайности и 2) к направлениям роста кристаллов“. (Зап. Мин. общ., 1882,т. XVIII, стр. 281). Итак, в 1881 г. основы теории Федорова были публично доложены на заседании Минералогического общества. На это обстоятельство Федоров неоднократно ссылался впоследствии.

В протоколе годичного заседания Минералогического общества от 7 января 1884 г. находится следующее сообщение: „По отделу кристаллогии, во время прошлогодних заседаний Общества, горный инженер Е. С. Федоров подробно изложил основания теории построения стереометри-

[1] Е. С. Федоров. Заметка об успехах теоретической кристаллографии за последнее десятилетие. Зап. Мин. общ., 1890, т. XXVI. стр 345.

ческих форм и, между прочим, тех из них, которые изучает кристаллография... В прошедшем же году Е. С. Федоров окончил работу свою по изучению тех же частей стереометрии и кристаллографии и представил ее Обществу для напечатания в его изданиях... Отдельные его оттиски появятся в марте месяце настоящего года" (Зап. Мин. общ., т. XX, 1884, стр. 334). На это сообщение Е. С. впоследствии указывал, считая 1883 год годом обнародования „Начал". Наконец, по настоянию автора вывода 32 видов симметрии — акад. А. В. Гадолина, „Начала учения о фигурах" были опубликованы в 1885 г. в виде отдельного 21-го тома „Записок Минералогического общества". Из пяти отделов этой обширной монографии два имеют непосредственное отношение к интересующему нас вопросу. Это, во-первых, „Учение о симметрии" (отдел III) и, во-вторых, „Учение о поясах и выполнении плоскости и пространства" (отдел IV). В первом из них Федоров дает исчерпывающий вывод совокупностей элементов симметрии для конечных геометрических фигур вообще. Не зная о существовании соответственного старинного вывода Гесселя, Федоров считал свой вывод первым по времени. Из числа своих предшественников в этом вопросе Е. С. особенно высоко ставил русского ученого А. В. Гадолина, ограничившегося выводом 32 кристаллографических видов симметрии.

В 1884 г. Пьер Кюри опубликовал новый вывод совокупностей элементов симметрии для конечных геометрических фигур, исправив и доведя до конца незаконченный вывод Браве. Задержки с печатанием книги Федорова привели к тому, что работа Кюри, дублирующая федоровский вывод, увидела свет годом раньше „Начал учения о фигурах". Однако Федоров неоднократно отстаивал свой приоритет в данном вопросе, ссылаясь на вышеприведенное сообщение в „Записках Минералогического общества" об окончании его труда в 1883 г. Лишь, после открытия старинного труда Гесселя в 1891 г. Е. С. уступает свое первенство забытому

ученому. Во всяком случае вывод Федорова сыграл огромную роль в нашей науке, послужив основанием для дальнейшего вывода пространственных групп. Еще больший интерес в этом отношении представляет 4-й отдел „Начал учения о фигурах“, посвященный выполнению плоскости и пространства. Помимо вывода параллелоэдров и стереоэдров, лежащих в основе федоровской теории строения кристаллов, мы встречаем здесь ряд положений, относящихся к правильным системам точек. Так, на стр. 238 находится следующее примечание:

„Если внутри одного стереоэдра возьмем произвольную точку и затем построим соответственные точки во всех других фигурах, то получим систему точек, называющуюся правильной, т. е. такой, что если из какой-нибудь точки проведем лучи ко всем другим точкам системы и потом то же сделаем с другой точкой, то получим две совмещающиеся друг с другом системы лучей. Если мы предположим, что пространство выполняется не только равными, но и симметричными фигурами, то как мы видели, пара таких смежных фигур составит одну фигуру, из равных которым будет выполняться пространство“.

В последней фразе четко сформулировано отличие федоровского понятия о правильных системах точек от соответственного понятия Зонке, принимавшего во внимание лишь симметрические операции первого рода, соответствующие движениям, и давшего в результате такого подхода только 65 систем. Это отличие подчеркивается далее самим Федоровым. После доказательства теоремы, согласно которой „каждая правильная система точек есть система соответственных точек стереоэдров“, Федоров помещает следующее специальное примечание:

„В предыдущем, определение правильной системы точек заимствовано у Зонке. Но с равным правом этот же термин применим и к совокупности двух правильных систем, из которых одна симметрична с другой... Если для различия

системы точек с плоскостями симметрии мы назовем правильными двойными системами, то увидим, что только что доказанная теорема одинаково применима как к простым, так и к двойным системам" (Начала учения о фигурах стр. 240).

Сам Федоров пишет о своих „Началах" следующим образом: „Сочинение это не требует никаких предварительных сведений, кроме элементарной геометрии, и составляет в сущности, не что иное, как дополнительный курс этой науки".

Ясно, что более подробное развитие вышеприведенных идей, относящихся к симметрии правильных систем фигур, не укладывалось в рамки „Начал".

В последующие годы Федоров приступает к систематической разработке учения о симметрии, причем завершением этого учения явилась его „Симметрия правильных систем фигур" (1890).

Все свои сочинения, относящиеся в данному отделу, Федоров объединяет под общим названием „Начала анализа симметрии". Сюда входит в первую очередь отдельно изданная брошюра „Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде" (1888). По словам Е. С., „эта брошюра составляет азбуку анализа симметрии".

Далее следует статья „Симметрия конечных фигур", напечатанная в „Записках Минералогического общества" за 1888 г. В ней содержится новый полный вывод всех видов симметрии для конечных геометрических фигур, причем каждый вид характеризуется алгебраическими уравнениями.

Наконец, в 1891 г. выходит „Симметрия правильных систем фигур". Отдельные оттиски этой работы появились в 1890 г. Кроме того в 1890 г. в протоколах Минералогического общества был опубликован ее реферат. Вот как передает сам Е. С. Федоров содержание своего труда:

„Здесь дается полный вывод всех правильных систем точек, и намечен вывод возможных видов структуры кри-

сталлов. Системы Зонке находятся в числе других систем лишь как особый частный случай и называются простыми системами. Каждая система строго определяется алгебраическими уравнениями".

В предисловии к своей работе Федоров отмечает:

„Это сочинение заканчивает собою ряд чисто математических исследований в области кристаллографии, намеченных мною в начале моего самостоятельного научного поприща" (Под предисловием стоит дата: декабрь, 1889 г.).

На этом, казалось бы, заканчивается история федоровского вывода правильных систем фигур. Однако история эта теснейшим образом переплетается с выводом пространственных групп, осуществленным почти в одно время с Федоровым немецким математиком Артуром Шенфлисом.

Первые две статьи А. Шенфлиса появились в 1888 г. [1]. Вот что пишет Е. С. Федоров по этому поводу:

„Недавно я познакомился со статьями Шенфлиса, появившимися в Геттингенском ученом журнале. Мне доставило удовольствие видеть повторение всех существенных оснований моей теории кристаллической структуры в этих работах, хотя и в менее обработанном виде". [2] Далее Е. С. приводит несколько параллельных цитат из статей Шенфлиса и из „Начал учения о фигурах", отмечая общее сходство результатов и ряд преимуществ в своих выводах. Годом позже А. Шенфлис публикует статью, содержащую описание 227 пространственных групп. [3]

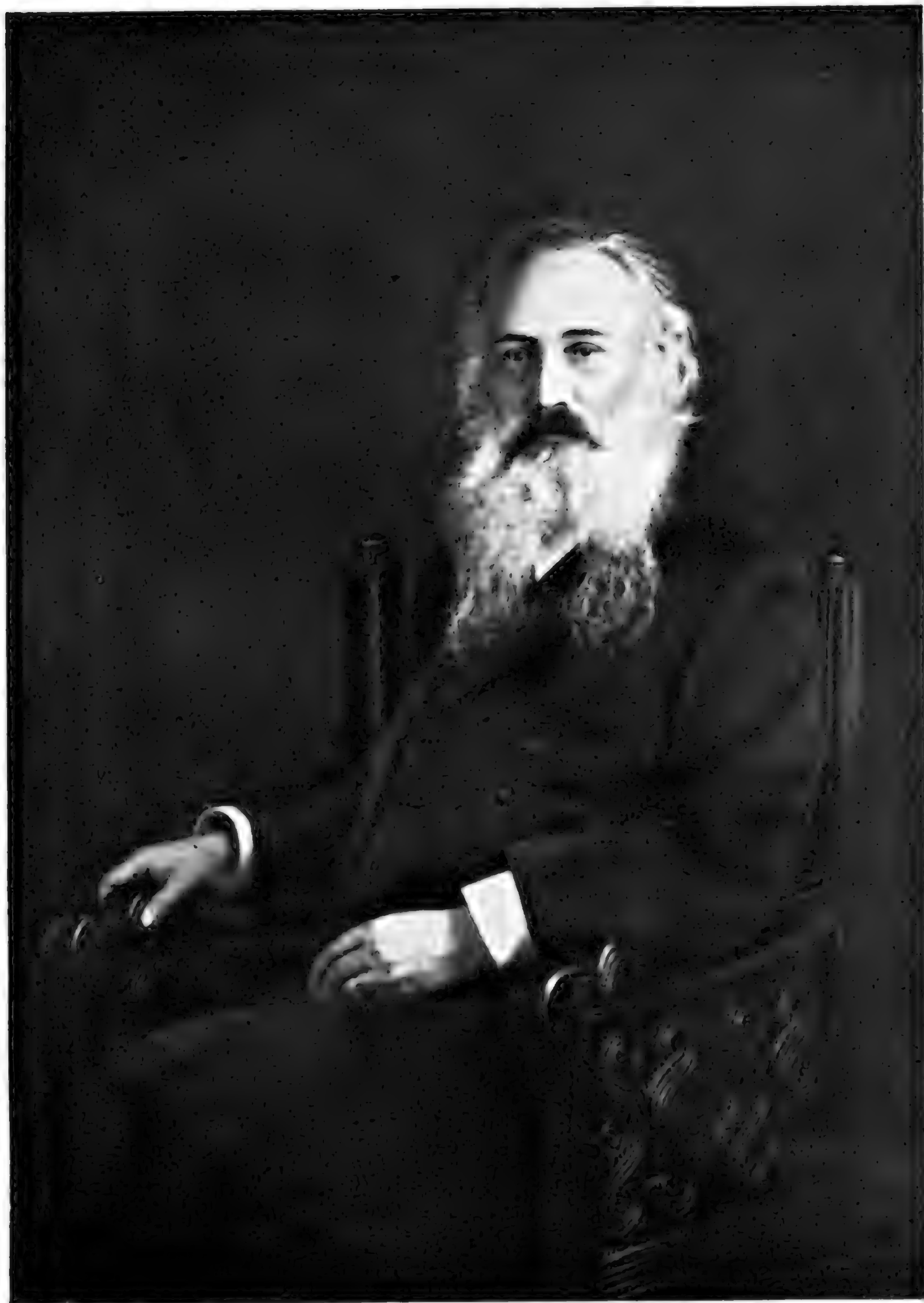
Е. С. Федоров в это время уже закончил и представил

---

1) A. Schönflies. Ueber reguläre Gebietstheilungen des Raumes. Nachrichten d. Ges. d. Wiss. zu Goettingen (1889), No 9, SS. 223—237; он же. Beitrag zur Theorie der Kristallstruktur. d. Nachrichten, SS. 483—501.

2) Е. С. Федоров. Заметка об успехах теоретической кристаллографии за последнее десятилетие. Зап. Мин. общ., 1890, т., XXVI, стр. 374—375.

3) A. Schönflies. Ueber Gruppen von Transformationen des Raumes in sich. Math. Ann. (1889) Bd. 34, H. 2.



Е. С. ФЕДОРОВ
1908 г.

к печати свой труд „Симметрия правильных систем фигур". Однако и его вывод не дал еще окончательного числа 230 пространственных групп. Появление статьи Шенфлиса побудило нашего ученого приложить к протоколу заседания Минералогического общества от 21 ноября 1889 г. предварительную таблицу выведенных им правильных систем фигур в числе 228. Таблицы сопровождаются кратким пояснением, заканчивающимся следующими словами:

„По странной случайности одновременно с окончанием этой работы получен XXXIV Band, 2. Heft журнала „Mathematische Annalen", в котором помещена работа Schoenflies'a „Ueber Gruppen von Transformationen des Raumes in sich". Здесь выводятся на тех же основаниях все возможные правильные системы точек в числе 227, т. е. всего на одну меньше, чем выведено референтом и показано на приложенной таблице. Однако такое согласие носит случайный характер и зависит от того, что Шенфлис почти столько же упустил возможных систем, сколько повторил в выводе системы одинаковые. Неполноту выводов Шенфлиса референт показал на простых примерах" (Зап. Мин. общ., 1890, т. XXVI, стр. 455).

Как указывалось, отдельные оттиски „Симметрии правильных систем фигур" Федорова увидели свет в 1890 г. Работа эта вошла в состав 28-го тома „Записок Минералогического общества", вышедшего в 1891 г. В таблице, завершающей статью, находим всего 229 правильных систем. Однако в списке опечаток, помещенном в конце упомянутого тома, приводятся поправки и дается общее число систем, равное 230 (стр. 557—558). Кроме того, те же поправки находятся в протоколе заседания Минералогического общества от 13 ноября 1890 г., опубликованном ранее (Зап. Мин. общ., 1890, т. XXVII, стр. 448—449). Сущность же сводится к выводу двух новых систем (16h) и (103a) и к установлению тождества системы, выведенной раньше под номером (16h), с системой (17s). Таким образом общая

сумма всех систем оказалась равной 230. В том же 1891 г. была напечатана известная книга А. Шенфлиса „Kristallsysteme und Kristallstruktur“. Автор ее неоднократно цитирует Е. С. Федорова, указывая на его первенство в ряде вопросов, касающихся теоретической кристаллографии. Например: „Die Nohtwendigkeit, die Sohncke'sche Theorie so auszubilden, wie es durch die reine Strukturtheorie im engeren Sinn geschicht, wurde wohl zuerst von E. Fedorow betont“. И далее: „Eine Schrift von Fedorow, welche eine vollständige Ableitung aller Raumgruppen und ihre Beziehung zur Kristallsymmetrie enthält, ist 1890 unter dem Titel „Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren“ in russischer Sprache erschienen“. (1891, стр. 622).

Сопоставление выводов Е. С. Федорова и А. Шенфлиса с математической точки зрения читатель найдет в работе проф. С. А. Богомолова.[1] Там же дается обстоятельная характеристика основных особенностей трудов обоих ученых.

При рассмотрении истории вывода пространственных групп С. А. Богомоловым были использованы письма А. Шенфлиса к Е. С. Федорову, хранящиеся в архиве Федоровского института (Ленинград, Горный институт). Просмотр последних показал, как много был обязан немецкий автор русскому ученому.

Приведем выдержку из книги С. А. Богомолова, содержащую краткий обзор упомянутых писем.

„Согласие в числе 230 систем получилось не сразу. В предисловии к своей книге Федоров говорит о 229 правильных системах; но в опечатках одна из них выброшена, как равнозначная с одной из уже полученных, и присоединены две новых, так что было найдено полное число. Пишущий эти строки заметил, что система (50h) повторяет

[1]) Проф. С. А. Богомолов. Вывод правильных систем по методу Федорова, ч. 1, Л., 1932; ч. 2, Л., 1934.

(64 s); для образования действительно новой системы (50 h) надо взять иное образующее поступание, которое уже встречалось у Федорова в ромбической сингонии (Зап. Мин. Общ., т. LXIX, стр. 5).

„С несколько большими трениями, под влиянием указаний Федорова, пришел к полному числу Шенфлис. В 1-м издании своей книги (стр. 622) он признает, что в первоначальном изложении, как заметил Федоров, были пропущены три системы и одна была повторена дважды. Мы можем несколько подробнее осветить этот вопрос, пользуясь письмами Шенфлиса к Федорову, которые в числе 29 хранятся в Федоровском институте.

„В 1-м письме от 14 XII 1889 Шенфлис признает первенство по времени русского ученого. В 3-м письме от 29 X 1890 он возражает против указания Федорова на тождественность групп $\mathfrak{V}_8^d$ и $\mathfrak{V}_8^q$ [эти группы совпадают с $\mathfrak{V}_d^3$ по позднейшему обозначению Шенфлиса; в 1-м издании (стр. 622) ошибочно говорится о $\mathfrak{V}_d^4$] и на пропуск по одной группе из каждой пары; (5 s) и (6 s), (1 h) и (2 h), причем последний вопрос он не мог еще выяснить до конца, вследствие различия в обозначениях. В письме же от 10 XI 1890 Шенфлис вполне признает правильность указаний Федорова и далее говорит о несогласии в числе систем следующих видов симметрии:

$$\mathfrak{V}^h,\quad \mathfrak{C}_4^v,\quad \mathfrak{C}_3^v.$$

„Однако в открытке от 17 XI 1890 указывает на свой просмотр в последнем отношении. В 9-м письме от 7/I 1891 г. подымается вопрос о группе (103a) (по окончательному списку в Zeitschr. f. Krist., Bd. XXIV она носит у Федорова номер (93a); впоследствии Шенфлис назвал ее T_d^6). Шенфлис отрицает ее существование, но в 13-м письме от 17 III 1891 вполне признает свою ошибку. Справедливость требует отметить, что эту систему и Федоров пропустил в своей книге, восстановив ее в опечатках.

Таким путем наши ученые дошли до полного числа 230 правильных систем". [1]

Выход в свет книги Шенфлиса был встречен Е. С. Федоровым двумя специальными статьями — русской и немецкой. [2] Впоследствии он вторично изложил результаты своего вывода в ведении к циклу статей „Theorie der Kristallstruktur", приложив к тексту диаграммы для всех 230 систем. [3]

В настоящее время особый интерес представляет для нас речь, произнесенная Е. С. Федоровым в Минералогическом обществе по поводу опубликования сочинения А. Шенфлиса. Отрывком из нее мы и закончим наш исторический обзор.

„Милостивые государи! Только что появилось одно замечательное сочинение по теоретической кристаллографии, ясно доказывающее, что последняя уже не только в России, но и в Германии пустила глубокие корни. Я подразумеваю сочинение А. Шенфлиса „Kristallsysteme und Kristallstruktur", заключающее около 640 страниц.

„Как показывает заглавие этого сочинения, оно рассматривает только два вопроса кристаллографии: вопрос о системах симметрии и их подразделениях и вопрос о правильных системах фигур, или, употребляя термин самого автора, о пространственных группах, или, выражаясь еще иначе, и притом общепонятно, о возможных видах структуры кристаллов.

---

[1]) Проф. С. А. Богомолов. Вывод правильных систем по методу Федорова, ч. I, Л., 1932, стр. 9—10.

[2]) Е. С. Федоров. По поводу появившегося сочинения Шенфлиса по теоретической кристаллографии. Зап. Мин. общ., 1891, т. XXVIII, стр. 515—519; E. Fedorow. Zusammenstellung der kristallographischen Resultaten des Herrn Schoenflies und der meinigen." Zeitschr. f. Krist., 1892, Bd. XX, SS. 25—75.

[3]) E. Fedorow. Theorie der Kristallstruktur. Einleitung. Regelmässige Punktsysteme. Zeitschr. f. Kristal., 1895, Bd. XXIV, SS. 210—252.

„Если не касаться работ Гесселя, до такой степени опередивших свое время, что они оставались непонятными и потому почти неизвестными даже современникам, то первый вопрос прежде всего самым точным образом был исследован в России А. В. Гадолиным; второй вопрос — вашим покорнейшим слугою.

„Таким образом, названное сочинение А. Шенфлиса, знаменующее для Западной Европы громадный шаг вперед, для России такового не представляет.

„Вообще, в этой отрасли науки русская ученая литература значительно опередила литературу всех других стран. Конечно, и в новом сочинении, несмотря на его обширность, не только движение в этой области не опередило русской литературы, но еще многое, заключающееся в последней, остается в нем неизвестным, непонятым. Однако и для нас русских сочинение это имеет большое значение как первый шаг ознакомления с русскими сочинениями в подлиннике. Мне кажется, трудно обнять все значение этого факта, сколь ни кажется он нормальным, обыденным с общей точки зрения.

„Для того, чтобы хоть сколько-нибудь осветить это значение, я беру на себя смелость изложить собранию нижеследующие соображения.

„Мне кажется общеизвестным то особенное отношение иностранных ученых к русским сочинениям, которое признает их как бы несуществующими. Это отрицательное отношение иностранных ученых иногда доходит до того, что некоторые из них не считают для себя обязательным даже установление новых зоологических видов, хотя бы при этом установлении было исполнено все, что требуется по международным правилам, т. е. сделано удовлетворительное изображение и описание, если только описание это составлено по-русски. Мне всегда казалось обидным для национального самолюбия такое подчиненное отношение русской ученой литературы.

„Конечно, в настоящее время общепринятыми языками в научной литературе являются языки французский, немецкий и английский, а потому общедоступным может считаться лишь сочинение, написанное на одном из этих языков. Но, кажется, нетрудно предвидеть, что это должно перемениться, что если такую значительную роль могут играть языки французский и немецкий, то тем более важная роль предстоит языку русскому, на котором говорит сто миллионов граждан России, движущейся быстрыми шагами по пути цивилизации и прогресса.

„Вот соображения, которые, между прочим, руководили мною с начала моей научной деятельности. Новое сочинение А. Шенфлиса достаточно оправдывает правильность моей точки зрения. В нем чистокровный представитель западно-европейской науки оказывается знакомым, хотя и не совершенно, с русским языком, пользуется русскими сочинениями и даже приводит их некоторые заглавия напечатанными русским шрифтом. Такой чести удостоились сочинения „Начала учения о фигурах“ и „Симметрия правильных систем фигур“. Он отдает полную справедливость тому, что ему известно в русских сочинениях, и в словах, приведенных на стр. 622, ясно высказано, что в русском сочинении уже был сделан тот полный вывод, который именно и составлял задачу сочинения Шенфлиса.

„И действительно, подобно тому, как в первой части его сочинения, как результат, выводятся те самые 32 кристаллографические системы, которые нам давно известны из сочинения А. В. Гадолина, так и во второй части выводятся те самые 230 правильных систем точек, которые были выведены в сочинениях вашего покорнейшего слуги“.[1]

Проф. *Г. Б. Бокий*
и проф. *И. И. Шафрановский*

---

[1]) Зап. Мин. общ., 1891, т. XXVIII, стр. 515—519.

СПИСОК ТРУДОВ Е. С. ФЕДОРОВА[1])

1881

1. Попытка подвести атомные веса под один закон. — Журн. Русск. физ.-хим. общ., 1881, т. XIII, ч. I, стр. 244—245.

2. Теория двойников. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1881, т. XVII, стр. 381. (Протокол заседания 13 октября 1881 г.)

1882

3. Местонахождение крупных кристаллов магнитного железняка на горе Благодати. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1882, т. XVIII, стр. 274. (Протокол заседания 21 сентября 1882 г.).

4. Приложение теории кристаллической структуры к явлениям спайности и роста кристаллов. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1882, т. XVIII, стр. 281—283. (Протокол заседания 16 ноября 1882 г.)

1883

5. Заметки о Кунгурских пещерах. — Материалы для геологии России, 1883, т. XI, стр. 219—243.

1884

6. Заметки по поводу статьи г. Б. Коленко „Полярное электричество кварца... гемиморфизм и гемиэдрия". — Горн. журн., 1884, № 12, стр. 349—356.

7. Гоноэдрические демонстративные приборы по кристаллографии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1884, т. XIX, стр. 181. (Протокол заседания 15 февраля 1883 г.)

---

[1]) В список трудов не включены рецензии, рефераты и переводы

8. Наблюдения в кунгурской „Ледяной пещере". — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1884, г. XIX, стр. 191. (Протокол заседания 15 марта 1883 г.)

9. Об общих формулах проективности и работе Пфаффа о твердости минералов. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1884, т. XIX, стр. 216—217. (Протокол заседания 15 ноября 1883 г.)

10. О твердости минералов. — Зап. Мин. общ.. 2-я серия, 1884, т. XIX, стр. 217. (Протокол заседания 15 ноября 1883 г.)

1885

11. Этюды по аналитической кристаллографии. — Горн. журн., 1885, II, стр. 87—118, 222—243.

12. Начала учения о фигурах. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1885, т. XXI, стр. 1—289.

13. Указатель статей ко второй серии „Записок С.-Петербургского Минералогического общества" и „Материалов для геологии России" изданных с 1868 по 1884 годы. СПб., 1885, 165 стр.

1886

14. Этюды по аналитической кристаллографии. Этюд второй. — Горн. журн., 1886, I, стр. 395—425.

15. Этюды по аналитической кристаллографии. Этюд третий. — Горн. журн., 1886, IV, стр. 407—454.

16. Геологические исследования „Северной экспедиции" в 1884 и 1885 гг. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1886, т. XXII, стр. 341—343.

17. Сведения о Северном Урале. — Изв. Русск. геогр. общ., 1886, т. XXII, стр. 255—298 с топографической картой пройденного пути. (Совместно с П. Ивановым.)

1887

18 Этюды по аналитической кристаллографии. [Этюд четвертый.] Горн. журн., 1887, II, стр. 87—153.

19. Попытка выразить кратким знаком символы всех равных направлений данного подразделения системы симметрии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1887, т. XXIII, стр. 99—115.

20. О признаках дислокационного метаморфизма в собранных и исследованных кристаллических горных породах Северного Урала. — Зап. Мин. общ., 1887, т. XXIII, стр. 326—327.

21. Несколько слов по поводу замечательного труда А. В. Гадолина „Вывод всех кристаллических систем из одного начала". — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1887, т. XXIII, стр. 353—356.

22. Об установлении простых соотношений между формами всех

кристаллических систем. (Предварительное сообщение.) — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1887, т. XXIII, стр. 366—367, 373.

23. К вопросу об образовании зеленых сланцев. — Изв. Геол. ком., 1887, стр. 431—438.

24. Заметки о нахождении меловых и валунных отложений в приуральской части Северной Сибири. — Изв. Геол. ком., 1887, стр. 439—450.

1888

25. Простой графический способ определения падения и простирания пород. — Горн. журн. 1888, IV, приложение, стр. 56—61.

26. Геологическое строение части Северного Урала. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1888, т. XXIV, стр. 423—425.

27. О зеленых сланцах Северного Урала. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1888, т. XXIV, стр. 437—438.

28. О результатах геологического путешествия в 1887 году на Урал.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1888, т. XXIV, стр. 449—450.

29. Сиенито-гнейсы Северного Урала. — Изв. Геол. ком., 1888, стр. 15—31.

30. Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде. СПб., 1888. (2), 36 стр.

1889

31. Геологические исследования в Северном Урале в 1884—1886 годах. — Горн. журн., 1889, II, стр. 81—147, 307—383; 1890, I, стр. 498—551; II, стр. 145—210.

32. Симметрия конечных фигур. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1889, т. XXV, стр. 1—52.

33. Две кристаллографические заметки. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1889, т. XXV, стр. 53—58.

34. О некоторых кристаллографических теоремах. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1889, т. XXV, стр. 348.

35. О геологических исследованиях, произведенных в 1887 г. в Северном Урале. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1889, т. XXV, стр. 385—386.

36. Новые данные по геологии Северного Урала.— Изв. Геол. ком., 1889, стр. 7—20.

37. Микроскопическое исследование кристаллических пород в области 48-го листа. — Тр. Геол. ком., 1889, т. IX, № 1, стр. 223—247.

1890

38. Заметка об успехах теоретической кристаллографии за последнее десятилетие. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1890, т. XXVI, стр 345—377, 404—406, 452—457.

39. Опыт вывода явления сдвигов кристаллов из теории их структуры. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1890, т. XXVI, стр. 433—445.

40. Об условиях наисильнейшего разрушения при землетрясении. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1890, т. XXVI, стр. 445—447.

41. Заметка о сооружаемом новом гониометре. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1890, т. XXVI, стр. 458—460.

42. Kristallform des Dimethylacetylentetrabromides $C_4H_6Br_4$,— Journ. f. prakt. Chemie, 1890 (2), Bd. 42, S. 1945. (В статье А. Е. Фаворского.)

43. Gonoedrische demonstrative Apparate in Anwendung auf die Kristallographie, — Neues Jahrb. f. Min., 1890, Bd. I, SS. 234—247.

1891

44. О попытке определить расположение частиц некоторых минералов.— Вестн. естествозн., 1891, № 5, стр. 196—197.

45. Первая попытка определить расположение частиц некоторых минералов. — Горн. журн., 1891, I, стр. 115—132.

46. Кристаллографическая задача. — Горн. журн., 1891, II, стр. 360.

47. Аналитическое выражение для определения относительной величины вертикальной и горизонтальной слагающих удара при землетрясениях. — Горн. журн., 1891, II, стр. 364—365.

48. Поправка к сочинению „Симметрия правильных систем фигур“ и к сочинениям Либиша по теоретической кристаллографии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVII, стр. 448—451.

49. О сочинениях немецкого минералога Гесселя и о приоритете его в разрешении некоторых вопросов теоретической кристаллографии.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVII, стр. 462—464.

50. О причине образования кристаллических скелетов. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVII, стр. 464—465.

51. Попытка объяснения некоторых аномальных кристаллов изменениями их частичного строения. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. XXVII, стр. 465—468.

52. Симметрия правильных систем фигур. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVIII, стр. 1—146, с 5 табл.

53. Симметрия на плоскости. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVIII, стр. 345—390, с 2 табл.

54. Решение одной задачи математической кристаллографии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVIII, стр. 476—477.

55. Упрощенный вывод относительной величины слагающих удара при землетрясениях. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVIII, стр. 500—501.

56. О полной коллекции гоноэдрических приборов по кристаллографии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVIII, стр. 515.

57. По поводу появившегося сочинения Шенфлиса по теоретической кристаллографии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVIII, стр. 515—519.

58. Замечание на решение Ю. В. Вульфом одной задачи по математической кристаллографии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1891, т. XXVIII, стр. 528.

59. О лодочной съемке. — Изв. Русск. геогр. общ., 1891, т. XXVII, стр. 119—135 с табл. чертежей.

60. Краткое руководство по кристаллографии. Часть первая. СПб., 1891, [14], 98 стр. с 234 рис. и 1 табл.

61. Brief an D. Red. ueber seine beiden Werke: 1) Die Symmetrie der endlichen Figuren, 2) Die Symmetrie der regelmässigen Systeme der Figuren,— Neues Jahrb. f. Min., 1891, Bd. I, SS. 113—116.

62. Ueber eine merkwürdige Eigenschaft der Anorthits. — Tschermak's Min. u. Pal. Mitteil., 1891, Bd. XII, SS. 443—444. См. также: Neues Jahrb. f. Min., 1892, Bd. II, SS. 68—69

63. Eine neue Methode der optischen Untersuchung von Kristallplatten im parallelen Licht. — Tschermak's Min. u. Pal. Mitteil., 1891, Bd. XII, SS. 505—509.

64. Zusammenstellung der kristallographischen Resultaten des Herrn Schoenflies und der meinigen. — Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1891, Bd. XX, SS. 25—75.

1892

65. А. В. Гадолин. — Горн. журн., 1892, IV, стр. 558—563. См. также: Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1893, т. XXX, стр. 405—412.

66. О компараторе Мишеля Лэви и об универсальном столике. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1892, т. XXIX, стр. 171—173.

67. О наблюдениях при параллельных николях; о важнейших определениях, совершаемых при помощи универсального столика, и об оптических константах анортита. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1892, т. XXIX, стр. 191—193.

68. Новый способ определения коэффициентов преломления; исследование плагиоклазов и линейка Вульфа для вычерчивания пологих дуг. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1892, т. XXIX, стр. 205—209.

69. Геологические исследования в северо-западной части 85-го листа геологической карты. — Изв. Геол. ком., 1892, стр. 199—208.

70. Mikroskopische Beobachtungen bei paralleler Lage der Nicols. — Neues Jahrb. f. Min., 1892, Bd. II, SS. 69—70.

71. Auflösen einiger Aufgaben der stereographischen Projection. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1892, Bd. XX, SS. 357—361.

1893

72. Некролог и список сочинений А. В. Гадолина. — Изв. Геол. ком., 1893, стр. 1—6.

73. О преподавании минералогии в высших учебных заведениях и особенно в Горном институте.— Изв. Общ. горн. инж., 1893, № 5, стр. 12—21.

74. Библиография по кристаллографии, минералогии и петрографии.— Изв. Общ. горн. инж., 1893, № 5, стр. 37—42.

75. Теодолитный метод в минералогии и петрографии. — Тр. Геол. ком., 1893, т. X, № 2, стр. 1—148, 149—191.

76. Проблема-minimum в учении о симметрии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1893, т. XXX, стр. 41, 74.

77. Основания морфологии и систематики многогранников. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1893, т. XXX, стр. 241—331.

78. Исследование порошка золота, полученного действием азотной кислоты на амальгаму золота. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1893, т. XXX, стр. 455—458.

79. Заметки о приоритете русских ученых в открытии черного алмаза. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1893, т. XXX, стр. 465.

80. Ueber Universalgoniometer. — Neues Jahrb. f. Min., 1893, Bd. II SS. 69—70.

81. Universal-Theodolith-Methode in der Mineralogie und Petrographie. Theil I. Universalgoniometrische Untersuchungen. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1893, Bd. XXXI, SS. 574—715.

82. Universal-Theodolith-Methode in der Mineralogie und Petrographie. Theil II. Kristalloptische Untersuchungen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1893, Bd. XXII, SS. 229—268.

1894

83. Новые приборы для геометрических и оптических исследований кристаллов. — Зап. Акад. Наук по физ.-мат. отд., VII серия, 1894, т. XLII, № 1, 27 стр.

84. Основной закон кристаллографии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1894, т. XXXI, стр. 171—189. См. также краткое сообщение на стр. 350.

85. О вновь вышедших книгах: B. Hecht. Anleitung zur Kristallberechnung и Fletscher. Optische Indicatrix. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1894, т. XXXI, стр. 364—367.

86. Геологические исследования в юго-западной части 89-го листа.— Изв. Геол. ком., 1894, стр. 75—81.

87. Un théorème des élèments d'Euclide exprimé en forme très générale. — Bull. Sciences mathém., 2-e série. 1894, t. XVIII, pp. 1—5.

88. Minimumproblem in der Lehre von der Symmetrie. — Neues Jahrb. f. Min., 1894, Bd. I. SS. 56—78.

89. Erwiderung auf die Bemerkungen zu E. v. Fedorow's Elementen der Gestaltenlehre von Edmund Hess. — Neues Jahrb. f. Min. 1894. Bd. II, SS. 86–88.

90. Noch ein Wort über den Satz, nach welchem Symmetrieaxen immer mögliche Kristallkanten sein sollen. — Neues Jahrb. f. Min., 1894, Bd. II, SS. 199—200.

91. Mineralogisches aus dem Nördlichen Ural. — Tschermak's Min. u. Pal. Mitteil., 1894, Bd. XIV, SS. 85—91, 143—155.

92. Mineralogische und petrographische Beobachtungen. — Tschermak's Min. u. Pal. Mitteil., 1894, Bd. XIV, SS. 545—553.

93. Das Grundgesetz der Kristallographie. — Zeitshr. f. Krist. u. Min. 1894, Bd. XXIII, SS. 99—113.

94. Zur Bestimmung der Feldspäthe und des Quarzes in Dünnschliffen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1894, Bd. XXIV, SS. 130—132.

95. Die Millerschen sind die allein zulässigen Symbole. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1894, Bd. XXIV, SS. 132–135.

96. Theorie der Kristallstructur. Einleitung. Regelmässige Punktsysteme. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1894, Bd. XXIV, SS. 210—252.

1895

97. Рецензия на сочинения А. Н. Карножицкого: 1) „О природе и происхождении вицинальных плоскостей кристаллов“ и 2) „Евгение-Максимилиановские копи“.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1895—1896, т. XXXIV, отд. 2, стр. 70—84.

98. Ueber Pseudochroismus und Pseudodichroismus.— Tschermak's Min. u. Pal. Mitteil., 1895, Bd. XIV, SS. 569—571.

99. Die einfachste Form des Universaltischchens. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1895, Bd. XXIV, SS. 602—603.

100. Einfaches Verfahren zur Bestimmung des absoluten optischen Zeichens eines unregelmässiges Mineral-Körnchens in Dünnschliffen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1895, Bd. XXIV, SS. 603—605.

101. Ueber die Bedeutung der die Kristallflächencomplexe bestimmenden Parameter. (Elemente eines Kristalls). — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1895, Bd. XXIV, SS. 605—610.

102. Die zu den optischen Axen normalen Schnitte der Plagioklase.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1895, Bd. XXV, SS. 94—95.

103. Theorie der Kristallstructur. I. Mögliche Structurarten. (Mit übersichtlicher graphischer Darstellung der Symmorphen Structurarten). — Zeitschr. f. Krist. u. Min, 1895, Bd. XXV, SS. 113—224.

104. Optische Mittheilungen. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1895, Bd. XXV, S. 349—356.

1896

105. Геологические исследования в Северном Урале в 1887—1889 годах. (Отчет о деятельности геологической партии Северной экспедиции).— Горн. журн., 1896, II, стр. 51—69, 188—249, 321—364; III, стр. 52—98.

106. О новой группе изверженных пород. — Изв. Моск. с.-х. инст.. 1896, II, стр. 168—187.

107. Детальная геологическая съемка Богословского горного округа. Пермь, 1896, 25 стр.

108. Einige Betrachtungen über die Grundfragen der Kristallographie.— Sitzungsber. d. Math.-Phys. Cl. d. Bayer. Akad., 1896, Bd. XXVI, SS. 499—530.

109. Universalmethode und Feldspathstudien. Theil I. Methodische Verfahren. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1896, Bd. XXVI, SS. 225—261.

110. Universalmethode und Feldspathstudien. Theil II. Feldspathbestimmungen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1896, Bd. XXVII, SS. 337 – 398.

111. Beitrag zur Syngonielehre.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1896, Bd. XXVIII, SS. 36 — 68.

1897

112. Геологические исследования в Северном Урале в 1887 — 1889 годах. Отчет о деятельности геологической партии Северной экспедиции. III. Исследования на западном склоне Урала в 1888 году. — Горн. журн., 1897, III, стр. 337 — 375; IV (пояснения к геологической карте, приложенной к отчету), стр. 378 — 387.

То же (включая отчет, изданный в 1886 г.). СПб., 1898. 216 стр.

113. Курс кристаллографии. Изд. 2-е. СПб., 1897, XVI, 376 стр.

114. Основания петрографии. СПб., 1897, 236 стр.

115. Ueber das compacteste regelmässige Kugelsystem.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1897, Bd. XXVIII, SS. 232 — 238.

116. Der Granat von den Turjinskschen Gruben.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1897, Bd. XXVIII, SS. 276 — 290.

117. Nachträgliche Studien über Symmetrielehre.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1897, Bd. XXVIII, SS. 468 — 482.

118. Versuch einer Theorie der Thermodynamik der Kristalle.— Zeitshr. f. Krist. u. Min., 1897, Bd. XXVIII, SS. 483 — 501.

1898

119. Докладная записка, представленная в Правление Горнозаводского Богословского товарищества. — Горн. журн. 1898, IV, стр. 238 — 244. (Совместно с В. В. Никитиным).

120. Письмо редактору по поводу брошюры St. Czyszkowski „Les veines métallifères de l'Oural".— Горн. журн., 1898, IV, стр. 249—252.

121. Результаты геологических исследований 1897 года в Богословском округе.— Ежегодн. по геологии России, 1898, т. II, стр, 123—127.

122. Точное графическое решение вопросов сферической тригонометрии.— Зап. Русск. технич. общ., 1898, 4, стр. 167—183.

123. Некоторые практические результаты детальной геологической съемки Богословского горного округа.— Изв. Общ. горн. инж., 1898, № 5, стр. 27—42.

124. Biegungsaxe der Feldspäthe.— Tschermak's Min. u. Pal. Mitteil., 1898, Bd. XVIII, SS. 360—366.

125. Universalmethode und Feldspathstudien. Theil III. Die Feldspäthe des Bogoslowsk'schen Bergreviers. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1898, Bd. XXIX, SS. 604—658.

126. Ueber Krystallzeichnen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1898, Bd. XXX, SS. 9—16.

127. Einfaches Verfahren zur Bestimmung des absoluten optischen Zeichens eines unregelmässiges Mineral-Körnchens in Dünnschliffen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1898, Bd. XXX, SS. 17—22.

128. Ueber eine besondere Art der optischen Anomalien und der Sanduhrstructur.— Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1898, Bd. XXX, SS. 68—70.

129. Aus dem Gebiete bes Hypothetischen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1898, Bd. XXXI, SS. 17—20.

130. Neue Auffassung der Syngonie, eines Grundbegriffes der Kristallographie.— Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1898, Bd. XXXI, SS. 21—23.

1899

131. О минералах Богословского горного округа.— Ежегодн. по геол. России, 1899, т. III, стр. 79—91. (Совместно с В. В. Никитиным).

132. Памяти П. В. Еремеева.— Ежегодн. по геол. России, 1899, т. III, стр. 139.

133. П. В. Еремеев как минералог. Библиографический очерк.— Ежегодн. по геол. России, 1899, III, стр. 141—150.

134. Об изучении химизма минералов и горных пород.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1899, т. XXXVII, стр. 269—311.

135. О петрографической номенклатуре.— Изв. Моск. с.-х. инст., 1899, V, стр. 389—400.

136. Докладная записка о практических результатах детальной геологической съемки Богословского округа. 1899. (Совместно с В. В. Никитиным).

137. Die Resultate der Feldspathstudien.— Sitzungsber. d. Math.-Phys.

Cl. d. Bayer. Akad., 1899, Bd. XXVIII, SS. 55—58. То же. Отд. оттиск. München, 1898, 4 SS.

138. Reguläre Plan- und Raumvertheilung.— Abhandl. d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Phys. Cl., 1899—1900, Bd. XX, Abtheilung II, SS. 465—588.

139. Constatirung der optischen Anomalien in Plagioklasen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1899, Bd. XXXI, SS. 579—582.

140. Pseudoabsorption.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1899, Bd. XXXII, SS. 128—130.

141. Weiss'sches Zonengesetz und neue Kristallographie (ohne Rechnung).— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1899, Bd. XXXII, SS. 131—151.

142. Mikroskopische Bestimmung des Periklingesetzes.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1899, Bd. XXXII, SS. 246—249.

1900

143. Естественная классификация и символизация химических составов изверженных горных пород.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1900, т. XXXVIII, стр. 395—447.

144. О строении Меднорудянского рудника и о генезисе его медных руд.— Изв. Общ. горн. инж., 1900, № 4, стр. 1—9.

145. Sur la nomenclature pétrographique.— VIII Congrés internat. de géol., Paris, 1900, t. I, p. 226—238.

146. Beiträge zur zonalen Kristallographie. I. Ein besonderer Gang des zonalen Formenentwickelung. II. Universalgoniometer mit mehr als zwei Drehaxen und genaue graphische Rechnung. III. Syngonie-Ellipsoid-Gesetz.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1900, Bd. XXXII, SS. 446—492; Bd. XXXIII, SS. 555—588.

147. Ein extremer Fall in dem Schalenbau der Plagioklase.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1900, Bd. XXXIII, SS. 127—132.

148. Zur Theorie der kristallographischen Projectionen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1900, Bd. XXXIII, SS. 589—598.

1901

149. Геологические исследования летом 1900 г.— Ежегодн. по геол. России, 1901, т. IV, отд. II, стр. 135—137.

150. Новые приспособления к поляризационному микроскопу.— Ежегодн. по геол. России, 1901, т. IV, стр. 142—145.

151. Наблюдения и опыты по кристаллогенезису.— Изв. Акад. Наук, 1901, т. XV, стр. 519—534.

152. Кедабекит и виолаит.— Изв. Моск. с.-х. инст., 1901, т. VII, стр. 43—47.

153. Богословский горный округ. Описание в отношении его топографии, минералогии, геологии и рудных месторождений. СПб,, 1901, VIII, 12 — 127 стр.

154. Курс кристаллографии. Изд. 3-е, исправл. СПб., 1901, III, 438 стр.

155. Ueber Universalgoniometer mit mehr als zwei Drehachsen.— Mechaniker, Berlin, 1901, Bd, IX, SS. 145 — 147.

156. Bemerkung betreffend des Herrn Souza de Brandao Aufsatz „Ueber Kristallsysteme".— Centralbl. f. Min., Geol. u. Pal., Stuttgart, 1901, SS. 545 — 546.

157. Beiträge zur zonalen Kristallographie. IV. Zonale Symbole und richtige Aufstellung der Kristalle.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1901, Bd. XXXIV, SS. 133 — 157.

158. Beiträge zur zonalen Kristallographie. V. Complications-Gesetze und richtige Aufstellung der Kristalle. Mit Anhang: Richtige Aufstellung der Pyroxene und Beziehungen ihrer Structur zu derjenigen der Amphibole.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1901, Bd. XXXV, SS. 25 — 74.

159. Beiträge zur zonalen Kristallographie. VI. Zonale Verhältnisse des Berylls und der Kristalle des hypohexagonalen Typus überhaupt.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1901, Bd. XXXV, SS. 75 — 148.

1902

160. Некоторые практические результаты при исследовании коллекции Закавказья и Забайкальской области.— Горн. журн., 1902, IV, стр. 233 – 240.

161. Оптические приборы, основанные на применении пакетов стеклянных пластинок.— Ежегодн. по геол. России, 1903, т. V, отд. I, стр. 217 — 221.

162. Краткое сообщение о результатах минералогического и петрографического исследования берегов Белого моря.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1902 — 1903, т. XL, стр. 211 — 220.

163. Последние шаги в деле универсально-оптических исследований. Применение к полевым шпатам.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1902 — 1903, т. XL, стр. 221 — 263. См. также письмо, приложенное к статье (там же, протоколы, стр. 80 — 82).

164. Определение показателей преломления в тонких шлифах.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1902 — 1903, т. XL, стр. 305 — 363.

165. Влияние вытесняющих подмесей на кристаллизацию.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1902 — 1903, т. XL, стр. 363 — 381.

166. Об определении по универсальному методу всех трех показателей преломления в минералах петрографических препаратов.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1902 — 1903, т. XL, отд. 2, стр. 89 — 93.

167. Отзыв о работе В. И. Воробьева „Кристаллические исследования турмалина с Цейлона и из некоторых других месторождений".— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1902 — 1903, т. XL, стр. 102 — 105.

168. Описание нескольких интересных кристаллов.— Изв. Акад. Наук, 1902, т. XVII, № 1, стр. 91 — 100.

169. Иван Васильевич Мушкетов. Биографический очерк. — Изв. С.-Петербургск. биологич. лаборат., 1902, т. VI, № 2, стр. 5 — 27.

То же. — Ежегодн. по геол. России, 1903 — 1904, т. VI, отд. 1, стр. 1 — 22.

170. Theorie der Kristallstructur. Theil II. Reticuläre Dichtigkeit und erfahrungsgemässe Bestimmung der Kristallstructur.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1902, Bd. XXXVI, SS. 209 — 233.

171. Zonale Kristallographie und Theorie der Kristallstructur.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1902, Bd. XXXVII, SS. 22 — 49.

172. Ueber die Anwendung der Dreispitzzirkels für kristallographische Zwecke.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1902, Bd. XXXVII, SS. 138 — 142.

173. Axendispersionsarten und ihre Bestimmung.— Zeitschr. f. Krist u. Min., 1902, Bd. XXXVII, SS. 143 – 150.

1903

174. К статье „Некоторые практические результаты исследования Закавказской и Забайкальской коллекций". Объяснение таблицы.— Горн. журн., 1903, I, прил.

175. Оптические определения или химический анализ? — Ежегодн. по геол. России, 1903 — 1904, т. VI, отд. 1, стр. 63 — 67.

176. О новом способе определения толщины пластинок, взятых из микроскопических препаратов.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1903 — 1904, т. XLI, отд. 2, стр. 8 — 9.

177. О мезосферических многогранниках.— Зап. Акад. Наук по физ.-мат. отд., 1903, т. XIV, № 1, стр. 1 — 40.

178. Критический пересмотр форм кристаллов минерального царства. (Материалы по молекулярной статике однородных твердых тел).— Зап. Акад. Наук по Физ.-мат. отд., 1903, т. XIV, № 2, стр. 1 — 148.

179. Горные породы Кедабека.— Зап. Акад. Наук по Физ.— мат. отд., 1903, т. XIV, № 3, стр. 1 — 51.

180. Новые неустойчивые разности семиводных цинковой и никелевой солей серной кислоты.— Изв. Акад. Наук. 1903, т. XVIII, стр. 15 — 19.

181. Влияние капиллярного, теплового и электрического токов на кристаллогенезис.— Изв. Акад. Наук, 1903, т. XVIII, стр. 53—63.

182. Один из самых общих законов кристаллизации.— Изв. Акад. Наук, 1903, т. XVIII, стр. 155—160.

183. Об условиях научной деятельности в нашем отечестве. Письмо в редакцию.— Русск. Ведом. I, 1903, № 253.

184. Notiz betreffend die Kristallisation des Calaverit.—Zeitschr. f. Krist. u. Min., Bd. XXXVII, 1903, SS. 611—618.

185. Allgemeinste Krystallisationsgesetze und die darauf fussende eindeutige Aufstellung der Kristalle.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1903, Bd. XXXVII, SS. 321—490.

1904

186. Минералогическое и петрографическое описание берегов Белого моря. — Горн. журн., 1904, II, стр. 98—127, 196—242, 368—395; III, стр. 80—114.

187. Проблема-минимум в учении о мезосферических многогранниках.— Изв. Акад. Наук, 1904, т. XXI, № 1, стр. 33—72.

188. Проблема-минимум в учении о симметрии.— Изв. Акад. Наук, 1904, т. XXI, № 1, стр. 73—77.

189. Особенно интересный случай кристаллогенезиса.— Изв. Акад. Наук, 1904, т. XXI, № 1, стр. 79—84.

190. О кристаллизации соли состава $C_{22}H_{32}NSO_4Br$ ($C_{12}H_{17}NC_{10}BrSO_4$).— Изв. Акад. Наук. 1904, т. XXI, № 2, стр. 103—109.

191. Опыт, наглядно демонстрирующий непрерывность кристаллизации. —Изв. Акад. Наук, 1904, т. XXI, 2, стр. 111—112.

192. Некоторые следствия из закона эллипсоида сингонии. — Изв. Акад. Наук, 1904, т. XXI, 2. стр. 113—140.

193. 10-летие Минералогического кабинета Московского сельскохозяйственного института. — Речь и отчет, читанные в годичном собрании Московского сельскохозяйственного института 24 сентября 1904 г, М., 1904.

194. Из итогов 35-летия. — Речь и отчет, читанные в годичном собрании Московского сельскохозяйственного института 26 сентября 1904 г. М. 1904.

1905

195. Полиаргит и полиаргитизация. — Горн. журн., 1905, II, стр. 237—247.

196. Эрнит (Oehrnit) и иттрокальцит, как новые минеральные виды. — Горн. журн., 1905, III, стр. 264—271.

197. Кристаллы пушкинита из Верх-Исетской дачи. — Горн. журн., 1905, IV, стр. 208—245. (Совместно с В. М. Колачевским).

198. Кристаллические превращения и рост в твердой среде. — Ежегодн. по геол. России, 1905, т. VII. стр. 140—144.

199. Кристаллизация расплавленного вещества, отчасти разлагающегося при плавлении. — Ежегодн. по геол. России, 1905 т, VII; стр. 151—158.

200. Важность применения стереографической линейки. — Ежегодн. по геол. России, 1905—1906, т. VIII, отд. 1, стр. 26—30.

201. Попытка лабораторной эпидотизации граната. — Ежегодн. по геол. России, 1905—1906, т. VIII, отд. 1, стр. 33—35.

202. Поездка в Малый Кавказ летом 1906. — Ежегодн. по геол. России, 1905—1906, т. VIII, отд. 1. стр. 268—269.

203. Новые особые точки стереографической проекции в связи с расширением понятия об изотропных пучках лучей. — Зап. Акад. Наук по Физ.-мат. отд. 1905, т. XVII, 5, стр. 1—8.

204. Как обезвредить эксцентриситет дешевых универсальных гониометров. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1905, т. XLIII, стр. 191—205.

205. О кристаллах некоторых соединений ароматических пиридинов. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1905, т. XLIII, стр. 207—236.

206. Два полиморфа иода. — Изв. Акад. Наук, 1905, т. XXII, стр. 287—293.

207. Заметка о нефелиновых породах с Белого моря. — Изв. Акад. Наук, 1905, т. XXIII, стр. 149—152.

208. О горных породах берегов Белого моря и Мурмана. — Сб. „Памяти И. В. Мушкетова". СПб., 1905, стр. 115—129.

209. Notiz betreffend ein Minimumproblem in der Gestraltenlehre. — Zeitschr. f. Krist u. Min. 1905, Bd. XL, SS. 277—279.

210. Einige Folgerungen aus dem Syngonieellipsoidgesetze. — Zeitchr. f. Krist. u. Min. 1905, Bd. XL, SS. 332—356.

211. Theorie der Kristallstructur. Theil III. Ueber die Hauptstructurarten der Krystalle des kubischen Typus und speciell über die des Zirkons. — Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1905. Bd. XL, SS. 529—554.

212. Das Syngonieellipsoid ist das Trägheitsellipsoid der Kristallinischen Substanz. — Zeitschr. f. Krist. u. Min, 1905, Bd. XLI. SS. 151—156.

213. Zur Beziehung zwischen Kristallographie und Zahlenlehre. — Zeitschr. f. Krist. u. Min, 1905, Bd. XLI, SS. 162—163.

214. Kristallisation des Quarzit und Calcit. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1905, Bd. XLI, SS. 455—469.

215. Der einfachste Beweis des zur Bestimmung der Hauptstructurarten dienenden Satzes. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1905, Bd. XLI, SS. 478—480.

216. Specielle Erprobung des kristallographischen Limitgesetzes. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1905. Bd. XLII, SS. 8—12.

1906

217. Крайнее упрощение зональных вычислений и кристаллографических вычислений вообще. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1906, т. XLV, стр. 199—242.

218. Сферотригонометр. Прибор для точного решения графическим путем задач кристаллографии и сферической тригонометрии. — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1906, т. XLV, стр. 257—299.

219. Кристаллизация лансфордита, дистена нептунита и титанита.— Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1906, XLV, стр. 299—327.

220. Перфекционизм. — Изв. С.-Петербургск. биол. лабор., 1906, т. VIII, вып. 1, стр. 25—65; т. VIII, вып. 2, стр. 9—65.

221. Syngonielehre. — Abhandl. d. Bayer. Akad. d. Wiss., mathem.-phys. Cl., 1906, Bd. XXIII, Abt. 1, SS. 1—88.

То же. Отд. отт. München, SS. 1—88.

222. О кристаллизации и некоторых физических свойствах двух соединений из класса ксантогеновых амидов (тиоуретанов). — Bull. de la Soc. des natur. de Moscou, 1906, No 1—2, стр. 110—132. (Совместно с Д. Артемьевым).

223. Erprobung des Limitgesetzes an Murzinskit. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1906, Bd. XLIII, SS. 36—38.

1907

224. Химические отношения горных пород и их графическое изображение. — Зап. Горн. инст., 1907, т. I, стр. 1—19.

225. Точное изображение точек пространства на плоскости. — Зап. Горн. инст., 1907, т. I. стр. 52—79.

226. Вывод одной из основных формул в симметрии.— Зап. Горн. инст., 1907, т. I, стр. 79—80.

227. Каломель из Никитовки. — Зап. Горн. инст., 1907, т. I, стр. 81.

228. Опыты, наглядно демонстрирующие значительное различие в растворимости разных граней. — Зап. Горн. инст., 1907, т. I, стр. 81—83.

229. Извлечение из отзыва о труде А. К. Болдырева „Основы геометрического учения о симметрии". — Зап. Мин. общ., 2-я серия, 1907, т. XLV. стр. 417—425.

230. Новая геометрия как основа черчения. Составлено на основе лекций, читанных в Горном институте в начале 1906 г. СПб., 1907, VIII, 136 стр. с 99 рис. и 3 табл.

1908

231. Коллинеарные системы в положении перспективном, но не инволюции. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I. стр. 143—145.

232. Этюды по геометрии шаров. — Зап. Горн. инст., т. I, стр. 102—142.

233. Системы гармонических отрезков и векторов. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 147—159.

234. Цинк, содержащий троилит, как продукт заводского возгона. Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 160.

235. Различная растворимость граней и ее проявление в минеральном царстве. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 160—163.

236. Интересные образцы калистых полевых шпатов в Музее Горного института. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 163—165.

237. О реципрочных кривых и поверхностях. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 171—174.

238. Сферические системы. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 175—182.

239. Баритокальцит и псевдоморфоза по нем барита. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 182—185.

240. Естественные фигуры вытравления на топазе. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр, 186—191.

241. Кристаллы Минералогического музея. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 192—223, 1909. т. II, стр. 285—323.

242. Сомнительный двойник авгита из Монте-Росси. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 233.

243. Усовершенствование критерия правильной установки кристаллов. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 234.

244. Изображение структуры кристалла векториальными кругами. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 279—294.

245. Построение кривой поверхности второго порядка (коносекунды) по мнимым парам точек или мнимому коническому сечению. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 302—304.

246. Построение кривых поверхностей второго порядка (коносекунд) и полный шестигранник. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 304—312.

247. Заметка об одном свойстве стереографической проекции. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 316—317.

248. Гипопараллельный сросток арагонита из Билина. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 317.

249. Возможность различных геометрических систем при одной и той же полной совокупности элементов. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 319—321.

250. Существование безграничного множества геометрических систем. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 322—342.

251. Следы проявления триклинной сингонии в ортоклазе. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 392—394.

252. К вопросу о происхождении двойниковых полосок в микроклине. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 394.

253. Линейная призма кривых поверхностей второго порядка (коносекунд), определяемая одною из них и плоскостью. — Зап. Горн. инст., 1908. т. I, стр. 394—396.

254. Сдвиг обыкновенных и полярных решеток.— Зап. Горн. инст. 1908, т. I, стр. 396—397.

255. Опыты по кристаллизации между двумя сферами. — Зап. Горн. инст., 1908, т. I, стр. 397—399.

256. Белое море как источник материала для сельско-хозяйственной культуры. — Изв. Моск. с.-х. инст., 1908, т. XIV, стр. 94—97.

257. О постановке детальной геологической съемки России по частной инициативе.— Труды I Всеросс. съезда деят. по практич. геологии и разведочн. делу в 1903 г. СПб., 1908, стр. 71—82.

258. О преподавании минералогического цикла наук в высших горных школах.— Труды I Всеросс. съезда деят. по практич. геологии и разведочн. делу в 1903 г. СПб., 1908, стр. 445—456.

259. Paralleloëder in kanonischer Form und deren eindeutige Beziehung zu Raumgittern. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1908, Bd. XLVI, SS. 245—260.

1909

260. Генезис авгитогранатовых пород по новым данным. — Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 48—68. (Совместно с Е. Д. Стратоновичем.)

261. Полный четырехсторонник в кристаллографии и графический прием нахождения сложных индексов — Зап. Горн. инст, 1909, т. II, стр. 72—73.

262. Один из существенных числовых законов геометрической сети развития форм.—Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 74—76.

263. Тетраэдрическая геометрическая сеть и ее развитие по пяти точкам.—Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 76—77.

264. Простое и точное изображение точек пространства четырех измерений на плоскости посредством векторов.— Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 213—240.

265. Тонкопластинчатые кристаллы брукита.— Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 253.

266. Интересный кристалл апатита, спутника нептунита из Калифорнии.— Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 253—254.

267. К влиянию примесей при кристаллизации между сферами.—Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 254—255.

268. Экспериментальное решение вопроса о генезисе вициналоидов. Скучивание.—Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 255—256.

269. Неравномерность в распределении способности кристаллизации и изоморфизм.— Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 256—259.

270. О составлении таблиц для кристаллохимического анализа.—Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 259—261.

271. К статистике распределения кристаллов по их основным свойствам.— Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 329—330.

272. Новые приобретения Минералогического института.— Зап. Горн. инст., 1909, т. II, стр. 330—332.

273. Bemerkung zu der Abhandlung von G. Wulff (Paralleloëder, Structur unb richtige Aufstellung der Kristalle). — Zeitschr. f. Krist. u. Min. 1909, Bd. XLVII, SS. 647.

1910

274. Дополнительные замечания к статье В. И. Соколова и Д. Н. Артемьева об определении плотности сеток.— Зап. Горн. инст., 1910, т. II, стр. 341—345.

275. Кристаллография за сорок лет.— Зап. Горн. инст., 1910, т. II, стр. 364—375.

276. Родственные геометрические системы.— Зап. Горн. инст., 1910, т. II, стр. 376—385.

277. Несколько формул, относящихся к системе зональных вычислений.— Зап. Горн. инст., 1910, т. II, стр. 394—395.

278. Соображения о законах двойников.— Зап. Горн. Инст., 1910, т. II, стр. 395—396.

279. Приближенное деление окружности круга на равные части лучами из центра. — Зап. Горн. инст., 1910, т. II, стр. 396—397.

280. Выражение двойного преобразования символов. — Зап. Горн. инст., 1910, т. II, стр. 397—398.

281. Завершение вывода канонических параллелоэдров. — Зап. Горн. инст., 1910, т. III. стр. 88—97.

282. Тождественные пространственные решетки при разных символах комплекса.— Зап. Горн. инст., 1910, т. III, стр. 98—99.

283. Кристаллизация барита и порядок расчета установки вообще.— Зап. Горн. инст., 1910, т. III, стр. 99.

284. Ergänzungsbemerkungen zu W. J. Sokolow und D. N. Artemjeff Directe tabellarische Ablesung der Netzdichtigkeiten der Kristallflächen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1910, Bd. XLVIII, SS. 391—399.

285. Vollendung in der Entwicklung des Begriffs des kanonischen Paralleloëders.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1910, Bd. XLVIII, SS. 400—416.

286. Aufruf an die Herren Collegen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1910, Bd. XLVIII, SS. 514.

1911

287. Несколько упрощенных приемов при графическом решении задач кристаллографии.— Зап. Горн. инст., 1911, т. III. стр. 141—149.

288. Начала применения кристаллохимического анализа.— Зап. Горн. инст., 1911, т. III. стр. 150—157.

289. Псевдоморфоза малахита по атакамиту из Богословского горного округа. — Зап. Горн. инст., 1911, т. III, стр. 158.

290. Энигматические грани кварца. — Зап. Горн. инст., 1911, т. III, стр. 170.

291. Бенитоит вместо апатита. — Зап. Горн. инст., 1911, т. III, стр. 170.

292. Существенное усовершенствование графических схем трехугольной и тетраэдрической. — Зап. Горн. инст., 1911, т. III, стр, 188—192.

293. Мистика круга Фейербаха. — Зап. Горн. инст., 1911, т. III, стр. 284—286.

294. О специальных кругах и шарах. — Зап. Горн. инст., 1911, т. III, стр. 287—291.

295. Сферические совокупности кривых второго порядка (коноприм) Зап. Горн. инст., 1911, т. III, стр. 292—308.

296. О системах, коих линейные примы определяются тремя элементами. — Зап. Горн. инст., 1911. т. III, стр. 309—314.

297. Влияние толщины слоя раствора на кристаллизацию. — Зап. Горн. инст., 1911, т. III, стр. 319.

1912

298. Симметрия линейных совокупностей кривых второго порядка (коноприм). — Зап. Горн. инст., 1912, т. III, стр. 321—333.

299. Однополые гиперболоиды и обобщение их понятия на примере системы коноприм. — Зап. Горн. инст., 1912, т. III, стр. 334—336.

300. Еще о замечательных свойствах особой циклоиды. — Зап. Горн. инст., 1912, т. III, стр, 337—339.

301. Из результатов поездки в Богословский округ летом 1911 г. — Зап. Горн. инст., 1912, т. III, стр. 340—348.

302. Основные черты новой геометрии. — Зап. Горн. инст., 1912, т. III, стр. 387—393.

303. Осевая коллинеация. — Зап. Горн. инст., 1912, т. III, стр. 394—396.

304. Вероятная тождественность двух веществ, описанных как два различные. — Зап. Горн. инст., 1912, т. III, стр. 397.

305. Всегда ли можно привести в перпендикулярное положение две линейных секунды (в пределах одной линейной терции)? — Зап. Горн. инст., 1912, т. III, стр. 397—398.

306. Нулевая система, как полярная в линейной приме коносекунд. — Зап. Горн. инст., 1912, т. IV, стр. 63—64.

307. Новый случай вероятной тождественности двух веществ, описанных как два различные. — Зап. Горн. инст., 1912, т. IV, стр. 65.

308. Вывод формулы вычисления граней исходного пояса по системе зональных вычислений. — Зап. Горн. инст., 1912, т. IV, стр. 65—66.

309. Die Praxis in der Kristallochemischen Analyse und die Abfassung

der Tabellen fur dieselbe. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1912, Bd. L, SS. 513—575.

310. Die chemischen Analogien der ihrer Kristallform nach dem Kaliumsulfat nähestehenden Substanzen. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1912, Bd. LII, SS. 11—21.

311. Chemische Molekul und Kristallmolekul. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1912, Bd. LII, SS. 22—43.

312. Die ersten Resultate des Studiums der Tabellen zur Kristallochemischen Analyse. — Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1912, Bd. LII, SS. 97—136.

1913

313. Гиперболическая система. — Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 144—148.

314. Более точное осуществление преобразования плоскости гномостереографической проекции. — Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 150.

315. Простой и быстрый способ демонстрирования общего закона кристаллизации. — Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 241.

316. Дополнительные замечания к статье А. К. Болдырева. — Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 296—297.

317. Конфокальные совокупности. — Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 298—311.

318. Кристаллы кубической сингонии.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 312—320.

319. Построение ребер по символам в кристаллах гипогексагонального типа.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 321.

320. О проектирующих конусах стереографической проекции.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 322—323.

321. Еще о специальных кругах и шарах.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 323—324.

322. Простейший ход операций кристаллографического исследования.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 325—344.

323. Концентрическая укладка симметрических совокупностей равных шаров.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 345—347.

324. Некоторые элементарно-геометрические теоремы и задачи, находящиеся в связи с совокупностями мнимых кругов и шаров.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 348—350.

325. Разряды конусов и простой способ распознавания этих разрядов. — Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 351—365.

326. Диаграмма плоских коноприм.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 366—367.

327. Диаграмма коносекунд.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 368—372.

328. Основные формулы сферической и плоской тетрагонометрии.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 373—390.

329. Вычисление чисел символа комплекса.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 391—396.

330. Практическое решение задачи проведения линейной примы коноприм по двум данным.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 397—398.

331. О мнимых коноприма х и коносекундах.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 399—402.

332. Система векториальных кругов тождественна с системой сферопримы лучей.— Зап. Горн. инст., 1913, т. IV, стр. 403.

333. Construction der Kanten nach ihren Indices in Complexen des hypohexagonalen Typus.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1913, Bd. LIII, SS. 178—179.

334. Die projicierenden Kegel der stereographischen Projectionen.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1913, Bd. LIII, SS. 179—181.

335. Weitere Kristallochemische Belehrungen an der Hand der Tabellen zur kristallochemischen Analyse.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1913, Bd. LIII, SS. 337—338.

1914

336. Коллинеарное преобразование мнимых пар лучей.— Зап. Горн инст., 1914, т. V, вып. 1, стр. 1—2.

337. Сферические совокупности коноприм.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 3—5.

338. Симметрия гексапримы.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 6—8.

339. Системы отрезков и пар лучей на плоскости.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 9—16.

340. Теорема, относящаяся к системе кругов.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 17—18.

341. Системы векторов и векториальных пар лучей.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 19—21.

342. Системы кругов на сфере.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 25—29.

343. Линейные совокупности векторов в пространстве.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 30—33.

344. Первое констатирование опытным путем асимморфной правильной системы.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 54—56.

345. О строении кристаллов алмаза по Брaггу.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 68.

346. Новые кристаллографические проекции.— Зап. Горн. инст. 1914, т. V, стр. 69—70.

347. Определение плотностей сеток моноклинных. гипогексагональных и тригоналоидных комплексов без помощи сдвигов.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 71.

348. Элементарный вывод формулы для определения плотности граней и ребер гипогексагонально-изотропного комплекса.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 72.

349. Полярные отношения мнимых треугольников и четырехгранников.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 73—74.

350. Теорема Паскаля и ее ближайшие аналоги на плоскости и в пространстве.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 75.

351. Гептасекунда, пентаприма и пентасекунда плоскостей.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 76.

352. Полярные отношения вещественных треугольников и четырехгранников.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 174—181.

353. Главные совокупности в сисемах точек и плоскостей.— Зап. Горн. инст., 1914 т. V, стр. 182—186.

354. Дополнение вывода главных совокупностей вплоть до октоприм и коносекунд.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 187—192.

355. Новые особые точки треугольников в связи с гномоническими проекциями кристаллографических комплексов.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 193—194.

356. Линейчатая поверхность IV порядка с высокой симметрией и кривая с четырьмя точками возврата.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 195—197.

357. Квадратичные примы лучей.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 198—204.

358. Линейчатая поверхность IV порядка, как гексаприма лучей.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 205—206.

359. Квадратичные терции и секунды лучей.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 207—209.

360. Наглядное изображение химического состава пород из области Христиании и лав Кавказа.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 210—223.

361. Важная формула Миллера.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V. стр. 233.

362. Анализ кристаллов, выделившихся из сливных вод лаборатории.— Зап. Горн. инст., 1914, т. V, стр. 234.

363. Кристаллохимический анализ на примерах.— Новые идеи в химии. Сб., СПб., 1914, № 5, стр. 1—129.

364. Начала применения кристаллохимического анализа.— Новые идеи в химии. Сб., СПб., 1914, № 5, стр. 129—150.

365. Der einfachste Gang der Kristallographischen Beschreibung.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1914, Bd. LIV, SS. 17—45.

366. Das stereographische Netz als das Diagramm der Kegel.— Zeitschr. f. Krist u. Min., 1914, Bd. LIV, SS. 46—58.

367. Die erste experimentelle Feststellung eines asymorphen regelmässigen Punctsystems.— Zeitschr. f. Krist. u. Min., 1914, Bd. LIV, SS. 163—165.

1915

368. Теория осевых коллинеаций, как расширение теории Штейнера коноприм (Kegelschnittbüschel).— Зап. Горн. инст.. 1915, т. V, стр. 388—394.

369. Из задач, относящихся к линейчатым поверхностям третьего порядка.— Зап. Горн. инст., 1915, т. V, стр. 395.

370. Родственность секунды парабол лучей с двумя постоянными лучами и системы лучей на плоскости.— Зап. Горн. инст., 1915, т. V, стр. 395.

371. Простой способ построения коррелятивных элементов в родственных секундах точек, коноприм точек и коноприм лучей с тремя постоянными элементами.— Зап. Горн. инст,. 1915, т. V, стр. 396—397.

372. Расширение построения предыдущей заметки на коноприм ы с двумя или одним постоянным элементом. Зап. Горн. инст., 1915, т. V, стр. 397—398.

373. Циклы коллинеации и линейные примы коноприм и коносекунд.— Зап. Горн. инст., 1915, т. V, стр. 398—400.

374. Разум и инстинкт. — Природа. 1915, № 7—8, стр. 895—906.

375. Практикум по основным отделам кристаллографии. (С одною диаграммою на стереографической сетке). П., 1915, 19 стр.

1916

376. Теорема, аналогичная теореме Паскаля, но относящаяся к пространству. — Зап. Горн. инст., 1916, т. VI. стр. 54—59.

377. Некоторые следствия теоремы, аналогичной теореме Паскаля.— Зап. Горн. инст., 1916, т. VI, стр. 59—62.

378. Формулы Сезаро и поляро-зоноэдрические. — Зап. Горн. инст., 1916, т. VI, стр. 63.

379. Клиновые микроскопические препараты простейшего устройства.— Зап. Горн. инст., 1916, т. VI, стр. 64.

380. Тройственность установки тригоналоидных кристаллов. — Зап. Горн. инст., 1916, т. VI. стр. 65.

381. Новый пример особого структурного изоморфизма. — Зап. Горн. инст., 1916, т. VI, стр. 65—66.

382. Символ плоскости, проходящей через три атома. Зап. Горн. инст., 1916, т. VI, стр. 66—67.

383. Важный шаг научной петрографии. — Зап. Горн. инст., 1916, т. VI, стр. 66—67.

384. Критерий правильного построения основного параллелоэдра кристалла по экспериментальным данным. — Зап. Горн. инст., 1916, т. VI, стр. 71—72.

385. К вопросу об уралитизации. — Зап. Горн. инст., 1916, т. VI, стр. 72—74. (Совместно с В Н. Лодочниковым).

386. Результаты первой стадии экспериментального исследования структуры кристаллов. — Изв. Акад. Наук, 1916, стр. 359—389.

387. Основной закон кристаллохимии. — Изв. Акад. Наук, 1916, стр. 435—454.

388. Химическая сторона кристаллического строения. — Изв. Акад. наук, 1916, стр. 547—553.

1917

389. Правильная тройственная периодичность объемов параллелоэдров. — Зап. Горн. инст., 1917, т. VI, стр. 160.

390. Основные и фундаментальные параллелоэдры кристаллических веществ. — Зап. Горн. инст., 1917, т. VI, стр. 161.

391. Предусматривание кристаллизации по расположению атомов — Зап. Горн. инст., 1917, т. VI, стр. 161—163.

392. Новая концепция структуры кристаллов и кристаллохимический анализ. — Зап. Горн. инст., 1917, т. VI, стр. 163—164.

393. Нафталин из Куккерских сланцев Финского побережья. — Зап. Горн. инст., 1917, т. VI, стр. 164.

394. Теоремы о соотношениях между линейною и стереографическою проекциями. — Зап. Горн. инст., 1917, т. VI, стр. 164.

395. Новая начертательная геометрия. — Изв. Акад. Наук, 1917, стр. 657—686.

396. Применение начал новой геометрии к кристаллооптике. — Изв. Акад. Наук, 1917, стр. 1141—1166.

397. The numerical relation between the zones and faces of a polyhedron.— Mineralog. Magazine, 1917, t. XVIII, № 84, pp. 99—100.

1918

398. Графические операции с четырьмя независимыми переменными.— Изв. Акад, Наук, 1918, стр. 615—624.

399. Приложение графических операций с тремя независимыми переменными к составу слюд. — Изв. Акад. Наук, 1918, стр. 625—630.

400. Химический тетраэдр в петрографии. — Изв. Акад. Наук, 1918, стр. 631.

401. Группа хлорита в отношении химического состава. — Изв. Акад. Наук, 1918, стр. 645—650.

402. Об основных минералах группы турмалина и о символах систем четвертой ступени. — Изв. Акад. Наук, 1918, стр 1891.

403. Трехугольники, четырехгранники и пентатопы как образы, обусловливающие коррелятивность, выражаемую одинаковыми символами. — Изв. Акад. Наук, 1918, стр. 1905.

404. Специальный упрощенный вид системы с параметром точкою. — Изв. Акад. Наук., 1918, стр. 1911,

405. Необычные полярные системы в плоскости. — Изв. Акад. Наук, 1918, стр. 1913.

1919

406. Относительная роль труда добывания сырого материала и добавочного специализированного труда в науке. — Природа, 1919, 4—6, стр. 243—252.

407. Наглядный способ вывода формул простейшей системы кристаллографических вычислений. — Изв. Акад. Наук, VI серия, 1919 (1920), т. XIII, 16—18, стр. 991—1004.

1920

408. Das Kristallreich. Tabellen zur kristallochemischen Analyse. Unter Mitwirkung von D. Artemiev, Th. Barker, B. Orelkin und W. Sokolov. Mit Atlas. — Зап. Акад. Наук по физ.-мат. отд., VIII серия, 1920. т. XXXVI, текст LXXIV, 1050 стр. атлас 213 л. табл.

---

409. Отзыв проф. Е. Федорова о кандидатах на замещение кафедры минералогии в Екатеринославском горном училищс. [Без года]. 4 стр.

410. Отзыв профессора Е. С. Федорова об относительном достоинстве трудов М. А. Усова и И. Н. Танамара, представленных на конкурс по кафедре прикладной геологии в Екатеринославском горном институте [Без года]. 6 стр.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Впервые издано отдельной брошюрой на средства автора в 1888 г. в Петербурге.

[2] Впервые опубликовано в „Записках Минералогического общества" (2-я серия, 1889, т. XXV, стр. 1—52).

[3] Впервые опубликовано в „Записках Минералогического общества" (2-я серия, 1891, т. XXVIII, стр. 1—146).

[4] Под названием „Zusammenstellung der kristallographischen Resultaten des Herrn Schoenflies und der meinigen" впервые опубликовано в „Zeitschrift für Kristallographie" (1891, Bd. XX, SS. 25—77). Перевод В. В. Курбатова и С. Д. Дмитриева.

[5] Под названием „Theorie der Kristallstruktur. Einleitung. Regelmässige Punktsysteme" впервые опубликовано в „Zeitschrift für Kristallographie" (1894, Bd. XXXIV, SS. 210—252). Перевод чл.-корреспондента АН СССР Н. В. Белова.

[6] Под названием „Theorie der Krystallstructur. I, Theil. Mögliche Structurarten. Mit übersichtlicher graphischer Darstellung der symmorphen Structurarten» впервые опубликовано в «Zeitschrift für Kristallographie", (1896, Bd. XXV, SS. 113—224). Перевод В. И Михеева, В. А. Мокиевского, И. И. Шафрановского.

В 1-й части „Теории структуры кристаллов" Е. С. Федоров постулировал, что в природе из 230 законов симметрии реально может быть встречено лишь 127 (73 симморфных и 54 гемисимморфных), остальные же 103 асимморфных закона симметрии не должны реализоваться. Этот взгляд, суживающий общность 230 пространственных групп, базировался на господствовавшем в то время представлении об обязательности молекулярного и притом решетчатого строения кристаллов. (Всякое кристал-

лическое вещество мыслилось в виде пространственной решетки, каждый узел которой является материальной молекулой).

Опыт рентгеновского анализа, ставший возможным с 1912 г., показал, что ни один из законов симметрии не лишается права на существование, причем наиболее часто встречаются как раз асимморфные законы. Весьма любопытна статья Е. С. Федорова „Первое констатирование опытным путем асимморфной правильной системы" (Зап. Горн. инст., 1914, т. V, вып. 1), в которой он быстро и радикально отказался от первоначального предубеждения. Тем самым, первая часть „Теории структуры кристаллов" имеет для нас главным образом исторический интерес, как первая попытка предугадать тонкую структуру кристаллов. Вместе с тем она, очевидно, не утеряла своего значения по отношению к молекулярным кристаллам.

Вторая и третья части „Теории структуры кристаллов": Часть II. Ретикулярная плотность и опытное определение структуры кристаллов (Theil II. Reticuläre Dichtigkeit und erfahrungsgemässe Bestimmung der Kristallstructur. Zeitschr. f. Krist., 1902, Bd. XXXVI), Часть III. О главных типах структур кубического типа и в частности о структуре циркона (Theil III. Ueber die Hauptstructurarten der Kristalle des kubischen Typus und speciell über die des Zirkons. Zeitschr. f. Krist., 1905, Bd. XI), в настоящем издании не помещены, так как они теснейшим образом связаны с циклом работ Е. С. Федорова по кристаллохимическому анализу, подготавливаемых к печати.



СОДЕРЖАНИЕ

Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде

Предисловие 9
I. Краткое изложение формул сферической тригонометрии, необходимых для понимания дальнейшего 13
II. Основные формулы геометрии в пространстве 24
Уравнения точки 30
Уравнения прямой 34
Уравнения плоскости 37
Перемещение координат 40
Сложные координаты 42
Угол плоскости с плоскостями координат 43
Угол прямой с осями координат 44
Угол прямой с плоскостью 45
Перпендикулярность прямой к плоскости 46
Угол двух прямых 47
Угол двух плоскостей 48
Расстояние точки от начала 49
Расстояние двух точек 49
III. Основные формулы геометрии на плоскости 50

Симметрия конечных фигур

Введение 57
Основные определения 60
Оси симметрии 63
Плоскости симметрии 88
Сложная симметрия 97
Приложение 105

Симметрия правильных систем фигур

Предисловие 111
Введение 117
I. Системы симморфические 137
  A. Триклиноэдрическая система 137
  B. Моноклиноэдрическая система 140
  C. Ромбическая система 144
  D. Тетрагональная система 149
  E. Гексагональная система 157
  F. Кубооктаэдрическая система 169
II. Системы гемисимморфические 176
  Моноклиноэдрическая система 179
  Ромбическая система 180
  Тетрагональная система 185
  Гексагональная система 189
  Кубооктаэдрическая система 192
  Стереоэдры гемисимморфических систем 194
III. Системы асимморфические 198
  Моноклиноэдрическая система 200
  Ромбическая система 201
  Тетрагональная система 213
  Гексагональная система 230
  Кубооктаэдрическая система 236
  Стереоэдры асимморфических систем 249
Таблица правильных систем фигур 250
Объяснение таблиц-вклеек 252
Поправка к сочинению „Симметрия правильных систем фигур“ . . . 253

Сопоставление кристаллографических результатов г-на Шенфлиса с моими

Предисловие 259
I. О симметрии 261
  Таблица кристаллографических видов симметрии (I) 272
II. Правильные системы фигур 278
  Таблица правильных систем (пространственные группы) (II) . . . 291
III. О правильном делении пространства 315
IV. Применение к минералам 324
  1. Законы роста кристалла 324
  2. Закон спайности кристаллов 326
  3. Механические деформации кристаллов 327
  4. О структурах некоторых минералов 328
Дополнение 332

Теория структуры кристаллов . .

Введение 335
Правильные системы точек 335
Вывод систем и относящиеся к выводу теоремы 337
Таблица независимых осей простых систем 342
Таблица первоначальных элементов симметрии 343
Таблица алгебраических уравнений для кристаллографических видов симметрии 348
Таблица правильных систем точек 366
Замечания по поводу вывода Барлоу 376
Сопоставление приведенных здесь систем с системами Барлоу . 380
Приложение. 386
Объяснения к таблицам-вклейкам 394
Часть I. Возможные виды структур 397
Глава I. Сущность кристаллического вещества 400
Глава II. Параллелогоны и параллелоэдры 406
Глава III. Нормальные параллелоэдры 418
A. Однородные деформации в плоскости 418
B. Однородны деформации в пространстве 422
Глава IV. Вывод всех простых возможных видов структур . . . 427
A. Симморфные системы параллелоэдров 432
B. Гемисимморфные системы параллелоэдров 437
Глава V. Вывод всех необычных возможных видов структур, соответствующих симморфным системам точек 445
Таблица необычных (экстраординарных) возможных видов структур, принадлежащих симморфным системам точек . . 466
Глава VI. Вывод всех необычных (экстраординарных) возможных видов структур, отвечающих гемисимморфным системам точек. 486
Таблица необычных (экстраординарных) возможных видов структур, принадлежащих гемисимморфным системам точек. 491
Глава VII. Вывод всех возможных видов структур, отвечающих асимморфным системам 497
Таблица возможных видов структур, отвечающих асимморфным системам точек 502
Глава VIII. Обобщение результатов 526
Таблица возможных видов структур, отвечающих каждой системе точек 527
Таблица возможных видов структур, принадлежащих каждому виду симметрии 543

Дополнение 549
1. О кристаллографической номенклатуре 549
2. Сопоставление ранее принятых обозначений для двойных систем точек с вновь введенными для них символами . . . 550
Объяснение таблицы-вклейки 554

Приложения

Евграф Степанович Федоров. Жизнь и творчество.— Проф. *И. И. Шафрановский* 557
Великий русский кристаллограф и его детище.— Чл.-корр. АН СССР *Н. В. Белов* 580
История вывода 230 пространственных групп.— Проф. *Г. Б. Бокий* и проф. *И. И. Шафрановский* 587
Список трудов Е. С. Федорова 599
Примечания 624

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии наук СССР

*

Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректор *Ю. М. Северинова*

*

РИСО АН СССР № 3273. Издат. № 203/1817
М-33082. Подписано к печати 13/I-1949 г.
Печ. л. $39^{1}/_{1}$+15 вкл. Уч.-издат. 35,3 л. Тираж 3000.
Заказ № 1554. Цена в переплете 32 руб.

2-я тип. Издательства Академии Наук СССР
Москва, Шубинский пер., д. 10.

Е. С. ФЕДОРОВ

СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛОВ





32 руб.